Algunos documentos concernientes a la ecuación de Riccati

Alberto Campos
Profesor Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
acampos@matematicas.unal.edu.co

Aparecen a continuación los documentos que corresponden a lo que me había comprometido a desarrollar en el XIV Encuentro de Geometría, en un cursillo los días 19, 20 y 21 VI 2003. Ellos son:

- Observaciones acerca de ecuaciones diferenciales de segundo orden, por el conde Jacobo Riccati. 1724. Acta Eruditorum. 66 - 73.
- Anotaciones al escrito precedente, por Daniel Bernoulli. Acta Eruditorum. 73 - 75.

Para entender a Riccati y a Bernoulli se hizo indispensable dar algunas indicaciones (tomadas del libro de Edwards) acerca del cálculo con diferenciales de primero y segundo orden; están en

- Cálculo diferencial, según Leibniz,

Por último aparecen algunos comentarios pertinentes a la comunicación de Riccati.

Dado que los Bernoulli intervienen tan de cerca en la investigación de Riccati, algunos de ellos se ocupaban ya de la ecuación cuando Riccati tenía apenas unos 18 años, determinaron cuándo ella es soluble, dieron el procedimiento para averiguar la solución, y, además, glosaron el escrito de Riccati; se aprovecha esta ocasión para transcribir datos atinentes a tan importante familia de matemáticos.

1. Cálculo Diferencial, Según Leibniz

La creación, 1672 - 1676, del cálculo diferencial de Leibniz, 1646 - 1716, es totalmente diferente a la, 1664 - 1666, de Newton, 1642 - 1728; los partidiarios del matemático y físico inglés que acusaban al matemático y filósofo alemán, mostraban no haber estudiado en serio a Leibniz.

La primera publicación pertinente, Nova methodus, de Leibniz, en Acta Eruditorum es de 1684; y la segunda (en la misma revista creada por Menken y Pfanz en 1682) es de 1686.

En 1687, aparece Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, de Newton. En 1704 aparece la Optica, donde hay un apéndice, De Quadratura, donde Newton aclara su método, veladamente presente en 1687.

En 1714, dos años antes de su muerte, Leibniz escribe Historia et origo calculi differentialis, cálculo "concebido no por accidente sino por un esfuerzo de meditación", "hace unos 40 años"anota al pasar el matemático y filósofo alemán.

En 1672, Leibniz principiando a fondo tanto su formación como su creación matemática había considerado sumas de diferencias de términos consecutivos de una secuencia de números. Así,

$$d_1 + \cdots + d_n = (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Por ejemplo, de la secuencia

$$0,\ 1,\ 4,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

se obtiene la secuencia de los números impares

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ 2n-1,\ \ldots$$

dado que $n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$, por allí mismo concluye que la suma de los n primeros impares es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = n^2.$$

Leibniz estudió con todo detalle el llamado triángulo de Pascal (que el filósofo y matemático francés había también estudiado pero que es muy anterior a él) lo cual quizá inspiró a Leibniz para idear una primera creación importante.

Christian Huygens (1629 - 1695) había sugerido a Leibniz hallar la suma de la serie formada con los recíprocos de los números triangulares. Leibniz comenzó por considerar los recíprocos de cada uno de los números naturales en una primera secuencia. Luego, una segunda secuencia no de sumas de términos consecutivos (como en el triángulo de Pascal) sino de diferencias.

Luego, escribe una secuencia de diferencias de términos consecutivos en la segunda secuencia. Y así indefinidamente.

Luego, se aplica a calcular sumas de las secuencias de diferencias.

Es así como llegó a lo que llamó el triángulo armónico. En particular halló el resultado solicitado por Huygens.

Para Leibniz el procedimiento que lo condujo a su triángulo armónico toma carácter de método.

En 1673, Leibniz conoce afortunadamente, también por conducto de Huygens, el escrito de Pascal, 1658, a partir de la lectura del cual, Leibniz va a inventar su triángulo característico, que es el inicio del cálculo diferencial en Leibniz, junto con su idea de las secuencias de diferencias, que hace posible un cálculo con diferenciales de orden superior.

Leibniz insiste al exponer su creación en la unidad de un proceso de tres etapas: Expresión de un problema en diferencias mediante el triángulo característico. Paso a una ecuación diferencial según las condiciones del enunciado. Solución de la ecuación diferencial por integración (Javier de Lorenzo. LXXV).

Diferenciales de Orden Superior

Leibniz considera una curva como un polígono de infinidad de ángulos formados por infinidad de lados muy pequeños, cada uno de los cuales coincide con una recta tangente a la curva.

A la curva son asociadas variables constituidas por secuencias de abscisas y secuencias de ordenadas de infinidad de vértices del polígono.

La diferencia de dos valores sucesivos de una abscisa x es la diferencial dx. Similarmente para la ordenada dy.

dx, dy aunque muy pequeñas, desechables respecto a x, y son siempre no nulas.

El producto de diferenciales, $dx\,dy$, o $(dx)^2$ es desechable respecto de las diferenciales dx, dy.

Hay una secuencia de diferenciales dx de abscisas, o una secuencia de diferenciales de ordenadas, dy, asociadas a la curva. Es la secuencia de diferencias de la secuencia de abscisas o de la secuencia de ordenadas.

Tales secuencias de diferencias tienen a su vez secuencias de diferencias cuyos elementos son los diferenciales de segundo orden

$$d(dx) = ddx = d^2x.$$

Semejantemente, d^2y es la diferencia de sucesivas diferencias de ordenadas.

En general,

$$\begin{aligned} d^kx &= d(d^{k-1}x), \\ d^ky &= d(d^{k-1}y). \end{aligned}$$

Iterativamente, d^kx, d^ky son desdeñables respecto de $d^{k-1}x$, o de $d^{k-1}y$.

