RAZONAMIENTOS LÓGICO-DEDUCTIVOS

Iván Castro Chadid.
Profesor Titular
Pontificia Universidad Javeriana
ivan.castro@jol.net.co

Las demostraciones de tipo Científico Experimental por lo general obedecen a la siguiente secuencia:

a) Se propone una hipótesis para explicar un fenómeno de la naturaleza.

b) Si las observaciones del fenómeno corresponden a la hipótesis, se convierten en evidencia a su favor.

c) Si después de llevar a cabo experimentos para poner a prueba el poder de predicción de la hipótesis se observa que continúa teniendo éxito, entonces hay aún más evidencia para respaldarla.

d) Si la cantidad de evidencia es muy grande, la hipótesis es aceptada como teoría científica.

Veamos a continuación algunos ejemplos de aplicación de este método para resolver algunos problemas de geometría.

Primer Ejemplo:

Dado un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1, empleando el método experimental científico determine cuánto mide la diagonal

Solución:

1. Tome un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1; divida cada cateto por la mitad y trace la curva poligonal que está sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo, como se indica en la figura . Es claro que la longitud de esta curva es 2.

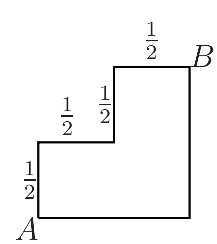


Figura 1

2. Nuevamente divida cada cateto en cuatro partes iguales y trace la curva poligonal que está sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo, como se indica en la figura. Es claro que la longitud de esta curva también es 2.

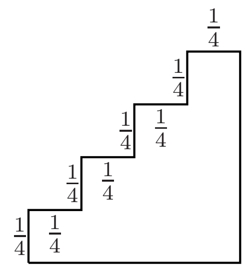


Figura 2

3. Nuevamente divida cada cateto en ocho partes iguales y trace la curva poligonal que está sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo, como se indica en la figura. Es claro que la longitud de esta curva también es 2.

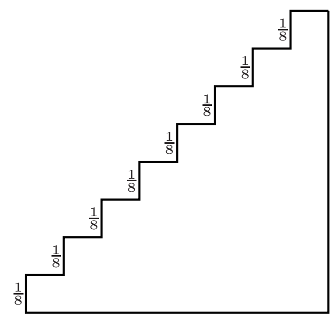


Figura 3

4. Continúe dividiendo cada cateto en $16, 32, 64, \ldots$ partes iguales y trace la curva poligonal que está sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo, en forma similar a la de los casos anteriores. Es claro que para cada uno de los casos la longitud de esta curva también es 2.

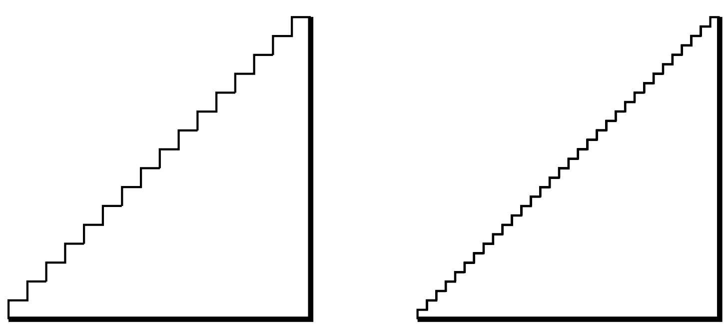
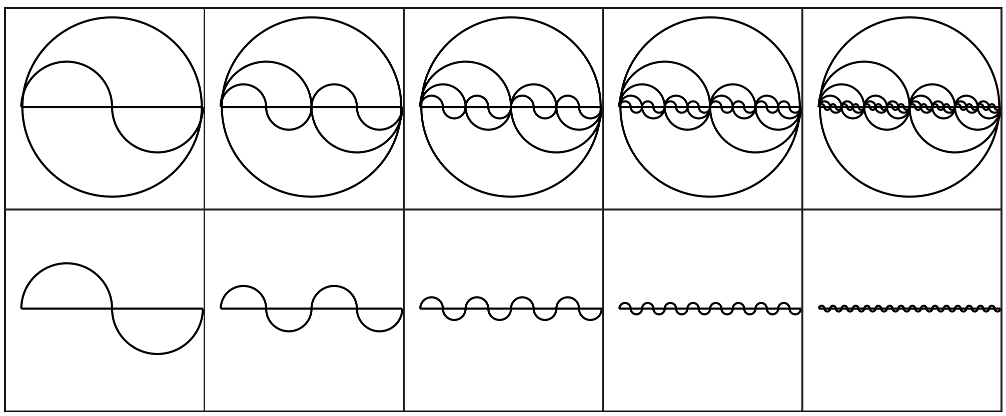


Figura 4

A medida que se va tomando la partición más fina la curva poligonal va tendiendo hacia la diagonal del triángulo y a la vez su longitud siempre es 2, por lo tanto la tanto empleando el método experimental científico puede afirmarse que:

¡ la diagonal del triángulo mide 2 !.

