UN CRITERIO GENERAL DE DIVISIBILIDAD

Octavio Montoya
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad del Tolima.

Resumen.

Se presenta un criterio de divisibilidad general y homogéneo para los números enteros.

1 Introducción.

El concepto de divisibilidad es de gran importancia en diversos contextos del conocimiento; en matemáticas es un concepto clave y particularmente en teoría de números. El objetivo de este documento es presentar un criterio *general* de divisibilidad en los enteros positivos.

Algunos enteros tienen un criterio especial de divisibilidad, como ejemplos tenemos:

- *Criterio de divisibilidad por 2*: Un entero es divisible por 2 si y sólo si el dígito de las unidades es par.
- *Criterio de divisibilidad por 5*: Un entero es divisible por 5 si y sólo si el dígito de las unidades es 0 o 5.
- *Criterio de divisibilidad por 3*: Un entero es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 3.
- *Criterio de divisibilidad por 9*: Un entero es divisible por 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible por 9.
- *Criterio de divisibilidad por 11*: Un entero positivo de la forma $m = \sum_{k=o}^{n} a_k 10^k$ es divisible por 11 si y sólo si $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ es divisible por 11.
- *Criterio de divisibilidad por 7*: Un entero positivo de la forma $m = \sum_{k=o}^{n} a_k 10^k$ es divisible por 7 si y sólo si $a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 - a_9 - 3a_{10} - 2a_{11} + \ldots$ es divisible por 7.

Y así sucesivamente. ¿Existirá un criterio de divisibilidad por 13? ¿Existirá un criterio de divisibilidad por 1573? ¿Existirá un criterio de divisibilidad para cualquier entero? Es nuestro propósito dar respuesta afirmativa a los interrogantes anteriores, es decir, presentar un *criterio general de divisibilidad* para cualquier entero.

2 Preliminares.

Antes de abordar el criterio general de divisibilidad y para una mejor comprensión de los argumentos presentados, es necesario conocer algunas definiciones y teoremas de teoría de números, los cuales se desarrollan detalladamente en los textos citados en la bibliografía: por esta razón sólo haremos mención de ellos.

Definición 1. Sea m un entero positivo. Si a, b son enteros tales que m divide a $b-a$ entonces se dice que a es *congruente* con b módulo m. Esto se denota $a \equiv b \pmod{m}$.

Es decir, $a \equiv b \pmod{m}$ si y sólo si $m \mid b-a$. A continuación presentamos algunas propiedades de las congruencias.

1. La relación de congruencia módulo m es una relación de equivalencia en el conjunto de los enteros, es decir:

    (a) Reflexiva: $a \equiv a \pmod{m}$ para cada $a \in \mathbb{Z}$.

    (b) Simétrica: Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces $b \equiv a \pmod{m}$.

    (c) Transitiva: Si $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m}$ entonces $a \equiv c \pmod{m}$.

2. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y c es cualquier entero entonces $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$ y $ac \equiv bc \pmod{m}$.

3. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$ entonces $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$ y $ac \equiv bd \pmod{m}$.

4. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $P(x)$ es una función polinómica en x con coeficientes enteros entonces $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$.

Sean a y b enteros positivos. El máximo común divisor de a y b se denota (a,b). Se dice que a y b son primos relativos o relativamente primos si $(a,b)=1$.

Definición 2. Sea m un entero positivo. El entero $\phi(m)$ se define como el número de enteros positivos menores o iguales a m que son primos relativos con m. La correspondencia $m \mapsto \phi(m)$ se llama *función ϕ de Euler*.

Por ejemplo, sea $m=6$. El conjunto de los números enteros positivos menores o iguales a 6 primos relativos con 6 es $\{\,1,\,5\,\}$. Luego $\phi(6)=2$.