Es supuesto que una diferencial de orden k, dx^k, es del mismo orden de magnitud que la potencia k de una diferencial de primer orden, es decir, $d^kx = (dx)^k$, $d^ky = (dy)^k$.

Así el cociente $\dfrac{d^ky}{(dx)^k}$ es un número real, salvo singularidades.

Con estos principios, se tienen cálculos como los siguientes:

- $d(x\,dy) = dx\,dy + x\,d^2y$.
- $d^2(x^n) = d(nx^{n-1}dx) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2 + nx^{n-1}d^2x$.
- $d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(dx)^2}$.

- $d^2(uv) = ud^2v + 2du\,dv + (d^2u)v = (d^0u)d^2v + 2du\,dv + (d^2u)d^0v.$
- $d^n(uv) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} (d^pu)(d^{n-p}v).$

En los cálculos de Leibniz con diferenciales, la elección de x como variable se hace con la suposición de que la secuencia de valores de x, o abscisas, está en progresión aritmética, de modo que dx es constante. Entonces $d^2x = 0$.

Se presentan algunos cambios en las fórmulas anteriores.

Así $d^2(x^n) = n(n-1)x^{n-2}(dx)^2$.

Igualmente $d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{(d^2y)(dx)}{(dx)^2} = \dfrac{d^2y}{dx}$.

Análogamente sucede si es la ordenada, y, la que es considerada como variable.

Edwards cita un artículo especializado de Bos [H. J. M. BOS. *Differentials, higher - order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus.* Arch. Hist. Exact Sci. XIV. 1-90, 1975] de donde transcribe la aplicación geométrica de los diferenciales de orden superior hecha por Juan Bernoulli, 1667-1748, de derivar la fórmula para el radio de curvatura en un punto de una curva. Bastará este ejemplo para entender el empleo de las diferenciales.

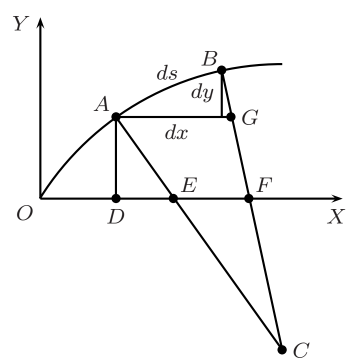


Figura: 1

Sean:

- OAB un arco de curva dada por una función por lo menos de clase C^3.
- O el origen del sistema de coordenadas.
- O, A, B puntos sobre la curva.
- CA perpendicular a la curva, es decir, a su tangente en A.
- CB perpendicular a la curva, es decir, a su tangente en B.
- $A = (x, y)$ donde x es la abscisa variable, y la ordenada.
- $r = CA$ el radio de curvatura en C.
- $ds = AB$ diferencial de la longitud de arco.

Entonces

- Las perpendiculares en A y en B se encuentran en C, centro de curvatura.
- El triángulo característico es el de lados dx, dy e hipotenusa ds.
- Por ser x variable, es dx constante y $d^2x = 0$.
- El triángulo característico es semejante al triángulo rectángulo ADE. Por lo tanto
$$\frac{dy}{dx} = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{y}$$
De donde $DE = y\dfrac{dy}{dx}$.
- $OE = OD + DE = x + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.
- EF es la diferencial de OE, por lo tanto:
- $EF = d(OE) = d\left(x + y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\right) = dx + \dfrac{(dy)^2 + y\,d^2y}{dx}$.

- $AG = \dfrac{(dx)^2 + (dy)^2}{dx}$.
- $EC = r - AE = r - \dfrac{y\big((dx)^2 + (dy)^2\big)^{1/2}}{dx}$.
- Los triángulos CEF y CAG son semejantes, por lo tanto
$$\frac{AG}{EF} = \frac{AC}{EC}$$
Al reemplazar en esta proporción los valores anteriores, se obtiene
$$\frac{\dfrac{(dx)^2 + (dy)^2}{dx}}{dx + \dfrac{(dy)^2 + y\, d^2 y}{dx}} = \frac{r}{r - \dfrac{y\big((dx)^2 + (dy)^2\big)^{1/2}}{dx}}.$$
De donde
$$r = -\frac{\big[(dx)^2 + (dy)^2\big]^{3/2}}{dx\, d^2 y}.$$
Al dividir por $-(dx)^3$ se obtiene la fórmula conocida para el radio de curvatura
$$r = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}$$

La fórmula tan laboriosamente obtenida por un Bernoulli (figura también en el trabajo citado de Brook Taylor) se obtiene expeditamente en geometría diferencial. (O'Neill. Elementary differential geometry. Pogorelov.)

Grosso modo, si
$$f(t) = (x(t), y(t)$$
es una parametrización de una curva plana, entonces, la curvatura, k, es dada por el producto cruz
$$k = \frac{||f' \times f''||}{||f'||^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{x''y' - x'y''}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Al tomar $y = y(x)$ como función y x como variable, es $x' = 1$, $x'' = 0$; por lo tanto, escogida convenientemente la orientación,

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

El radio de curvatura, fórmula obtenida antes, es el inverso de k.

2. Observaciones Acerca de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Autor: Conde JACOBO RICCATI. 1724

La reducción de ecuaciones diferenciales de segundo orden es generalmente tan complicada y embrollada que con mucha frecuencia puede esquivársele a un analista poco atento.

Mientras nos valemos de la vía sintética y ascendemos de las primeras fluxiones a las de más alto grado, al asumir como constante o una diferencia conocida o ninguna, aquellas dificultades que serán mencionadas luego, apenas si se presentan; hay, sin embargo, las que no pueden ser evitadas cuando es propuesto algún problema con otros principios involucrados y que haya que procederse por la vía analítica.