Segundo Ejemplo:



Sobre el diámetro de una circunferencia de radio 1, se construyen dos semicircunferencias de radio 1/2 como se muestra en el primer cuadro de la figura; sobre el diámetro de cada una de estas semicircunferencias se construye dos semicircunferencias de radio 1/4 como se indica en el segundo cuadro; en forma análoga se continúan construyendo semicircunferencias de radios 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, ... , como se muestra en la figura, las cuales van dando origen a las curvas del segundo nivel del dibujo. De esta forma se obtiene una sucesión de curvas constituidas por semicircunferencias conectadas siendo la longitud de cada una de ellas π, luego la curva límite también medirá π, y se confundirá con el diámetro de la circunferencia de partida que es 2, por lo tanto empleando el método experimental científico se ha demostrado que:

$$¡\ \pi = 2\ !$$

Como podemos darnos cuenta en estos dos ejemplos, las demostraciones de tipo científico experimental dependen de la observación y de la percepción, las cuales **son falibles y sólo suministran una aproximación a la verdad**.

En general se opera en forma similar al sistema judicial, ya que se asume que una teoría es verdadera si hay suficiente evidencia para aceptarla "más allá de toda duda razonable".

Parece innegable que los griegos fueron los primeros en concebir la matemática como un sistema de conocimientos orgánico, consistente, irrefutable y tendiente a la universalidad. Su gran legado a la teoría del conocimiento fue el habernos enseñado que las demostraciones matemáticas no dependen de la evidencia tomada de la falible experimentación, sino que se sustenta en procesos lógicos deductivos y una vez comprobadas son verdaderas para siempre. Para muchos científicos, la ciencia griega no tiene otro interés que el histórico, mientras que la matemática griega es fundamental en la formación de cualquier matemático de nuestra época. Harold Godfrey Hardy, llamaba a los matemáticos griegos, *"colegas de otro colegio"*.

La demostración matemática, es absoluta y libre de duda, debido fundamentalmente al hecho que toda teoría matemática se desarrolla de una manera ordenada, coherente y lógica, paso a paso, a partir de unos axiomas previamente establecidos (método deductivo); los cuales tienen las siguientes características:

a) Son completos, es decir, toda proposición válida en esa teoría admite una prueba a partir de estos axiomas.

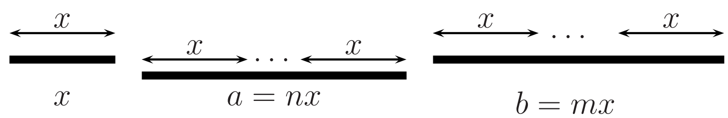
b) Son consistentes, es decir, a partir de estos axiomas no se pueden derivar teoremas contradictorios.

c) Son independientes, esto es, ninguno de los axiomas es consecuencia de los otros.

De ahí, que universalmente se reconozca que la principal aplicación de la matemática se da en la formación mediante su método científico de sujetos capaces de observar, analizar y razonar, como paso previo para la obtención de mentes creativas y analíticas.

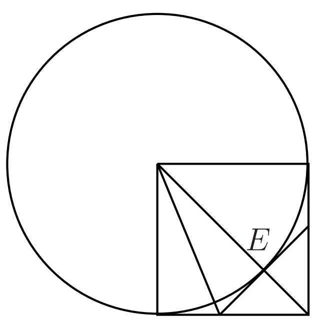
Veamos como se demuestra, a la manera griega, con el uso exclusivo de la regla y el compás, que la longitud del triángulo del primer ejemplo no puede ser 2.

Se dice que dos segmentos a y b son conmensurables, si existe un tercer segmento x tal que $a = nx$ y $b = mx$ para algunos enteros positivos n y m.



