LAS PARADOJAS EN MATEMATICAS

Iván Castro Chadid
Profesor Titular
Pontificia Universidad Javeriana
Profesor Asociado
Universidad Nacional de Colombia
ivan.castro@jol.net.co

Jesús Hernando Pérez
Profesor Emérito
Universidad Nacional de Colombia
Profesor
Universidad Sergio Arboleda
jhpalcazar@multiphone.net.co

Para muchos, una paradoja es algo que a primera vista parece ser falso, pero que en realidad es cierto; o que parece ser cierto pero que en rigor es falso; o sencíllamente que encierra en sí mismo contradicciones; pero los conceptos de certeza o falsedad en matemáticas y aún el de contradicción, dependen del grado de desarrollo de la matemática en un momento dado; parodiando a Hamlet puede decirse que "*lo que una vez fué paradoja, ya no lo es, pero puede volver a serlo*". Este hecho también se da en las ciencias experimentales y conduce inicialmente a un cuestionamiento del concepto de "*rigor científico*" que se maneja en cada época.

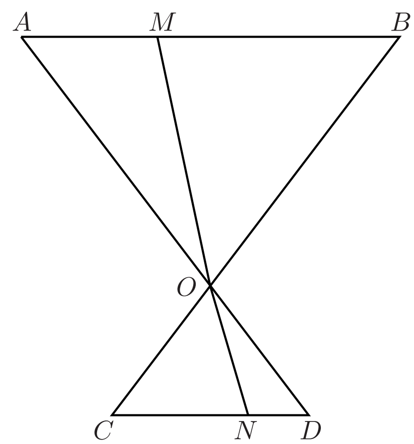
Uno de los aspectos más interesantes de la matemática estriba en que sus más difíciles paradojas encuentran un camino para originar las más bellas y profundas teorías; Kasner y Newman sostienen: com *El testamento de la ciencia es un flujo continuo, de tal manera que la herejía del pasado es el evangelio del presente y el fundamento del mañana*" [2] .

A menudo se llega a paradojas cuando se contradice el denominado principio del tercero excluido [1], que afirma lo siguiente :

cualquier enunciado proposicional es verdadero o es falso,
pero no se pueden dar ambas cosas simultáneamente.

Al tratar de aplicar a conjuntos infinitos el hecho de que: Si es posible emparejar todos los elementos de un conjunto con todos los pertenecientes a otro, entonces, ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos puso a los matemáticos ante algunos hechos que eran inexplicables en su época y que fueron considerados como paradojas; algunas de ellos, son:

1. Es posible emparejar todos los puntos de dos segmentos de rectas.



En efecto dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, que podemos suponer paralelos, conéctese D con A y B con C para obtener el punto O. Sea $M \in \overline{AB}$, la recta que pasa por O y M, corta al segmento $\overline{CD}$ en el punto N, en forma similar, si $N \in \overline{CD}$, la recta que pasa por O y N, corta al segmento $\overline{AB}$ en el punto M.

De esta forma quedan emparejados todos los puntos de $\overline{AB}$ con los del segmento $\overline{CD}$.

2. En el siglo XVI observando, Galileo Galilei, que todo entero positivo tiene un cuadrado y que todo cuadrado proviene de un entero positivo, es decir, que es posible emparejar todos los elementos del conjunto de los enteros positivos con todos los elementos del conjunto de los cuadrados de números enteros positivos, llegó a la conclusión de que las relaciones de igualdad y de desigualdad no son válidas en el infinito [1].

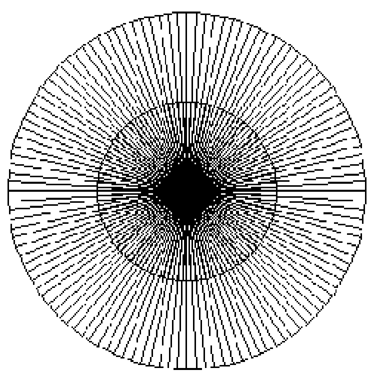
   En efecto, en su obra *Discursos y demostraciones matemáticas* presenta el siguiente diálogo entre Salviati y Simplicius:

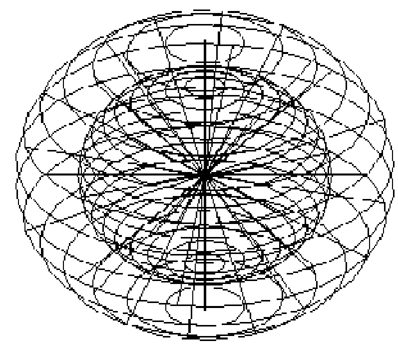
   "*Salviati: Si pregunto cuántos son los cuadrados de los números, puedes responderme correctamente que son tantos como sus propias raíces; dado que cada cuadrado tiene su raíz, y cada raíz su cuadrado, ni cada cuadrado tiene más de una sola raíz, ni cada raíz tiene más de un solo cuadrado.*

   Simplicius: Qué es lo que hay que resolver esta vez?