Teorema 1 (Teorema de Euler). *Sean a y m enteros positivos. Si $(a,m)=1$ entonces $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.*

Corolario 1 (Teorema de Fermat). *Sea p un número primo. Si $p \nmid a$ entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Definición 3. Sean a y m enteros positivos tales que $(a,m)=1$. Se dice que *a pertenece al exponente h módulo m* si h es el menor entero positivo tal que $a^h \equiv 1 \pmod{m}$.

Por el Teorema de Euler es evidente la existencia del exponente mínimo h para cualquier entero a primo relativo con m. Además $h \leq \phi(m)$.

3 Criterio general de divisibilidad.

Las siguientes definiciones no son comunes en los textos de teoría de números, pero serán de gran ayuda en el alcance del objetivo propuesto.

Definición 4 (Vector asociado a un entero positivo). Sea m un entero
positivo de la forma

$$m = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k.$$

El *vector asociado a m* lo denotaremos V_m y está definido como

$$\begin{aligned} V_m &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, 0, \ldots) \\ &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \overline{0}) \end{aligned}$$

El símbolo $\overline{0}$ indica que el 0 se repite de manera interminable y lo llamaremos el período del vector V_m. Obsérvese que el vector asociado a un entero no es más que la sucesión, en orden inverso, de las cifras del número en su notación decimal. Por ejemplo, $V_{3805} = (5, 0, 8, 3, \overline{0})$.

Definición 5 (Vector adjunto de un entero positivo). Sea m un entero
positivo. El *vector adjunto de m* lo denotaremos V_m^* y está definido como

$$V_m^* = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

donde, para cada $n \geq 0$, x_n es el entero más próximo a cero que es solución de la congruencia lineal

$$x \equiv 10^n \pmod{m}.$$

Cabe recordar que para cualquier $n \geq 0$ la congruencia $x \equiv 10^n \pmod{m}$ tiene infinitas soluciones, congruentes entre sí módulo m.

Ejemplo 1. Sea $m = 2$.

- Si $n = 0$ entonces la congruencia $x \equiv 10^0 \pmod{2}$ tiene solución $x_0 = 1$.
- Si $n = 1$ entonces la congruencia $x \equiv 10^1 \pmod{2}$ tiene solución $x_1 = 0$.
- Si $n = 2$ entonces la congruencia $x \equiv 10^2 \pmod{2}$ tiene solución $x_2 = 0$.
- $\vdots$
- Si $n = k > 0$ entonces la congruencia $x \equiv 10^k \pmod{2}$ tiene solución $x_k = 0$.

Por tanto el vector adjunto de 2 es:

$$V_2^* = (1, 0, 0, 0, \ldots) = (1, \overline{0}).$$

Aplicando el algoritmo del ejemplo 1 se puede verificar fácilmente que:

$$\begin{aligned}
V_3^* &= (\overline{1}) \\
V_4^* &= (1, 2, \overline{0}) \\
V_5^* &= (1, \overline{0}) \\
V_{12}^* &= (1, -2, \overline{4}) \\
V_{90}^* &= (1, \overline{10}) \\
V_{100}^* &= (1, 10, \overline{0})
\end{aligned}$$

Ejemplo 2. Calculemos el vector adjunto de 13.

- Si $n = 0$ entonces la congruencia $x \equiv 10^0 \pmod{13}$ tiene solución $x_0 = 1$.
- Si $n = 1$, la congruencia $x \equiv 10^1 \pmod{13}$ tiene solución $x_1 = -3$.
- Si $n = 2$, la congruencia $x \equiv 10^2 \pmod{13}$ tiene solución $x_2 = -4$.
- Si $n = 3$, la congruencia $x \equiv 10^3 \pmod{13}$ tiene solución $x_3 = -1$.
- Si $n = 4$, la congruencia $x \equiv 10^4 \pmod{13}$ tiene solución $x_4 = 3$.
- Si $n = 5$, la congruencia $x \equiv 10^5 \pmod{13}$ tiene solución $x_5 = 4$.
- Si $n = 6$, la congruencia $x \equiv 10^6 \pmod{13}$ tiene solución $x_6 = 1$.