Si $\sqrt{2}$ fuera racional, entonces existirían α y β números enteros tales que $\sqrt{2} = \frac{\alpha}{\beta}$, luego la diagonal del cuadrado de lado 1 es conmensurable con el lado del cuadrado ya que el segmento x de longitud $\frac{1}{\beta}$ mide tanto al segmento unidad $(1 = \beta x)$, como al segmento $\sqrt{2}(\alpha x = \sqrt{2})$.

Veamos a continuación que para cualquier cuadrado su diagonal no es conmensurable con el lado.



Supongamos que no. Entonces existe un cuadrado $\square ABCD$ tal que su diagonal AC y su lado AB son medidos por el segmento x.

Tracemos una recta perpendicular a AC a través del punto E tal que $AE = AB$.

Existen m n naturales tales que $AB = mx$ y $AC = nx$ luego $EC = (n - m)x$.

Los triángulos rectángulos $\triangle ABF$ y $\triangle AEF$ son semejantes porque tienen un cateto igual $AB = AE$ y la hipotenusa AF común. Luego $BF = FE$.

Por otra parte el $\triangle CEF \approx \triangle CBA$ ya que $\angle E = \angle B = \angle 90^\circ$ y $\angle C$ es común; entonces $EC = FE$ (porque $AB = BC$). De donde $BF = EC$ y por lo tanto $FC = mx - (n - m)x = (2m - n)x$.

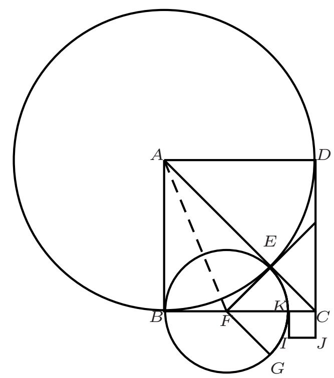
Llamemos $n_2 = (2m - n)$ y $m_2 = n - m$. Es claro que $0 < n_2 < n$. Construimos el cuadrado de lado $EC = m_2 x$ y diagonal $FC = n_2 x$.

Procediendo en forma similar a como lo hicimos con el cuadrado $\square ABCD$ tenemos que es posible construir un cuadrado $\square IJKC$ sobre la diagonal FC del cuadrado $\square EFGC$ tal que $IC = m_3 x$ y $JC = n_3 x$ con m_3 y n_3 naturales y además $0 < n_3 < n_2$.

Este proceso puede continuar indefinidamente y en particular se va generando una sucesión infinita decreciente de números naturales,

$$n > n_2 > n_3 > \ldots > n_k > \ldots$$

lo cual es una contradicción, ya que toda sucesión decreciente de números naturales tiene un elemento mínimo.



La demostración de la no-conmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado, se le atribuye a Hipasus de Metaponto, uno de los discípulos de Pitágoras quién vivió en el año 450 a.C.; la leyenda no le reserva un final feliz rodeado de sus nietos, sino una muerte violenta al ser arrojado al mar por divulgar el resultado fuera de la secta. Si bien es cierto, nosotros podemos resignarnos a la no conmensurabilidad de la diagonal y el lado del cuadrado, los griegos no podían hacerlo ya que habían construido una vasta teoría de los movimientos de los planetas, así como también una explicación racional de las relaciones individuales y sociales y una teoría musical que se fundamenta en que todas estas relaciones se regían por cocientes de enteros.

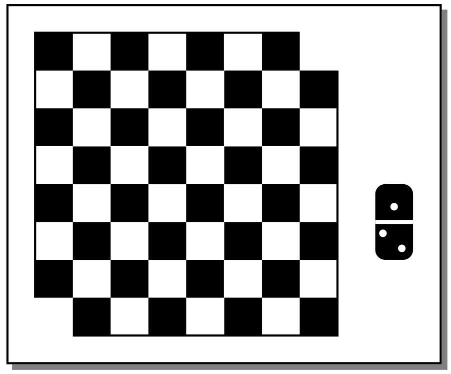
Demostraciones de no-solubilidad

El poder demostrar que un problema no tiene solución a menudo no es una labor sencilla, debido a que se tiende a confundir el que no se haya podido encontrar la solución a un problema con que el problema no sea soluble.