   Salviati: No veo que se pueda admitir otra conclusión, si no es la de decir que la cantidad de números en general es una cantidad infinita: los cuadrados son infinitos y además ni la cantidad de cuadrados es menor que la de los números en general, ni esta es mayor que aquella: en conclusión los atributos igual, mayor y menor no tienen sentido cuando se habla de infinitos, sino cuando se trata de cantidades finitas".

3. Es posible emparejar la totalidad de los enteros positivos con los números pares, aunque estos últimos están estrictamente contenidos en el conjunto de los enteros [11].

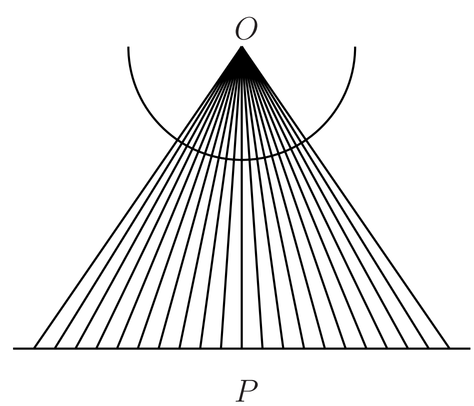




4. En el siglo XIII, el filósofo escocés John Duns Scoto observaba que dadas dos circunferencias concéntricas, todos los puntos de la una pueden emparejarse uno a uno, con todos los de la otra. Una observación similar es válida para el caso de dos esferas concéntricas [8].

5. Es posible emparejar todos los puntos de una semicircunferencia con los de la recta.

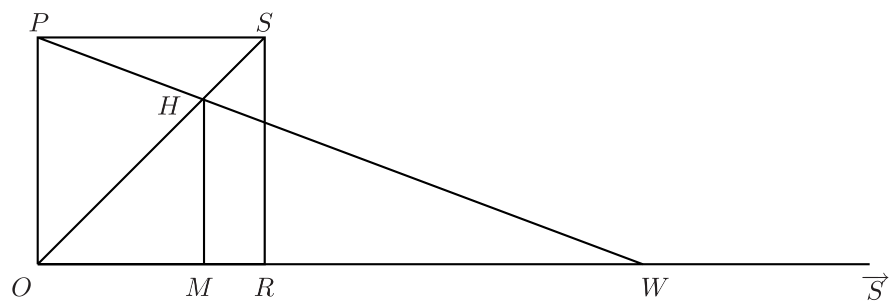
   En efecto, construya la recta y la semicircunferencia como se indica en la figura, la correspondencia es la siguiente: Dado un punto P de la recta, trace el segmento $\overline{OP}$ que une el centro de la semicircunferencia con P, el punto de corte es el que le corresponde a P por esta asignación.



6. Es posible emparejar todos los puntos de una semirecta con los de un segmento de recta [8].

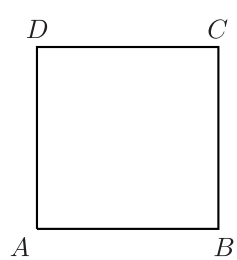
En efecto, sean $\overrightarrow{S}$ la semirrecta y $\overline{OR}$ el segmento; por el punto $\overline{O}$ trácese un segmento $\overline{OP} \perp \overline{OR}$, constrúyase el rectángulo $\square OPSR$ y la diagonal $\overline{OS}$

Tómese un punto $M \in \overline{OR}$, y trácese el segmento perpendicular $\overline{MH}$ a en donde $H \in \overline{OS}$. A continuación prolónguese el segmento de recta $\overline{PH}$ hasta el punto W de la semirrecta , de esta forma se asigna a cada punto de $\overline{OR}$ uno y sólo uno de $\overrightarrow{S}$; similarmente, si W es un punto cualquiera de $\overrightarrow{S}$, devolviéndose puede verse que, existe una y sólo una imágen de W en $\overline{OR}$

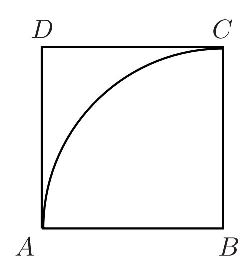


7. En la obra: "*Diálogo relativo a dos nuevas ciencias*", Galileo Galilei propone la hoy denominada **Paradoja de Galileo**, de la siguiente manera:

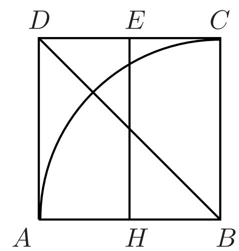
i) Trace el cuadrado $\square ABCD$



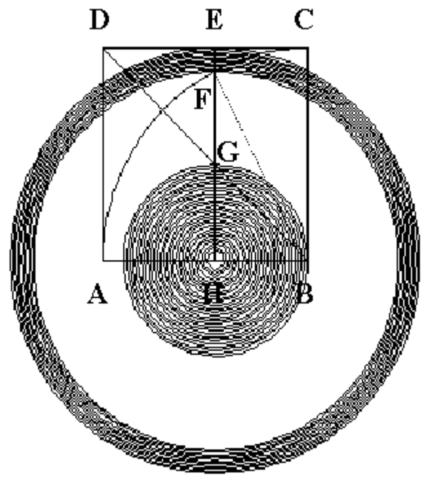
ii) Haciendo centro en B trace el arco de circunferencia $\overline{AC}$.



iii) Trace sobre $\overline{AB}$ una recta perpendicular $\overline{HE}$ y la diagonal $\overline{BD}$.



iv) Haciendo centro en H, trace las circunferencias de radios $\overline{HG}$, $\overline{HF}$ y $\overline{HE}$.



Por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$\overline{BF}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{HF}^2 \tag{1}$$

pero $\overline{BF} = \overline{BC}$ y $\overline{BC} = \overline{HE}$; luego

$$\overline{BF} = \overline{HE} \tag{2}$$

Por otra parte, por el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{HG}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

pero $\overline{AD} = \overline{AB}$ ya que $\square ABCD$ es un cuadrado. De donde,

$$\overline{HG} = \overline{HB} \tag{3}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), tenemos que: $\overline{HE}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{HF}^2$
luego $\overline{HG}^2 = \overline{HE}^2 - \overline{HF}^2$
de donde $\pi\overline{HG}^2 = \pi\overline{HE}^2 - \pi\overline{HF}^2$

$$\begin{pmatrix} \text{Área de la circunferencia} \\ \text{con centro en } H \text{ y radio } \overline{HG} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Área de la corona circular} \\ \text{con centro en } H \text{ y radios } \overline{HF} \text{ y } \overline{HE} \end{pmatrix}$$

Cuando H tiende a B, la circunferencia tiende a un punto y la corona se reduce a la circunferencia de radio $\overline{BC}$. Luego,

¡ Un punto es igual en área a una circunferencia !

Los ejemplos anteriores muestran claramente que los conceptos clásicos sobre el infinito, la longitud, el área, la relación entre una totalidad y sus partes, y el uso de procedimientos finitos pero potencialmente infinitos, no eran suficientes para dar una interpretación racional a ciertos hechos geométricos.

Las paradojas de Zenón.

Uno de los temas de mayor controversia entre los griegos fue el relativo a la relación que existe entre lo discreto y lo continuo. Los números enteros representan objetos discretos y una razón conmensurable representa una relación entre dos colecciones de longitudes que admiten una unidad de medida común, de manera que cada una de ellas es una colección discreta de unidades; sin embargo, las longitudes en general no son colecciones discretas de unidades y este es el motivo por el que aparecen las razones de longitudes inconmensurables. En otras palabras, longitudes, áreas, volúmenes, tiempo y otras cantidades son continuas.

Este problema de la relación entre los discreto y lo continuo fue puesto en evidencia por el más destacado discípulo de Parménides, Zenón de Elea, quien alrededor del año 445 a.C., propuso un cierto número de paradojas; cuatro de ellas tratan del movimiento, y pretendían indicar que el movimiento o el cambio en general es imposible, y en general, que la "realidad" es una entidad singular sin cambios, además, se deseaba refutar a los pitagóricos quienes creían en unidades extensas pero indivisibles [6].

En la época en que vivió Zenón, había dos concepciones opuestas del espacio y del tiempo. Una, que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo, y la otra, que el espacio y el tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento consistiría en una sucesión de minúsculos saltos espasmódicos. Los argumentos de Zenón están dirigidos contra ambas teorías y parten de la siguiente hipótesis fundamental : El tiempo y el espacio pueden ser cada uno e independientemente el uno del otro, finitamente divisibles o infinitamente divisibles; de donde resultan entonces cuatro posibilidades:

1. **Paradoja de Aquiles y la Tortuga (tiempo y espacio infinitamente divisibles)** "Si el movimiento existe, lo más lento [la tortuga] nunca será alcanzado por lo más rápido [Aquiles], pero como esto es imposible, el movimiento no existe" ([6]).

   En efecto, cualquier distancia que deba ser recorrida por un móvil, por ejemplo la que hay entre Aquiles y la tortuga, puede ir dividiéndose en dos partes y hay tiempo suficiente para recorrer la primera parte; como las dos magnitudes son infinitamente divisibles Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

   Aquiles-vs-Tortuga

   En otras palabras, Zenón establece que sobre la hipótesis de que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles el movimiento sería imposible.

2. **Paradoja de la Flecha (espacio finitamente divisible y tiempo infinitamente divisible**) como el espacio es finitamente divisible la flecha en su movimiento ocupará el lugar que sigue en la dirección en que se mueve en un tiempo T. Como el tiempo es infinitamente divisible entonces existirá un tiempo $T' < T$, durante el cual la fecha desapareció por que no existía un lugar que pudiera ocupar. Por lo tanto como el movimiento existe no podemos asumir que el espacio es finitamente divisible y el tiempo infitamente indivisible.