Que se dan infinitas expresiones diferencio-diferenciales, a las cuales se llega cuando ninguna constante se añade, nadie ciertamente lo ignora; que otras tantas puedan igualmente ser expuestas, a las que no es permitido acceder, a no ser que una constante sea traída en ayuda, no es un secreto para los más agudos analistas; en cuanto a cómo sea posible distinguir unas de otras y mediante qué método hayan de ser tratadas, no lo creo tan averiguado ni tan obvio; aunque no obstante sea tarea de la geometría más avanzada considerar atentamente hasta dónde y en qué circunstancias estas expresiones admitan solución.

Que haya, por ejemplo, que construir una curva tal que la potencia de cualquier abscisa sea directamente como la segunda diferencia de la ordenada, e inversamente, tal como la diferencia semejante de la misma abscisa, curva que es expuesta mediante una ecuación diferencial de segundo orden $x^m\,ddx = ddy$: afirmo que ninguna curva entre las posibles satisface a la cuestión, si se pasa de las primeras a las segundas fluxiones, sin que alguna primera diferencia sea tomada como una constante, ni fue de auxilio, conservando la igualdad, alterar de cualquier modo las ecuaciones mismas, o por adición de términos iguales o por substitución de valores: por el contrario, determinada una constante, son encontradas por lo menos curvas que cumplen la condición del problema, pero infinitas en número; dado que son cambiadas hacia la mutación de la constante arbitraria.

Expresiones subsiguientes a estas que bajo una forma incorrecta inducen a separarnos de las verdaderas y legítimas, se hacen manifiestas por una indagación más cuidadosa; con todo, propongo a los Matemáticos para su examen un criterio cierto, y en cuanto el tema considerado lo permite, general, el que al menos será de uso en todos estos casos en los que el cálculo integral no nos abandona.

Todas las ecuaciones diferenciales de segundo orden son reducidas a fórmulas implícitas con las solas primeras diferencias, ecuaciones a las cuales, se ha llegado, asumida o no una constante, y en las cuales se mezclan de cualquier modo segundas fluxiones con primeras y con magnitudes finitas, con tal de que una u otra de las indeterminadas fluentes con sus funciones no haga parte de la ecuación propuesta; lo mismo hay que decir de aquellas expresiones que puedan ser reducidas a una tal forma por alguna industriosa manera empleada: por lo demás, en los restantes, no abarcados por nuestro procedimiento, la habilidad de los analistas podrá extender algunos casos particulares; y si alguien inventara una regla general, él ciertamente sería para mí un gran Apolo.

Mientras tanto, hay que considerar la ecuación general

$$z\,dx = dy, \tag{A}$$

en la que están contenidas todas las fórmulas diferenciales de primer orden; la letra z designa una magnitud cualquiera dada por funciones de las coordenadas x, y.

Paso a diferencias mayores, sin asumir constante alguna, y resulta la ecuación

$$z\,ddx + dz\,dx = ddy, \tag{B}$$

la cual mientras tenga la misma expresión, no es integrada con ningún procedimiento.

Pero si se cambia la forma de la misma, al reemplazar valores a partir de la expresión (A), entonces, se origina una infinidad de fórmulas, que requieren un mayor artificio.

Busco un modelo entre los más sencillos: en lugar del mismo dx se substituye una cantidad igual $dy : z$ y se multiplica el primer término de la ecuación (B) por la potencia $z^m\, dx^m$, lo restante por el equivalente dy^m, de donde resulta una nueva ecuación

$$z^{m+1}\, dx^m\, ddx + dy^{m+1}\frac{dz}{z} = dy^m\, ddy. \tag{D}$$

De este modo, las fórmulas son expeditamente reducidas por obra de alguna constante, como para que se haga cuanto puede ser hecho, designo generalmente para hacer las veces de una constante a la fluxión dx/q, donde q es una magnitud cualquiera dada por indeterminadas x, y más constantes.

Sea $dx : q = dp$, cuando sea $dx : q$ constante, será igualmente dp constante.

De aquí que al pasar a las segundas diferencias en la ecuación $dx = q\, dp$, tendremos $ddx = dq\, dp$.

Si además pongo $dy = u\, dp$, tomadas las segundas diferencias con la misma hipótesis de ser dp constante, será $ddy = du\, dp$.

Substituidos en la expresión (D) los valores antes determinados y encontrados, se tendrá la ecuación

$$z^{m+1} q^m dq\, dp^{m+1} + u^{m+1}\frac{dz}{z} dp^{m+1} = u^m du\, dp^{m+1},$$

y al dividir por dp^{m+1},

$$z^{m+1} q^m dq + u^{m+1}\frac{dz}{z} = u^m du,$$

y al sumar según reglas comunes, sin omitir la adición de una constante g,

$$g + \frac{q^{m+1}}{(m+1)} = \frac{u^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}},$$

la ecuación queda

$$u = z\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

y dado que

$$dy = u\,dp = u\frac{dx}{q},$$

con una oportuna substitución, resulta la ecuación reducida

$$dy = z\frac{dx}{q}\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{E}$$

De este modo de operar fluyen naturalmente algunas consecuencias.

Si con determinada magnitud z, es construida una ecuación (E) por lo menos cuando puede ser hecho por cuadraturas, y las indeterminadas son separables, pienso que es claro que infinitas curvas responden a nuestra fórmula, pues la naturaleza de la curva resulta cambiada por el cambio de la constante $dx : q$, y cualquier valor de la cantidad q suministra una nueva ecuación local, ya sea algebraica, ya trascendente.