En el paso $n = 6$ aparece nuevamente la solución 1 que se obtuvo previamente en el paso $n = 0$, lo cual nos indica que las soluciones empiezan a repetirse y que el vector adjunto de 13 es

$$\begin{aligned} V_{13}^* &= (1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, \dots) \\ &= (\overline{1, -3, -4, -1, 3, 4}) \end{aligned}$$

Nota. Se aprecia de inmediato que los vectores adjuntos calculados, a saber los de 2, 3, 4, 5, 12, 13, 90 y 100, son todos *periódicos* en el siguiente sentido: A partir de cierta componente aparece un bloque que se repite de manera interminable. Este carácter periódico no es casual en los ejemplos particulares, pues el teorema que sigue afirma la validez general de este hecho.

Teorema 2. *Todo entero positivo tiene vector adjunto periódico.*

Demostración. Partiremos el conjunto de los enteros positivos en dos subconjuntos disyuntos:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\, n \in \mathbb{Z}^+ \bigm| (10, n) = 1 \,\} \\ G_1 &= \{\, n \in \mathbb{Z}^+ \bigm| (10, n) \neq 1 \,\} \end{aligned}$$

Verifiquemos primero que todo entero de G_1 tiene vector adjunto periódico: sea m cualquier entero en G_1. Como $(10, m) = 1$, por el Teorema de Euler $10^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ y al calcular el vector adjunto de m sucede lo siguiente:

- La congruencia $x \equiv 10^0 \pmod{m}$ tiene solución $x_0 = 1$.
- La congruencia $x \equiv 10^1 \pmod{m}$ tiene solución x_1.
- La congruencia $x \equiv 10^2 \pmod{m}$ tiene solución x_2.
- $\vdots$
- La congruencia $x \equiv 10^{\phi(m)-1} \pmod{m}$ tiene solución $x_{\phi(m)-1}$.
- La congruencia $x \equiv 10^{\phi(m)} \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 1 \pmod{m}$ y evidentemente tiene solución $x_{\phi(m)} = 1$.
- La congruencia $x \equiv 10^{\phi(m)+1} \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 10 \pmod{m}$ y tiene solución $x_{\phi(m)+1} = x_1$.
- La congruencia $x \equiv 10^{\phi(m)+2} \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 10^2 \pmod{m}$ y tiene solución $x_{\phi(m)+2} = x_2$.
- $\vdots$
- La congruencia $x \equiv 10^{2\phi(m)} \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 1 \pmod{m}$ y tiene solución $x_{2\phi(m)+1} = 1$.
- $\vdots$

En general, para cualquier entero positivo n, por el algoritmo de la división existen enteros j, k tales que $n = \phi(m)j + k$ con $0 \leq k < \phi(m)$. La congruencia $x \equiv 10^n \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 10^k \pmod{m}$ y tiene solución $x_n = x_k$. Luego

$$\begin{aligned} V_m^* &= (1, x_1, x_2, \ldots, x_{\phi(m)-1}, 1, x_1, x_2, \ldots, x_{\phi(m)-1}, 1, \ldots) \\ &= (\overline{1, x_1, x_2, \ldots, x_{\phi(m)-1}}), \end{aligned}$$

que ciertamente es un vector periódico.

Veamos ahora que todo entero de G_2 tiene vector adjunto periódico: sea ahora m cualquier entero en G_2. Como $(10, m) \neq 1$, el entero m tiene la forma $m = 2^r 5^s b$ donde r, s, b son enteros no negativos, $r \geq 1$ o $s \geq 1$ y

$(10, b) = 1$. Supóngase que 10 pertenece al exponente h módulo b, es decir, h es el menor entero positivo tal que $10^h \equiv 1 \pmod{b}$ de manera que

$$b \mid 10^h - 1. \tag{1}$$

Si $t = \max\{r, s\}$ entonces

$$2^r 5^s \mid 10^t. \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos que

$$2^r 5^s b \mid 10^t(10^h - 1),$$

es decir, $m \mid 10^{t+h} - 10^t$. Por tanto $10^{t+h} \equiv 10^t \pmod{m}$. Calculemos ahora el vector adjunto de m.