3. **Paradoja de la dicotomía (espacio infinitamente divisible y tiempo finitamente divisible)** en este caso se tiene la situación dual de la anterior: Si un móvil parte de un lugar hipotético A en el instante

T, como el tiempo es finitamente divisible habrá un instante siguiente T' en el cual el movil ocupará un lugar B. Como el espacio es infinitamente divisible existirá un lugar C entre A y B por el cual tuvo que pasar el móvil; pero esto no se dió porque no hubo tiempo para que sucediéra. Nuevamente como el movimiento existe no podemos asumir que el espacio es infinitamente divisible y el tiempo finitamente divisible.

4. **Paradoja "del Estadio" (tiempo y espacio finitamente divisibles)** Un atleta A se mueve en una carrera en una sierta dirección y otro atleta C se meve en la misma dirección pero en sentido opuesto y con igual velocidad. Un tercer atleta B que permanece inmovil describe el movimiento de A y C en la siguiente forma:

   En el tiempo mínimo T , A y C se desplazaron una distancia mínima D. Ahora bien, A y C describen el movimiento de B de la siguiente forma: B se desplazó en el tiempo mínimo T la distancia mínima D.

   A no puede entender el movimiento de C y C tampoco puede entender el movimiento de A, en efecto C respecto de A se mueve dos veces la distancia mínima D en el tiempo mínimo T, lo cual es absurdo, porque no hubo tiempo para recorrer la distancia D.

   En consecuencia no es posible que el tiempo y el espacio sean finitamente divisibles, pues de lo contrario el movimiento relativo no existiría, y como todo movimiento es relativo, no existiría entonces el movimiento.

A
B
C

A	$\leftarrow$			
		B		
			$\rightarrow$	C

Por los problemas planteados a través de sus paradojas, Zenón es considerado como uno de los precursores de las matemáticas del infinito, con ellas afloran varios problemas cruciales para la matemática: El de lo infinitesimal, el del infinito, el de la continuidad, el del movimiento y otros más, los cuales han sido tratados posteriormente por muy destacados matemáticos, siendo uno de los primeros Karl Weierstrass en el siglo XIX, modernamente por Abraham Robinson (de la Universidad de Yale) en la década del sesenta del siglo XX, y por otros como Bolzano, Cauchy, Dedekind y Cantor en el siglo XIX. Aunque los argumentos de Zenón pueden ser interpretados como argumentos contra el movimiento, también es posible interpretarlos como argumentos en contra de la concepción analítica del espacio y del tiempo; es decir los argumentos de Zenón estarían señalando que no es posible representar el espacio como constituído por puntos yuxtapuestos y el tiempo como constituido de instantes sucesivos.

Los planteamientos de Zenón tuvieron grandes consecuencias en el desarrollo del pensamiento matemático, entre ellos el evitar utilizar representaciones matemáticas para interpretar el mundo físico, especialmente el movimiento. Esta separación se mantuvo hasta la obra fundamental de Galileo que fue precedida 18 siglos por Arquímedes. Tal alejamiento entre matemáticas y mundo real fue uno de los principales factores que condujeron al estancamiento de la matemática en la Edad Media.

Las Paradojas y la crisis de la matemática deductiva.

A finales del siglo XIX y principios del XX el problema de la fundamentación de la matemática estaba al orden del día, posiblemente en alguna de las ideas en las que existía unanimidad era la de concebir los objetos matemáticos como "dados" a los cuales no se les pueden atribuir propiedades arbitrarias, situación similar a la que sucede con algunos fenomenos de la naturaleza que tienen que ser aceptados y no pueden ser modificados por los científicas, un problema que generaba y aún genera grandes debates entre los matemáticos es el concerniente al concepto de "verdad" en matemáticas. Henri

HENRI POINCARE (1854-1912)

Poincaré, considerado como "*el último universalista*", reconocía en 1902 que los axiomas de la geometría son convenciones para las que la noción habitual de "*verdad*" carece de sentido [12]. De hecho se ponía en evidencia que el concepto de "*verdad matemática*" y la noción usual de "*verdad*" son dos entes distintos ya que mientras el primero (de acuerdo a la forma de pensar de muchos matemáticos con Hilbert a la cabeza) reside únicamente en la deducción lógica a partir de premisas fijadas arbitrariamente por los axiomas, el segundo es una convención sustentada en la experiencia secular de la humanidad que se apoya principalmente en observaciones y persepciones, y que como se sabe éstas son falibles.

El surgimiento de paradójas, fue uno de los principales factores que propició una herida a esta noción de "*verdad matemática*" aceptada por Hilbert y en general los partidarios de la corriente filosófico-matemática denominada el *formalismo*. En 1926 F.P.Ramsey puso en evidencia que existen dos tipos de paradojas : las lógicas o matemáticas, y las linguísticas o semanticas [5]. Las primeras surgen de construcciones puramente matemáticas y las segundas de la consideración del lenguaje que empleamos para hablar de matemáticas y lógica.