Aunque, al alterar el valor de la magnitud q se originen diversas curvas, también es cierto que con cualquier hipótesis entre ellas encuentra lugar, por así decirlo, la curva principal dependiente de la ecuación fundamental (A) $z\,dx = dy$; en efecto, si se hace nula la constante g, añadida al integrar, al punto la ecuación (E) pasa a ser la ecuación (A).

En este caso no tiene importancia qué diferencia $dx : q$ sea aceptada como constante, ya que al desaparecer g también la cantidad q desaparece.

Si la ecuación (E) es diferenciada de nuevo, no volverá a la forma (D) sino en dos casos: o haciendo $g = 0$ y procediendo a derivar una segunda vez sin asumir ninguna constante, multiplicados sin embargo los términos por cantidades equivalentes como se hizo más arriba; o una vez más diferenciando, determinado antes $dx : q$ como fluxión constante.

Uno y otro caso hacen patente la huella del análisis.

Por lo demás, la ecuación (E) una vez diferenciada, sin cumplir ni una ni otra condición, exhibe una fórmula totalmente diferente de la expresión (D) que había sido tomada para reducir.

Lo mismo en verdad sucede cuando se considera $dy : q$ como elemento constante; pues la operación mencionada igualmente al instituir el método, la que omito consultando la brevedad, devolvería a la ecuación reducida

$$dx = \frac{dy}{q}(mg + g)^{\frac{1}{m+1}}$$

que responde a nuestra fórmula (D), en lo cual hay algo que notar; que hecha $g = 0$ la constante añadida, aparece la expresión fundamental (A) $z\,dx = dy$.

Finalmente, de lo dicho es claro que puede colegirse que por la propuesta simple fórmula diferencial de segundo orden

$$z^{m+1}\,dx^m\,ddx + dy^{m+1}\frac{dz}{z} = dy^m\,ddy \tag{D}$$

pensaría en total dar satisfacción a un analista lo más exigente que se quiera, al observar que sería posible obtener esta expresión, o sin asumir constante alguna caso en el cual encuentra su lugar la ecuación integral $z\,dx = dy$, o al asignar como constantes las fluxiones $dx : q$, $dy : q$ y entonces las sumatorias serían

$$\begin{aligned} dy &= z\frac{dx}{q}\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}};\\ dx &= \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q}(mg + g)^{\frac{1}{m+1}}. \end{aligned}$$

Añadiría que la ecuación única $z\,dx = dy$, que diferenciada sin la ayuda de la constante se convierte en la ecuación (D), puede ser distinguida de las infinitas otras por el artificio arriba explicado, ya que siempre permanece la misma para cualquier suposición de la constante, cuando las demás, variada la constante, quedan sujetas a la mutación.

Resta por examinar si en otras expresiones y principalmente en la ecuación

$$x^m\,ddx = ddy \tag{F}$$

que responde al problema inicialmente propuesto se cumplan las condiciones asignadas para la mutación de la constante de modo que una vez diferenciada, sin asumir nada constante, restablezca, conservada la igualdad, la fórmula (F) al menos con términos adicionados o substraidos o con valores substituidos.

Hágase, pues, como de costumbre, $dx = q\,dp$, y será, debido a que dp es constante, $ddx = dq\,dp$.

Sea igualmente, $dy = u\,dp$, entonces, $ddy = du\,dp$. Al substituir, $x^m dq\,dp = du\,dp$, o, $x^m dq = du$, y al integrar, $\int x^m\,dq + g = u$; pero, $dy = u\dfrac{dx}{q}$, luego, $dy = \dfrac{dx}{q}\left(\int x^m\,dq + g\right)$.

Aquí observo que si se hace $g = 0$ y se reduce la última ecuación a una forma más sencilla, es a saber,

$$dy = \left(\int x^m\ dq\right)\frac{dx}{q},$$

cualquier valor de la misma q suministra una ecuación y una curva diferente, a no ser que se pusiera el exponente $m = 0$, lo cual trastorna la hipótesis en consideración.

Lo mismo hay que decir si se toma $dy : q$ como fluxión constante, de lo cual infiero que es vano buscar una ecuación diferencial de primer orden que pueda ser capaz de responder a lo pedido y restablecer la fórmula (F) $x^m\,ddx = ddy$, sin el auxilio de una constante; pues, si se diera tal ecuación, debería valer para cualquier suposición sobre la constante, en contra sin embargo de lo que muestra nuestro análisis.

Consta, pues que el problema propuesto consistente en encontrar una curva, en la cual una potencia dada de la abscisa sea siempre directamente como la segunda fluxión de la ordenada, y recíprocamente, como la fluxión semejante de la misma abscisa, no es posible resolverlo, si la curva buscada deba tener tal propiedad, tomadas las segundas diferencias sin determinación de ninguna constante, y por el contrario, hay infinitas curvas que satisfacen, si por lo menos se utiliza una constante.

No estará fuera del tema traer a cuento otro ejemplo y someter a examen la siguiente fórmula

$$x^m\,ddx = z\,ddx + dz^2 + z^2\,dz^2. \tag{G}$$

No estar cobijada por nuestra regla, se ve a primera vista que se puede colegir de que la ecuación contenga ambas indeterminadas con sus funciones:

verdaderamente si es $z\,dx = dy$, la nueva expresión

$$x^m\,ddx = ddy + dy^2 \tag{H}$$

resultante mediante substitución de acuerdo con las reglas explicitadas no rechaza una solución.

En primer lugar designo como constante 1 la diferencia dx, de donde se hace $ddx = 0$. Al desaparecer el término $x^m\,ddx$, queda $-ddy = dy^2$, o también $-ddy : dy = dy$, y al integrar $\log dx : dy = y$, o $dx : dy = 1^y$, esto es, $dx = 1^y dy$ y finalmente $dx : x = dy$, expresión que da el logaritmo corriente.