Casi en todas las ciencias existen problemas abiertos para los cuales no se ha podido demostrar si son, o no, solubles y muy pocos son los que se les a podido probar que son insolubles, esto es, que los intentos de solucionarlos conducen a una contradicción. Veamos el siguiente ejemplo ilustrativo:

A un tablero de ajedrez se le han quitado dos esquinas opuestas, de tal forma que quedan tan sólo 62 cuadros, se tienen además 31 fichas de dominó cada una de las cuales puede cubrir exactamente dos cuadros del tablero.

¿Es posible cubrir con estas 31 fichas los 62 cuadros que quedan?.



Solución:

a) *Empleando el método experimental científico:*

Ensaye una disposición de las fichas; si esta no le funciona, ensaye otra; si nuevamente no le funciona ensaye otra distinta y continúe así sucesivamente.

Después de realizar este proceso muchas veces descubrirá que todas fallan; este hecho le permite plantearse la hipótesis: el problema no tiene solución.

Si después de llevar a cabo procesos similares, para poner a prueba el poder de predicción de la hipótesis, se observa que continúa teniendo éxito, entonces hay aún más evidencia para respaldarla.

Si la cantidad de evidencia es muy grande, respaldada en la imposibilidad de resolver el problema después de que mucha gente haya hecho muchos ensayos, ninguno con éxito, entonces existe suficiente información para aceptar la hipótesis como científicamente válida, aunque quede siempre la duda acerca de su fiabilidad, ya que existen millones de posibles arreglos y por lo limitado de la vida humana tan sólo es posible explorar una pequeña fracción de ellas.

b) *Empleando razonamientos lógico-deductivos:*

Se han suprimido dos cuadros blancos en el tablero de ajedrez, por lo tanto quedan sólo 30 cuadros blancos y 32 cuadros negros.

Por otra parte, cada ficha de dominó cubre un cuadro blanco y uno negro, independiente de la forma horizontal o vertical en que se coloque en el tablero.

Por lo tanto, cualquier arreglo de las 30 primeras fichas cubre 30 cuadros blancos y 30 negros, quedando una sola ficha y dos cuadros negros; pero esa ficha no puede cubrir estos dos cuadros negros, lo cual es una contradicción. De donde podemos concluir que,

¡el problema no tiene solución!.

La analogía en matemáticas.

La analogía ha sido una de las principales herramientas que ha empleado el hombre en la búsqueda de la interpretación científica del universo; las investigaciones sobre los orígenes de la matemática se centran principalmente en los trabajos desarrollados por los pueblos caldeo-asirio y egipcio y en ellos el razonamiento por analogía es el fundamental.

La compenetración con el razonamiento analógico es tan grande, que si observamos con detenimiento hasta las rutinas que realiza a diario cualquier ser humano, obedecen en muchos casos a razonamientos por analogía. Ante una situación especifica usualmente recurrimos a la memoria para contrastarla con experiencias anteriores y buscar posibles soluciones por analogía.

Así por ejemplo, cuando una persona se coloca al frente de un espejo con el fin de peinarse, esta viendo una imagen suya y no se esta viendo a sí mismo (porque esto es imposible); a continuación realiza la operación de peinarse y cuando considera que la imagen que esta viendo queda de una manera aceptable de acuerdo a su criterio, por analogía acepta que él también quedó bien.

El pensamiento analógico es tan fuerte, que en muchas ocasiones respondemos en forma refleja. Por ejemplo cuando nos dicen: *"La mamá de Luis tiene cinco hijos, el mayor se llama Pa, el segundo Pe, el tercero Pi, el cuarto Po, ¿Cómo se llama el quinto?.* Es natural que por analogía tendamos a decir que se llama Pu.

Uno de los más grandes historiadores de la matemática Eric Temple Bell sostenía: *"La matemática desprecia la simple inventiva y busca basarlo todo en principios generales. El matemático moderno partiendo de un mínimo de hipótesis busca las soluciones de un problema particular como ejemplo de una teoría general unificada con respecto a algún concepto o a algún método de aplicación universal. Una solución aislada obtenida por algún ingenioso artificio indica probablemente una comprensión incompleta, en vez de testimonio de perspicacia. . . "*; este es el método que se emplea generalmente para resolver problemas en matemáticas, haciendo acopio no sólo de razonamientos lógico deductivos, sino también, como sucede en todas las ciencias, de la analogía siendo esta una de las más valiosas herramientas en la construcción del conocimiento matemático.

Resumiendo: Dado un problema particular observando otros problemas análogos se construye un problema general del cual éste es un caso particular y lo que se busca es resolver el problema general. Veamos a manera de ejemplo el siguiente problema:

En cierta comunidad hay gente de bien (la mayoría) y gente que no es de bien (una pequeña minoría), como lo que se quiere es que esta situación se corrija ¿que debe hacerse?.