Las paradojas linguísticas o semánticas.

Algunas paradojas semánticas son las siguientes:

La Paradoja de Platón y Socrates

Platón: La próxima declaración de Sócrates será falsa.
Sócrates : ¡Platón ha dicho la verdad!.

La Paradoja de Epiménides

Epiménides : ¡Todos los cretenses son mentirosos! Sabemos que Epiménides es cretense. ¿Decia Epiménides la verdad?

La Paradoja del Cocodrilo y la Mujer

Un cocodrilo le arrebató un bebé a una mujer y le dijo: Cocodrilo: ¿Voy a comerme a tu niño?. Responde correctamente y te lo devolveré ileso.

La Madre: ¡Ay Ay Ay! Te vas a comer a mi hijito.
Cocodrilo: Humm.... si te devuelvo el bebé, lo que has dicho será verdadero; lo cual no es cierto.
La Madre: Si te comes el bebé, no habría contestado correctamente, lo cual no es cierto, así que tienes que devolvérmelo ileso [7].

Paradoja del Quijote

Sancho Panza se convierte en gobernador de la ínsula de Barataria, en donde por ley, toda persona que llega a esta ínsula, debe explicar el motivo de su viaje. Si la persona dice la verdad, es puesta en libertad; si la persona miente, deberá ser colgada. Una persona llega a Barataria y afirma: "Estoy aquí para que me cuelguen" [7].

¿Será o no colgada esta persona?
No se puede tomar una desición, ya que si la frase es falsa, entonces debe ser colgado, lo cual implica que la frase es cierta.
Por otra parte, si la frase es cierta entonces deberá ser colgado, pero esto solo sucede si la frase es falsa, lo cual es una contradicción.

Paradoja del Abogado
Un abogado concertó con sus alumnos que deberían pagarle por sus enseñanzas, si y sólo si, ganaban su primer caso ante los tribunales; y no debían abonar nada si lo perdían. Uno de sus discípulos que había terminado sus estudios, resolvió evitar aceptar ningún caso para de esta forma eludir el pago. El abogado lo demandó para que le pagara.

¿Pagará o no el alumno?
Si el alumno paga es porque perdió el caso y por lo tanto no ha ganado su primer caso lo cual lo exonera del pago. Si el alumno no paga es porque el

resultado lo favoreció y por lo tanto ganó su primer caso, lo cual lo obliga a pagar.

Paradoja de los Alcaldes.

Supongamos que en un país se crea una ciudad que es habitada solo por alcaldes de municipios del país, mediante ley aprobada por el congreso se establece que todo alcalde sólo puede vivir en su propia ciudad o en la ciudad de los alcaldes. Como todo municipio debe tener un alcalde, la pregunta es: ¿En dónde vive el alcalde de la ciudad de los alcaldes?.

Hay dos posibilidades:

1. Que el alcalde viva en su propia ciudad, en este caso vivirá en la ciudad de los alcaldes, pero esto implica que el alcalde no vive en su propia ciudad.

2. Que el alcalde no viva en su propia ciudad, en este caso vivirá en la ciudad de los alcaldes que es precisamente su propia ciudad.

Como podemos darnos cuenta ambas soluciones nos conducen a contradicciones.

La Paradoja del Barbero

Fue popularizada por Bertran Russell [10] en 1918, su argumento es el siguiente:

El barbero de un pueblo, presumiendo de no tener competencia se anuncia diciendo que el no afeita a aquellos que se afeitan a si mismos, pero sí afeita a todos aquellos que no se afeiten a si mismos. Un buen día alguien le pregunta si él debería afeitarse a sí mismo.

Si se afeita a sí mismo entonces por la primera parte de su afirmación, no debería afeitarse a sí mismo; pero si no se afeita a sí mismo, entonces por la segunda parte debería afeitarse a sí mismo.

Paradoja de Richard

La primera paradoja semántica moderna es la denominada paradoja de Richard [13]; fue formulada por Jules Richard en 1905; pero Berry y Russell dieron una versión simplificada de la misma; fundamentalmente lo que dice esta paradoja es lo siguiente:

Existen muchos números reales que se pueden describir con frases en castellano; por ejemplo:

Nª	***Algunas frases empleadas para mencionarlo***
3	Tres.
$\sqrt{2}$	Raíz cuadrada de dos.
$\frac{3}{5}$	Tres quintos.
$\sqrt[3]{7-\sqrt[4]{5}}$	Raíz cúbica de siete menos raíz cuarta de cinco.
π	La longitud de una circunferencia sobre su diámetro.
e	El límite cuando n tiende a infinito de uno más uno sobre n, elevado a la n.