Si considero como constante la otra diferencia dy, hipótesis según la cual, siendo $ddy = 0$, será $x^m\,ddx = dy^2$.

Pongo $dx = s\,dy + c\,dy$, donde la constante c es o afirmativa o negativa y la variable s ha de ser determinada.

Al pasar a las segundas diferencias, se hace manifiesta la ecuación
$ddx = ds\,dy$.

Al substituir se obtiene $x^m\,ds = dy$; pero

$$dy = \frac{dx}{s+c};$$

por consiguiente

$$s\,ds + c\,ds = x^{-m}\,dx,$$

y al sumar, sin la inútil adición de la constante g,

$$\frac{s^2}{2} + cs = \frac{x^{-m+1}}{(-m+1)},$$

es a saber,

$$s + c = \sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{(-m+1)} + c^2} :$$

en estas condiciones

$$dx = (s+c)\,dy = dy\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{(-m+1)} + c^2};$$

por consiguiente,

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\dfrac{2x^{-m+1}}{(-m+1)} + c^2}}.$$

Me pregunto si el logaritmo hallado arriba al suponer dx constante, puede ser hallado igualmente con la suposición hecha en el párrafo anterior de que dy es constante.

Hecha igual a cero la constante c, hago el ensayo de si por casualidad la cantidad

$$\sqrt{\frac{2x^{-m+1}}{(-m+1)}}$$

pueda ser igual a la magnitud x.

Ya que a partir de ahí por cuadratura

$$2\frac{x^{-m+1}}{(-m+1)} = x^2;$$

por lo tanto

$$2x^{-m+1} = (-m+1)x^2,$$

y como debe ser la misma cantidad, igual tanto en el coeficiente, como en el exponente se sigue que no se llega a la igualdad sino poniendo $(-m+1) = 2$, caso en el cual es determinado el valor del exponente $m = -1$.

En la fórmula

$$x^m\, ddx = ddy + dy^2\,, \tag{H}$$

al limitar, como se dijo, el valor del exponente a $m = -1$, es posible llegar, en ese caso, a la ecuación

$$x^{-1}\, ddx = ddy + dy^2$$

sin asumir constante alguna, y la sumatoria de la misma en esa hipótesis es la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{x} = dy;$$

en efecto, al pasar a las segundas diferencias sin introducir constante, tendremos

$$\frac{ddx}{x} - \frac{dx^2}{x^2} = ddy,$$

pero

$$\left(\frac{dx}{x}\right)^2 = dy^2;$$

por lo tanto,

$$\frac{ddx}{x} = ddy + dy^2.$$

Ahora bien si el valor de la misma m no se hace igual a la cantidad negativa -1, de ningún modo es dado alcanzar la expresión (H), a no ser que alguna fluxión sea determinada como constante.

Para proceder de manera general, como se hizo ya antes, repito la ecuación

$$x^m\, ddx = ddy + dy^2\,. \tag{H}$$

Considero como constante el elemento

$$\frac{dx}{q} = dp,$$

e igualmente

$$dy = u\, dp,$$

con el fin de obtener de nuevo por diferenciación

$$ddx = dq\, dp;$$
$$ddy = du\, dp,$$

y al substituir

$$x^m\, dq\, dp = du\, dp + dy^2 = du\, dp + u\, dy\, dp,$$

y al dividir por dp

$$x^m dq = du + u\, dy;$$

pero

$$dy = u\,dp = u\frac{dx}{q};$$

por lo tanto

$$x^m\,dq = du + u^2\frac{dx}{q}\,.$$

El método general de separar variables en esta expresión, aunque la cantidad q sea dada de cualquier modo mediante funciones de la sola incógnita x, hay que considerar que no lleva a ninguna parte.

Advierto con todo, que si se toma el exponente $m = -1$, se obtiene un valor más sencillo de la indeterminada u igual a la fracción q/x; y que si este valor es puesto en el lugar de la misma u, todos los términos en la ecuación desaparecen.

Y puesta con este valor en la ecuación subsidiaria

$$dy = u\,dp = u\frac{dx}{q}$$

lleva a ésta a una logarítmica

$$dy = \frac{dx}{x}\,,$$

cualquiera que fuere la constante asumida expresada por la magnitud $\frac{dx}{q}$.

Así que es manifiesto que nuestro modo de operar acaba finalmente en la máxima dificultad de la separación de indeterminadas.

Desde hace algún tiempo me había propuesto arreglar esta dificultad y presenté un intento en el Diario Italico: me engaño empero, o una dificultad tan sutil, tan ardua, de la cual pende primordialmente la deseada perfección del cálculo de los infinitos, no puede ser adelantada sino por reunión de esfuerzos. Para estimular, pues, a los cultivadores de la geometría hacia un más profundo análisis, propongo el siguiente problema.

En la fórmula anterior

$$x^m\,dq = du + u^2\frac{dx}{q}\,,$$

dado como se quiera el exponente m, determinar la cantidad $q = x^n$. Pregunto cuál es el método para determinar valores del otro exponente n para que se produzca la separación de las indeterminadas, y la solución de la ecuación por solo cuadraturas.

3. Anotaciones de Daniel Bernoulli al Escrito de Riccati

Mi hermano Nicolás Bernoulli, estando en Italia, recibió estas observaciones acerca de ecuaciones diferenciales de segundo orden de parte del autor y las transmitió a mi Padre, a quien en nombre del autor rogó que se encargara de hacerlas llegar, junto con escritos suyos, las Actas de Leipzig.

Leídas las observaciones de Riccati, antes de ser enviadas, merecen de mi parte las siguientes anotaciones.