- La congruencia $x \equiv 10^0 \pmod{m}$ tiene solución $x_0 = 1$.
- La congruencia $x \equiv 10^1 \pmod{m}$ tiene solución x_1.
- $\vdots$
- La congruencia $x \equiv 10^t \pmod{m}$ tiene solución x_t.
- La congruencia $x \equiv 10^{t+1} \pmod{m}$ tiene solución x_{t+1}.
- $\vdots$
- La congruencia $x \equiv 10^{t+h-1} \pmod{m}$ tiene solución x_{t+h-1}.
- La congruencia $x \equiv 10^{t+h} \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 10^t \pmod{m}$ luego tiene solución $x_{t+h} = x_t$.
- La congruencia $x \equiv 10^{t+h+1} \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 10^{t+1} \pmod{m}$ luego tiene solución $x_{t+h+1} = x_{t+1}$.
- $\vdots$
- La congruencia $x \equiv 10^{t+2h} \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 10^t \pmod{m}$ luego tiene solución $x_{t+2h} = x_t$.
- $\vdots$

En general, para cualquier entero $n \geq t$, por el algoritmo de la división existen enteros j, k tales que $n - t = hj + k$ con $0 \leq k < h$. Puesto que $n = t + hj + k$ y $10^{t+hj} \equiv 10^t \pmod{m}$, la congruencia $x \equiv 10^n \pmod{m}$ es equivalente a la congruencia $x \equiv 10^{t+k} \pmod{m}$ y tiene solución $x_n = x_{t+k}$. Luego

$$\begin{aligned} V_m^* &= (1, x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+h-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots) \\ &= (1, x_1, x_2, \ldots, x_{t-1}, \overline{x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+h-1}}), \end{aligned}$$

que también es un vector periódico. □

Definición 6. Sean p, m enteros positivos y sean $V_p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{0})$ el vector asociado a p y $V_m^* = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$ el vector adjunto de m. El *producto* de V_p y V_m^* lo denotaremos $V_p \cdot V_m^*$ y está definido como

$$V_p \cdot V_m^* = a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \sum_{k=0}^{n} a_kx_k.$$

Nota. Si convenimos que $a_i = 0$ para todo $i > n$ entonces podemos escribir $V_p \cdot V_m^* = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx_k$ y el producto recién definido corresponde al producto escalar usual: precisamente este producto es el que se emplea en el espacio llamado l^2.

Teorema 3 (Criterio General de Divisibilidad). *Sean p, m enteros positivos. p es divisible por m si y sólo si $V_p \cdot V_m^*$ es divisible por m.*

Demostración. Supongamos que p tiene la forma $p = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n$, de suerte que $V_p = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{0})$, y supongamos que $V_m^* = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)$. Esto significa que

$$\begin{aligned} 10^0 &\equiv x_0 \pmod{m} \\ 10^1 &\equiv x_1 \pmod{m} \\ 10^2 &\equiv x_2 \pmod{m} \\ &\vdots \\ 10^n &\equiv x_n \pmod{m} \\ 10^{n+1} &\equiv x_{n+1} \pmod{m} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por la propiedad (2) de las congruencias, de este sistema concluimos el siguiente:

$$\begin{aligned}
a_0 &\equiv a_0 x_0 \pmod{m}\\
a_1 10 &\equiv a_1 x_1 \pmod{m}\\
a_2 10^2 &\equiv a_2 x_2 \pmod{m}\\
&\vdots\\
a_n 10^n &\equiv a_n x_n \pmod{m}
\end{aligned}$$