Llamemos:

$$A = \{a \in \mathbb{R} \mid \alpha \text{ se puede describir con una frase en castellano}\}$$

Existen números reales que no están en A. Por ejemplo:

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

en donde los b_n son números aleatorios.

Veamos que A es numerable:

Tomemos las 27 letras del alfabeto más el caracter que indica un espacio entre dos palabras. Con estos 28 caracteres podemos escribir cualquier frase y en particular las frases que caracterizan cada elemento de A.

Asignemos a estos 28 caracteres un número natural impar, de la siguiente manera:

Código	Número	Código	Número
a	1	o	29
b	3	p	31
c	5	q	33
d	7	r	35
e	9	s	37
f	11	t	39
g	13	u	41
h	15	v	43
i	17	w	45
j	19	x	47
k	21	y	49
l	23	z	51
m	25	ñ	53
n	27	$\sqcup$	55

Vamos a hacer corresponder a cada número A un único número natural de la siguiente forma:
Sea por ejemplo $\alpha = \sqrt{2}$ la frase que le corresponde es:

raíz $\sqcup$ cuadrada $\sqcup$ de $\sqcup$ dos

De acuerdo al código anterior, tenemos que los números de los caracteres que corresponden a esta sentencia son en su orden:

35 1 17 51 55 5 41 1 7 35 1 7 1 55 7 9 55 7 29 37

Luego el número natural que le hacemos corresponder a $\sqrt{2}$ es:

$$2^{35}\ 3^{1}\ 5^{17}\ 7^{51}\ 11^{55}\ 13^{5}\ 17^{41}\ 19^{1}\ 23^{7}\ 29^{35}\ 31^{1}\ 37^{7}\ 41^{1}\ 43^{55}\ 47^{7}\ 53^{9}\ 59^{55}\ 61^{7}\ 67^{29}\ 71^{37}$$

En general, si un número A está representado por una frase cuyos caracteres corresponden en su orden a los números:

$$m_1 m_2 \ldots m_k \ldots mr$$

a le hacemos corresponder el único número natural:

$$n = 2^{m_1} 3^{m_2} \dots P_k^{m_k} \dots P_r^{m_r}$$

en donde P_k es el k-ésimo número primo.
Si $\mathcal{U}$ es el conjunto de todas las frases, tenemos que a cada frase le corresponde un único número natural :

$$2^{m_1} 3^{m_2} \dots P_k^{m_k} \dots P_r^{m_r}$$

Además, como la descomposición de un número natural como producto de primos es única (teorema fundamental de la Aritmética), entonces, si un número natural es la imagen de una frase, por esta asignación no puede existir otra frase que tenga como imagen dicho número. Luego en particular se tiene que la aplicación:

$$\begin{aligned} \Phi : A &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \alpha : &\longrightarrow \Phi(\alpha) = n_\alpha \end{aligned}$$

es inyectiva y por lo tanto A es numerable. De donde,

$$A = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots$$

Sabemos que cada m puede expresarce en la forma:
$\alpha_m = ab_{m1}b_{m2} \dots b_{mm} \dots$ en donde $b_{mk} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{Z}$.
Construyamos el siguiente número:

$$\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{10^k}$$

en donde,

$$ck = \begin{cases} 1 \text{ si } b_{kk} = 0 \\ 0 \text{ si } b_{kk} \neq 0 \end{cases}$$

como $\delta \neq \alpha_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$, entonces $\delta \notin A$.
Por otra parte, de acuerdo con la construcción de , podemos decir que este número se puede describir con una frase en castellano, por lo tanto A, lo cual es una contradicción.

Paradoja de Grelling.

Esta paradoja semántica fue enunciada por primera vez en 1908 por Kurt Grelling (1886-1941) y Leonard Nelson (1882-1927), consiste en lo siguiente: *Un adjetivo es autológico si se describe a sí mismo, en caso contrario se dirá que es heterológico. Por ejemplo: Corto es una palabra corta, por lo tanto es autológico; polisilábico es una palabra polisilábica, por lo tanto es autológico; castellano es una palabra en castellano por lo tanto es autológico; autológico es una palabra autológica.*

¿Es heterológico un adjetivo heterológico?.

Si heterológico es heterológico, es porque no se describe a si mismo, pero la palabra heterológico significa que no se describe a sí mismo, luego heterológico se describe a sí mismo, lo cual es una contradicción.

Si heterológico es autológico es porque se describe a sí mismo, pero ser heterológico significa que no se describe a sí mismo, siendo esto también una contradicción.

Paradoja de Berry

Esta paradoja fue presentada en 1908, y consiste en lo siguiente:
Dado un número natural, existen varias formas de mencionarlo; por ejemplo:

Nª	***Algunas frases empleadas para mencionarlo***
3	*Tres.* *El primer primo impar.* *El segundo número impar.* *Es el único primo que divide a nueve.*
2	*Dos.* *El primer primo.* *El único primo que divide a todo número par.*
1729	*Mil setecientos ventinueve.* *El menor número que se puede expresar como suma de dos cubos en dos formas distintas.* $(1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3)$.