Correctamente sin duda asevera el ilustre Riccati que con muchísima frecuencia se integra trabajosamente, por el método llamado a priori, cuando a posteriori la integración se puede mostrar sin dificultad: pero, el ejemplo mediante el cual intenta probar aquello, al parecer no responde muy bien a lo que se propone: Esta es la ecuación direncio-diferencial que es aducida como ejemplo:

$$z^{m+1}\,dx^m\,ddx + dy^{m+1}\frac{dz}{z} = dy^m\,ddy\,, \tag{D}$$

la cual dedujo mediante algunas substituciones de la ecuación diferencial

$$z\,dx = dy.$$

Efectivamente, esta ecuación diferencial (D) de segundo orden no con mucha dificultad es reducida a priori a una ecuación simplemente diferencial, es a saber de este modo: La ecuación (D) equivale a ésta

$$dx^m\,ddx = dy^m z^{-m-1}\,ddy - dy^{m+1}z^{-m-2}\,dz,$$

la cual al poner

$$dy = q, \text{ y, } ddy = dq$$

(para que sea tanto más patente la integrabilidad de los términos) degenera en esta otra

$$dx^m\, ddx = q^m z^{-m-1}\, dq - q^{m+1} z^{-m-2}\, dz\,,$$

la cual integrada da

$$\frac{1}{m+1} dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} q^{m+1} z^{-m-1} + \frac{c}{m+1} dr^{m+1}$$

$\left(\text{por } c\dfrac{dr^{m+1}}{m+1}\right.$ entiendo una cantidad constante arbitaria homogénea con el resto de los $\left.\text{términos}\right)$ y por fin resubstituido en vez de q el valor dy se tendrá la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{1}{m} dx^{m+1} = \frac{1}{m+1} dy^{m+1} z^{-m-1} + \frac{c}{m+1} dr^{m+1}$$

o también

$$dx^{m+1} = dy^{m+1} z^{-m-1} + c\, dr^{m+1};$$

al hacer luego $c = 0$ y reducir la ecuación se tendrá

$$z\, dx = dy$$

(como había que hacer).

Se equivoca con todo por inadvertencia el ilustre Riccati, al tomar como equivalente la ecuación

$$\log dx : dy = y$$

a la ecuación

$$dx : dy = 1^y;$$

aquella es una ecuación logarítmica, esta otra es lineal, puesto que 1^y o sea la unidad elevada a cualquier potencia sea determinada sea indeterminada nada produce sino la unidad.

El autor pensó sin duda en que la ecuación

$$\log dx : dy = y$$

considerados los números de los logaritmos se convierte en esta

$$dx : dy = n^y,$$

donde por n no ha de entenderse ciertamente la unidad misma sino un número tal que su logaritmo sea la unidad, es así como al autor le acontece confundir la unidad con el número que tiene la unidad como logaritmo, número que designo por n.

Transforma posteriormente la ecuación

$$dx : dy = n^y$$

(en lugar de 1^y substituir siempre n^y) en esta

$$dx = n^y\, dy,$$

de la cual colige

$$dx : x = dy,$$

lo cual ciertamente es verdadero, pero es evidente que el esclarecido Riccati al formular tal consecuencia está suponiendo que

$$x = n^y,$$

que es ya la mismísima ecuación logarítmica, como hace algún tiempo lo mostró mi Padre, ver Act. 1697, p. 132, de donde es manifiesto que Riccati comete petición de principio, cuando supone que la ecuación es logarítmica, que es lo mismo que se propuso demostrar.

Pero en fin, hace ver el doctísimo Riccati cuán necesaria sea la doctrina de la separación de las indeterminadas, en el estudio de la cual fue asiduo y diligente y hemos oido decir se ejercita todavía no sin gran éxito; es más incita a los matemáticos con estímulos para que reuniendo esfuerzos abracen este trabajo que hay que adelantar.

Con este fin propone a los mismos un problema teniendo por digno el intentar su solución.

Mencionó mi hermano que él lo había resuelto; pero que a más de él hay otros solucionadores, pues descubrieron una solución mi Padre y mi primo

Nicolás Bernoulli, así como yo; en realidad no he visto los análisis de ellos, excepto lo pensado por mi Padre, que por la disposición de la operación y por el modo de proceder difiere de mi procedimiento.

Así cada uno de nosotros siga su propio método, coincidimos en los mismos valores para el exponente n, de donde sospecho que no se dan otros casos de separabilidad que los que por diversos caminos hemos detectado; añado una solución, sin embargo para no arrebatar a otros la ocasión de buscarla la envuelvo en caracteres ocultos, listo para revelar la significación, cuando sea tiempo.

Solución del problema del ilustre Riccati escondida en caracteres ocultos

24a,	6b,	6c,	8d,	33e,	5f,
2g,	4h,	33i,	6l,	21m,	26n,
16o,	8p,	5q,	17r,	16s,	25t,
32u,	5x,	3y,	+,	-,	—,
±,	=,	4,	2,	1.	

4. Algunos Comentarios a las Animadversiones de Riccati en 1724. (*Actorum Eruditorum Supplementa.* Tomo VIII. Sect II)

Estos son algunos comentarios, no de un especialista en historia de las ecuaciones diferenciales, sino de un lector que intenta entender la intención de Riccati al dar cuenta de sus investigaciones en la ecuación que lleva su nombre.

I. Así, por ejemplo, que quiere decir Riccati al explicar su ecuación

$$z\,dx = dy \tag{A}$$

cuando de ella dice: "ecuación universal en la cual están contenidas todas las fórmulas diferenciales de primer grado".