Ahora por la propiedad (3) de las congruencias tenemos

$$a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_n 10^n \equiv a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \pmod{m},$$

es decir,

$$p \equiv V_p \cdot V_m^* \pmod{m}.$$

Con esta congruencia las implicaciones siguientes son evidentes: Si $m \mid p$ entonces $m \mid V_p \cdot V_m^*$ y si $m \mid V_p \cdot V_m^*$ entonces $m \mid p$; en otras palabras, p es divisible por m si y sólo si $V_p \cdot V_m^*$ es divisible por m. $\square$

Nótese que para obtener el criterio de divisibilidad por un entero específico m basta calcular el vector adjunto V_m^* una sola vez. Al final de este artículo se encuentra un listado de algunos vectores adjuntos.

Ejemplo 3 (Criterio de divisibilidad por 2). Sea p un entero positivo de la forma $p = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$. En estas condiciones,

$$\begin{aligned}
V_p &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{0})\\
V_2^* &= (1, \overline{0})\\
V_p \cdot V_2^* &= a_0
\end{aligned}$$

Así, p es divisible por 2 si y sólo si $V_p \cdot V_2^* = a_0$ es divisible por 2. Por tanto *p es divisible por 2 si y sólo si el dígito de las unidades de p es par.*

Ejemplo 4 (Criterio de divisibilidad por 3). Sea p un entero positivo de la forma $p = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$. En estas condiciones,

$$\begin{aligned} V_p &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{0}) \\ V_3^* &= (\overline{1}) \\ V_p \cdot V_3^* &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \end{aligned}$$

Así, p es divisible por 3 si y sólo si $V_p \cdot V_2^* = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es divisible por 3. Por tanto *p es divisible por 3 si y sólo si la suma de los dígitos de p es divisible por 3.*

Ejemplo 5 (Criterio de divisibilidad por 13). Sea p un entero positivo de la forma $p = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k$. En estas condiciones,

$$\begin{aligned} V_p &= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{0}) \\ V_{13}^* &= (\overline{1, -3, -4, -1, 3, 4}) \\ V_p \cdot V_{13}^* &= a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + a_6 - 3a_7 - \ldots \end{aligned}$$

Así, p es divisible por 13 si y sólo si $V_p \cdot V_2^* = a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + \ldots$ es divisible por 13.

Ejemplo 6. ¿246384 es divisible por 29?

$$\begin{aligned} V_{246384} &= (4, 8, 3, 6, 4, 2, \overline{0}) \\ V_{29}^* &= (\overline{1, 10, 13, 14, -5, 8, \ldots}) \\ V_{246384} \cdot V_{29}^* &= 4 + 80 + 39 + 84 - 20 + 16 = 203 \end{aligned}$$

246384 es divisible por 29 si y sólo si $V_{246384} \cdot V_{29}^*$ es divisible por 29, si y sólo si 203 es divisible por 29.

$$\begin{aligned} V_{203} &= (3, 0, 2, \overline{0}) \\ V_{29}^* &= (\overline{1, 10, 13, 14, -5, 8, \ldots}) \\ V_{203} \cdot V_{29}^* &= 3 + 0 + 26 = 29 \end{aligned}$$

203 es divisible por 29 si y sólo si $V_{203} \cdot V_{29}^*$ es divisible por 29, si y sólo si 29 es divisible por 29.

Por tanto 246384 es divisible por 29.