Tomemos las 27 letras del alfabeto más el caracter que indica un espacio entre dos palabras. Con estos 28 caracteres podemos escribir cualquier frase y en particular las frases que caracterizan cada número natural.
Hagamos la siguiente asignación para cada número natural n.

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow f_n$$

En donde f_n es el menor número de caracteres que producen una frase que caracteriza al número n. Si

$$A = \{n \mid f_n \geq 100\}$$

entonces $A \subseteq \mathbb{N}$ y $A \neq \emptyset$. Luego existe m tal que $m = minA$, esto es:

m es el menor número natural que requiere mínimo cien caracteres para describirlo.
Pero esta frase caracteriza a m y tiene menos de 100 caracteres (76 para ser más precisos), lo cual es una contradicción ya que f_m 100, pero como $m \in A$ $f_m \geq 100$.

Como puede verse, muchas de estas paradojas, están enmarcadas dentro de las denominadas paradojas del "mentiroso" que ha sido objeto de muchas reflexiones en la lógica formal y que consiste en tratar de saber si un hombre que dice "yo miento" está o no diciendo la verdad al pronunciar estas palabras.

Las Paradojas lógicas o matemáticas.

Entre las paradojas lógicas o matemáticas, están los debidas a los denominados conjuntos paradójicos. Un conjunto paradójico, es aquel que el admitir su existencia conduce a paradojas.

Paradoja de Burali-Forti

El primer ejemplo de un conjunto de este tipo fue dado el 28 de Marzo de 1897 por el matemático italiano Cesare Burali-Forti (1861-1931) quien la presentó en un encuentro del Círculo Matemático di Palermo [13], en pocas palabras la paradoja es la siguiente:

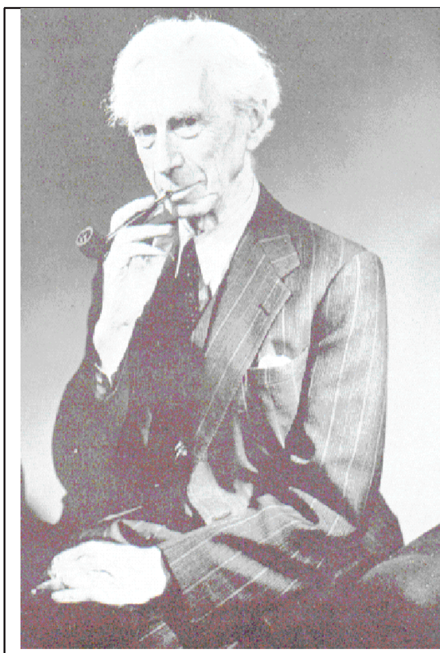
Se sabe en teoría intuitiva de conjuntos, que todo conjunto bien ordenado tiene un número ordinal; en particular, como el conjunto de todos los ordinales es bién ordenado, entonces debe tener un ordinal, digamos σ, pero el conjunto formado por todos los ordinales agregandole σ, tiene ordinal $\sigma + 1$, que es mayor que σ, por lo tanto σ no puede ser el número ordinal del conjunto de todos los ordinales ya que σ y $\sigma+1$, no cumplen la ley de tricotomía.

Paradoja de Cantor

Otro ejemplo de un conjunto paradógico es la denominada paradoja de Cantor. En 1899, en una carta que envió Cantor a Dedekind, observa que no puede hablarse del "*conjunto de todos los conjuntos*", ya que si Ω fuese este conjunto entonces el conjunto $\wp(\Omega)$ de todos los subconjuntos de Ω sería un elemento de Ω, es decir:

$$\wp(\Omega) \in \Omega$$

entonces existe m tal que 2^m, lo cual es una contradicción [13].



BERTRAND RUSSELL

(1872-1970)

Despues del surgimiento del axioma de Regularidad en la Teoría de Conjuntos (1917) puede emplearse el siguiente argumento:

Como $\wp(\Omega) \in \Omega$ y $\Omega \in \wp(\Omega)$ entonces $\Omega \in \Omega$, lo cual contradice el axioma de regularidad.