Lo primero que disuena respecto al lenguaje actual es que donde se espera *orden* se lea *grado*. En el resto de la memoria aparece uno u otro término indiferentemente. Era, tal vez, lo usual, dado que en el comentario, Daniel Bernoulli o el mismo Leibniz escriben también grado, donde posteriormente se emplea orden. Leibniz como los Bernoulli iba imponiendo la nomenclatura para la disciplina naciente. Es, pues, una traducción libre la que se ha hecho al emplear siempre orden, así el texto original diga grado, u orden.

Una segunda observación, se puede hacer sobre la frase que sigue a la frase transcrita. Dice: "con la letra z se designa una magnitud cualquiera dada mediante funciones de las coordenadas x, y, y". Esta observación aclara el adjetivo *universal* utilizado por Riccati, así como la presencia de las dos diferenciales en la fórmula (A). Quizás explica igualmente las dificultades a las que se enfrentaba Riccati, pues en términos actuales puede aseverarse que el propósito de Riccati era, en cierne, una ecuación diferencial parcial de primer orden, ya que no solamente están presentes las dos diferenciales dx, dy sino que hay además la declaración de que z es función de las dos indeterminadas.

Las dificultades tendrían que presentarse; en 1724, los matemáticos no tenían muy claro que sería una ecuación diferencial parcial.

Para enfocar mejor este punto puede leerse la memoria de Lützen, quien dedica la primera (247 - 256) de las tres partes de su artículo a la emergencia de ideas fundamentales para las ecuaciones diferenciales. Tiene lugar tal emergencia en el estudio del movimiento vibratorio de medios continuos. Hay diversas aproximaciones a su descripción pero el primero en hacer un tratamiento matemático fue Brook Taylor en 1713 y 1715. El análisis de Taylor habría llevado a una ecuación diferencial parcial de segundo orden; sin embargo, Taylor se desvía y llega una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Es posible que esa fuera la reacción natural ante una fórmula en derivadas parciales con la que no se sabría que hacer. Lützen anota que el procedimiento de Taylor es equivalente a buscar una solución mediante separación de variables.

Johann Bernoulli, 1727, quiso ver más claro en el análisis de Taylor; es, empero, su hijo Daniel Bernoulli quien logra el progreso siguiente, en dos memorias en 1733 y 1734, sin alcanzar todavía a formular su análisis en ecuaciones diferenciales parciales.

El nexo entre las conclusiones de Daniel Bernoulli desde el punto de vista físico y las de Euler en solución de ecuaciones diferenciales pertenece a Jean le Rond D'Alembert al formular la ecuación diferencial parcial del movimiento en 1743. Lützen afirma que tal ecuación de D'Alembert, es, "de hecho, la verdadera primera ecuación diferencial parcial en la historia de la matemática, inicialmente no tuvo notoriedad, probablemente porque D'Alembert no pudo hacer nada con ella". Pero, en 1746, el mismo D'Alembert, no solo formuló la ecuación de onda, una ecuación diferencial de segundo orden, sino que pudo resolverla, utilizando conocimientos entre otros de Euler, para el manejo de derivadas parciales. A partir de entonces, el estudio de ecuaciones diferenciales parciales ha ido siempre adelante y es actualmente una de las grandes ramas de investigación en matemática pura como en tantas aplicaciones de la matemática.

Ahora bien, la memoria de Riccati es 20 años anterior a los enunciados de D'Alembert. Las grandes dificultades de Riccati pueden, tal vez, ser manifestaciones de las incertidumbres de los matemáticos, hacia 1720, sobre el terreno donde se construiría posteriormente el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales.

II. Al diferenciar la ecuación (A) Riccati escribe la ecuación

$$z\,ddx + dz\,dx = ddy \tag{B}$$

"la cual, mientras se la considere así, no puede ser integrada" (traducción libre del texto de Riccati).

Qué quiere decir Riccati? Integrar una ecuación, ingenuamente, no es encontrar una función que diferenciada, sea la ecuación integranda? Pero, Riccati ha obtenido la ecuación (B) a partir de la ecuación (A).

III. A partir de la ecuación (A) utiliza varias veces $\dfrac{dy}{z}$ (que él nota siempre $dy : z$) en lugar de dx. Transforma la ecuación (B) por elevación de la ecuación $z\,dx = dy$ a la potencia m, e intercalación de los términos resultantes en la ecuación (B) hasta darle la forma (D) (no se sabe por qué no emplea la letra C, según el orden alfabético).

$$z^{m+1}\,dx^m\,ddx + \frac{dz}{z}(dy)^{m+1} = dy^m\,ddy. \tag{D}$$

Riccati practica una integración, para la cual se vale de lo que llama "tomar como constante una fluxión". Para el presente caso $dx : q$, donde q depende de las indeterminadas x, y. Escribe $dx : q = dp$. Es dp la que considera constante, de modo que escribe $dx = q\,dp$ y al diferenciar obtiene $ddx = dq\,dp$, sin calcular la segunda diferencial de p, porque la considera constante.

Similarmente escribe $dy = u\,dp$, de donde obtiene $ddy = du\,dp$.

Al substituir estas igualdades en (D) obtiene

$$z^{m+1}q^m dq\,dp^{m+1} + u^{m+1}dp^{m+1}\frac{dz}{z} = u^m dp^{m+1} du;$$

luego divide por dp^{m+1} pra llegar a

$$z^{m+1}q^m dq + u^{m+1}\frac{dz}{z} = u^m du.$$

Dice que integrando según reglas conocidas se tiene

$$g + \frac{g^{m+1}}{m+1} = \frac{u^{m+1}}{(m+1)z^{m+1}}$$

donde g es una constante. Efectivamente, al diferenciar esta última expresión se obtiene

$$(m+1)\frac{q^m}{(m+1)}dq = \frac{1}{(m+1)}\left[\frac{(m+1)z^{m+1}u^m du - (m+1)u^{m+1}z^m dz}{z^{m+1}z^{m+1}}\right];$$

hechas las simplificaciones del caso se restituye, la expresión que había sido integrada.