En la búsqueda de una posible solución una gran cantidad de personas propone que *se elimine la gente que no es de bien.*

El problema que se ha planteado no es sino un caso particular del siguiente problema general:

En cierta comunidad hay gente que cumple la condición P (la mayoría) y gente que no cumple la condición P (una pequeña minoría), como lo que se quiere es que esta situación se corrija ¿qué debe hacerse?.

Por analogía con la solución del caso particular entonces *se debe eliminar la gente que no cumple la condición P.*

Aquí empieza a cuestionarse esta posible solución ya que son muchas las condiciones P aceptadas como positivas por la gran mayoría y que obviamente no cumple una pequeña minoría, como por ejemplo: Tener las mismas creencias religiosas, tener los mismos intereses políticos, tener los mismos intereses culturales, no ser obeso, no ser terco, no tener alto el ácido úrico y muchas más.

Al escribir este problema en lenguaje matemático quedaría de la siguiente forma:

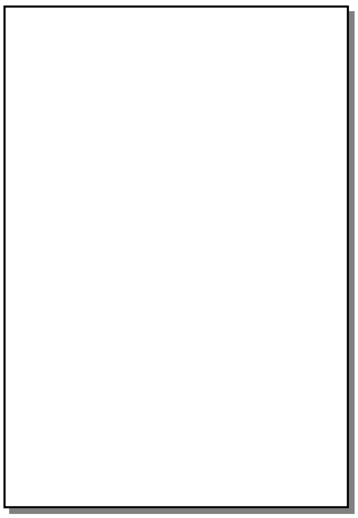
Sean:

U	El conjunto de todas las condiciones P aceptadas como positivas por la mayoría de los miembros de la comunidad.
H_P	El conjunto de todos los que satisfacen la condición P

Entonces los únicos que sobrevivirían serían los que estén en el conjunto:

$$\bigcap_{P\in U} H_P$$

Para tener una idea de cuantos pueden ser los posibles sobrevivientes veamos este otro problema:



Diremos que un ser humano es interesante si tiene una cualidad o un defecto que lo hace distinto a los demás. Similarmente un ser humano es corriente si no es interesante.

¿Son los seres humanos interesantes o corrientes?

En efecto sean:

$I = \{x \mid x$ es ser humano y x es interesante$\}$

y

$C = \{x \mid x$ es ser humano y x es corriente $\}$

Si α la persona más anodina del mundo (es decir la más corriente), entonces tiene una característica que la distingue de todos los demás, luego $\alpha \in I$.

Sacamos a α de C; entre los elementos que quedan debe haber un β que es el más corriente de todos, entonces tiene una característica que la distingue de todos los demás luego $\beta \in I$.

Podemos continuar así sucesivamente hasta agotar todos los elementos del conjunto C, llegando de esta forma a demostrar que todos los seres humanos somos interesantes.

De lo anterior se desprende que para cada ser humano existe una condición P que satisface "la mayoría" pero que él no la satisface. Por lo tanto el conjunto

$$\bigcap_{P \in U} H_P$$

no tiene elementos lo cual implica que todos los miembros de esa comunidad serán eliminados. Por lo tanto **no es posible aceptar como válida la solución que se propone**.

En general, dado una situación P si lo que se quiere es que no se presente su negación, **el enfoque científico** en la búsqueda de la solución del problema nos orienta hacia la investigación de las causas que hacen que se produzca la negación de P y son esas causas las que se deben combatir.

LECTURAS RECOMENDADAS

R.Courant-H.Robbins, ¿Qué es la Matemática?, Aguilar, Madrid, 1958.

F. Cajori, A History of Mathematics, Chelsea Publishing Company, New York, 1980.

R. Rodríguez Vidal, Enjambre Matemático, editorial reverté, Barcelona, 1988.

E. Northrop, Paradojas Matemáticas, Union Tipográfica Editorial Hispano-Americana, S.A., México,1991.

W.R. Knorr, The ancient tradition of geometric problems, Dover Publications, Inc, New York, 1986.

B.Bold, Famous Problems of Geometry, and How to Solve Them, Dover Publications,Inc. New York, 1969.

Simon Singh El último teorema de Fermat, Grupo Editorial Norma, Bogotá,1999.