4 Vectores adjuntos de algunos enteros.

Entero	Vector adjunto
2	$(1, \overline{0})$
3	$(\overline{1})$
4	$(1, 2, \overline{0})$
5	$(1, \overline{0})$
6	$(1, \overline{-2})$
7	$(\overline{1, 3, 2, -1, -3, -2})$
8	$(1, 2, 4, \overline{0})$
9	$(\overline{1})$
10	$(1, \overline{0})$
11	$(\overline{1, -1})$
12	$(1, -2, \overline{4})$
13	$(\overline{1, -3, -4, -1, 3, 4})$
14	$(1, \overline{-4, 2, 6, 4, -2, -6})$
15	$(1, \overline{-5})$
16	$(1, -6, 4, 8, \overline{0})$
17	$(\overline{1, -7, -2, -3, 4, 6, -8, 5, -1, 7, 2, 3, -4, -6, 8, -5})$
18	$(1, \overline{-8})$
19	$(\overline{1, -9, 5, -7, 6, 3, -8, -4, -2, -1, 9, -5, 7, -6, -3, 8, 4, 2})$
20	$(1, 10, \overline{0})$
21	$(\overline{1, 10, -5, -8, 4, -2})$
22	$(1, \overline{10, -10})$
23	$(\overline{1, 10, 8, 11, -5, -4, 6, -9, 2, -3, -7, -1, -10, \cdots * \cdots, 3, 7})$
24	$(1, 10, 4, \overline{-8})$
25	$(1, 10, \overline{0})$
26	$(1, \overline{10, -4, 12, -10, 4, -12})$
27	$(\overline{1, 10, -8})$
28	$(1, 10, \overline{-12, -8, 4, 12, 8, -4})$
29	$(\overline{1, 10, 13, 14, -5, 8, -7, -12, -4, -11, 6, 2, -9, -3, -1, \cdots * \cdots, 3})$
30	$(1, \overline{10})$

*Aquí se repite la secuencia inicial del período, cambiando el signo.

Sigue en la página siguiente...

Entero	Vector adjunto
31	$(\overline{1, 10, 7, 8, -13, -6, 2, -11, 14, -15, 5, -12, 4, 9, -3})$
32	$(1, 10, 4, 8, 16, \overline{0})$
33	$(\overline{1, 10})$
34	$(1, \overline{10, -2, 14, 4, 6, -8, -12, 16, -10, \cdots * \cdots, -16})$
35	$(1, \overline{10, -5, -15, -10, 5, 15})$
36	$(1, 10, \overline{-8})$
37	$(\overline{1, 10, -11})$
38	$(1, \overline{10, -14, 12, 6, -16, -8, -4, -2, 18, -10, \cdots * \cdots, -18})$
39	$(\overline{1, 10, -17, -14, 16, 4})$
40	$(1, 10, 20, \overline{0})$
41	$(\overline{1, 10, 18, 16, -4})$
42	$(1, \overline{10, 16, -8, 4, -2, -20})$
43	$(\overline{1, 10, 14, 11, -19, -18, -8, 6, 17,}$ $\overline{-2, -20, 15, 21, -5, -7, 16, -12, 9, 4, -3, 13})$
44	$(1, 10, \overline{12, -12})$
45	$(1, \overline{10})$
46	$(1, \overline{10, 8, -12, 18, -4, 6, 14, 2, 20, 16, 22, -10, \cdots * \cdots, -22})$
47	$(\overline{1, 10, 6, 13, -11, -16, -19, -2, -20, -12, 21, 22,}$ $\overline{-15, -9, 4, -7, -23, 5, 3, -17, 18, -8, 14, -1, \cdots * \cdots, -14})$
48	$(1, 10, 4, -8, \overline{16})$
49	$(\overline{1, 10, 2, 20, 4, -9, 8, -18, 16, 13, -17,}$ $\overline{-23, 15, 3, -19, 6, 11, 12, 22, 24, -5, -1, \cdots * \cdots, 5})$
50	$(1, 10, \overline{0})$

*Aquí se repite la secuencia inicial del período, cambiando el signo.

Aparte del carácter periódico, en esta tabla se pueden observar muchas propiedades interesantes de los vectores adjuntos. Su formulación, estudio y demostración se dejan como ejercicios para el lector.

Referencias

[1] Niven, Ivan y Zuckerman, Herbert S., *Introducción a la Teoría de los Números*, Limusa, México, 1985.

[2] Pettofrezzo, Anthony J. y Byrkit, Donald R., *Introducción a la Teoría de los Números*, Prentice-Hall, Madrid, 1972.