Paradoja de Russell

La paradoja de Russell tiene la siguiente historia [4]:

El lógico alemán Gottlob Frege (18481925) consideraba: "*los matemáticos deben de hacer frente a la posibilidad de encontrar una contradicción que convierta el edificio completo en ruinas. Por esta razón me he sentido obligado a volver a los fundamentos lógicos generales de la ciencia ...*". Es así como se dedicó durante un cuarto de siglo a construir la fundamentación conjuntista del análisis, con tal fin elaboró un sistema formal que intentaba servir como fundamento de las matemáticas. Este sistema se sostenía en dos principios:

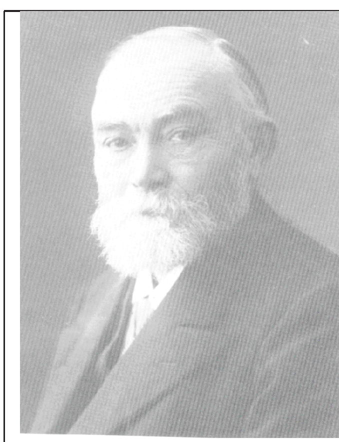
1. *Principio de Extensionalidad: Dos conjuntos son iguales si poseen los mismos elementos.*

2. *Principio de Abstracción: Toda propiedad define un conjunto.*

Sus ideas fueron plasmadas en dos extensos volumenes. En 1902 ya había publicado el primero y el segundo estaba en la imprenta listo para ser publicado, cuando recibió una carta del joven matemático inglés Bertrand Russell (1872-1870) en la que le planteaba la siguiente inquietud:
Si x es, por ejemplo, el conjunto de los conjuntos que no son cucharas, $x \in x$, pero si x es el conjunto de todas las cucharas, evidentemente x no es una cuchara y por lo tanto $x \in x$.
Sea el siguiente conjunto:

$$P = \{x \mid x \notin x\}.$$

Si x es, por ejemplo, el conjunto de los conjuntos que no son cucharas, $x \in x$, pero si x es el conjunto de todas las cucharas, evidentemente x no es una cuchara y por lo tanto $x \notin x$ [3].
Si $P \in P \Rightarrow P \notin P$ lo cual es una contradiccìon. Si $P \notin P \Rightarrow P \in P$ lo cual también es una contradicción.
Esta paradoja que presentó Russell, convertía en contradictoria las bases mismas de la obra científica de Frege.



GOTTLOB FREGE
(1848-1925)

En un gesto de gallardía y de humildad científica, Frege escribió una nota a pie de página al final del segundo volumen que comenzaba diciendo:

"Dificilmente puede encontrarse un científico con algo más indeseable que notar que ceden los fundamentos de una obra que acaba de terminar. En esa situación me encuentro al recibir una carta del señor Bertrand Russell cuando el trabajo estaba casi en imprenta"

Realmente lo que demuestra la paradoja de Russell es que el principio de abstracción es falso, y es este aspecto el que hace contradictório el sistema de Frege, aunque la forma como construyó el análisis no lo fue.

La causa de muchas de estas paradojas, como señalaban Russell y Whitehead [6], radica en la definición de un objeto en términos de una clase que contiene como elemento al objeto que se está definiendo. Tales definiciones se llaman impredicativas y aparecen de manera especial en teoría de conjuntos.

Como afirman Kasner y Newmann: "*Quizás la mayor de todas las paradojas es que haya paradojas en la matemática*" [2]. Afortunadamente para esta ciencia, las paradojas siempre han estado presentes en su quehacer, ellas se han convertido en un verdadero reto, fuente de inspiración y creación, que le ha permitido adquirir no sólo un alto grado de desarrollo, sino también la ha obligado a cambiar sus conceptos de rigor y precisión, !bienvenidas sean las paradojas!.

Lecturas Recomendadas

[1] I.Kleiner-N.Movshovitz, *The Role of Paradoxes in the Evolution of Mathematics*, Amer.Math.Monthy 688, December (1994).

[2] E. Kasner-J. Newmann, *Paradoja Perdida y Paradoja Recuperada*, SIGMA El Mundo De Las Matemáticas, Volumen Quinto, Barcelona, 1979.

[3] B.Russell, *La evolución de mi pensamiento filosófico*, Alianza Editorial, Madrid, 1976.

[4] J. de Lorenzo, *Gottlob Frege*, Grandes matemáticos, Investigación y Ciencia, Temas 1, Barcelona, 1995.

[5] P.Suppes, *Teoría Axiomática de Conjuntos*, Editorial Norma, Cali, 1968.

[6] W.I.McLaughlin, *Una Resolución de las Paradojas de Zenón*, Investigación y Ciencia, pp.62-68, Enero, 1995.

[7] B.H.Bunch, *Matemática insólita*, Paradojas y Paradojismos, Editorial Reverté,s.a., Barcelona, 1987.

[8] E.P.Northrop, *Paradojas Matemáticas*, EUnión Tipográfica Editorial Hispano Americana, S.A.,C.V., México, 1991.

[9] R. Rodríguez, *Enjambre Matemático*, Editorial Reverté, S, A., Barcelona, 1988.

[10] D.M. Burton, *The History of Mathematics*, (Second Edition), Wm.C.Brown Publishers,

[11] V.J. Katz, *A History of Mathematics*, (Second Edition), ADDISON-WESLEY, New York, 1998.

[12] C.Cañon, *La Matemática creación y descubrimiento*, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid,1993.

[13] C.H.Sanchez,*Surgimiento de la teoría de conjuntos*, Segundo Colóquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, Diciembre de 1985.