De la integral calculada, Riccati obtiene

$$u = z\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

y puesto que $dy = u\,dp = u\dfrac{dx}{q}$, finalmente escribe la ecuación

$$dy = z\frac{dx}{q}\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{E}$$

No se ve qué se proponía Riccati con estas manipulaciones, aunque trata de formular algunas consecuencias, de las que se puede pensar hubiera podido prescindir y pasar directamente a poner el problema que con su nombre será escrito en la historia de la matemática, problema formulado en las últimas 5 líneas de una memoria que se extiende sobre 8 páginas.

IV. Hacia la mitad de su comunicación, observa Riccati que pueden tenerse sendas expresiones para las diferenciales de primer orden, así

$$dy = z\frac{dx}{q}\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}},$$
$$dx = \frac{dy}{z} - \frac{dy}{q}(mg + g)^{\frac{1}{m+1}}.$$

La primera de estas expresiones es la misma que él ha llamado (E). La segunda, por el contrario, aparece inmotivada, como la diferencia de dos expresiones anteriores para dx, a saber, la que se desprende de la misma ecuación (A), y la que ha obtenido, unas líneas antes, cuando, como él mismo dice, "se considera $dy : q$ como elemento constante", mediante una operación cuyo desarrollo omite "consultando la brevedad".

V. La ecuación (F) es digna de mucha más atención: $x^m ddx = ddy$, "responde al problema inicialmente propuesto" y, de hecho, en los términos de Riccati, dado que una potencia de la abscisa, x^m, es igual a la segunda diferencial de la ordenada.

Riccati se propone examinar la ecuación (F) respecto de su método de asumir una fluxión como constante.

En realidad, trata de buscar una expresión para las primeras diferenciales dx, dy tales que al pasar a las segundas diferenciales, se tenga la ecuación (F).

Asume dp constante. Entonces, de $dx = q\,dp$, concluye que $ddx = dq\,dp$. Y de $dy = u\,dp$, concluye que $ddy = du\,dp$. Al reemplazar en (F) obtiene $x^m dq = du$. De donde

$$u = g + \int x^m\,dq.$$

Al regresar a la diferencial, dy, obtiene

$$dy = \frac{dx}{q}\left(g + \int x^m\,dq\right).$$

Si $g = 0$, es $dy = \dfrac{dx}{q} \int x^m \, dq$.

Concluye Riccati: “cualquier valor de q suministra una ecuación y una curva diferente”. Y luego “infiero que es vano buscar una ecuación diferencial de primer orden que pueda ser capaz de responder a lo pedido y de satisfacer la fórmula (F) $x^m ddx = ddy$”. En un párrafo más, Riccati declara no resoluble el problema de encontrar una curva tal que una potencia dada de la abscisa “sea siempre directamente como la segunda fluxión de la ordenada, tomadas las segundas diferencias sin determinación de ninguna constante, y, por el contrario, hay infinitas curvas que satisfacen, si por lo menos de utiliza una constante”. Posiblemente, hay que entender que satisfacen a la ecuación, pero no al problema que se propone resolver.

VI. Riccati trae a cuento otro ejemplo. Aparece escrita la ecuación

$$x^m ddx = z\, ddx + dz^2 + z^2 dz^2. \tag{G}$$

Sugiere que si se hace $dy = z\, dx$ se pasa de la ecuación (G) a la ecuación

$$x^m ddx = ddy + dy^2. \tag{H}$$

Pero, de $dy = z\, dx$, se obtiene,

$$ddy = dz\, dx + z\, ddx.$$

Al substituir esta igualdad, o en (H) no se llega a (G), o en (G) no se llega a (H).

Como Riccati va a trabajar sobre la expresión (H), se puede intentar una transformación, si se modifica la ecuación (G).

En efecto, si es

$$x^m ddx = z\, ddz + dz^2 + z^2 dz^2, \tag{G'}$$

entonces, haciendo $dy = z\, dz$ se halla

$$ddy = (dz)^2 + z\, ddz;$$

entonces, se puede pasar de (G) a (H):

$$x^m ddx = (z\, ddz + dz)^2 + \left(z^2\, dz^2\right) = ddy + (dy)^2.$$

VII. Riccati expone sus resultados con la ecuación

$$x^m ddx = ddy + (dy)^2 \tag{H}$$

Designa como "constante" a la indeterminada x. Según Edwards, en el cálculo con diferenciales, de Leibniz, la elección de x como variable independiente se hacía tomando la secuencia original para los valores de x en progresión aritmética; entonces la primera diferencial es constante y la segunda es cero.

Queda la ecuación $-ddy = (dy)^2$, que se puede escribir

$$-ddy : dy = dy.$$

La integral es $\log x : dy = y$. Efectivamente

$$\frac{d\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \frac{\dfrac{dy\,ddx - dx\,ddy}{(dy)^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = \frac{-\dfrac{dx\,ddy}{(dy)^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)} = -\frac{ddy}{dy}.$$

Riccati se permite pasar de $\log(dx : dy) = y$, primero, a $dx : dy = 1^y$, luego a $dx : x = dy$. Lo cual es criticado y enmendado en la nota de Daniel Bernouli que sigue a la comunicación de Riccati en Acta Eruditorum.

VIII. De nuevo Riccati da cuenta de cálculos que parecen extraviarse del problema que se ha propuesto. Más adelante, vuelve sobre la ecuación (H). Si $m = -1$ entonces $\dfrac{dx}{x} = dy$ satisface la ecuación (H).

IX. Si $m \neq -1$, de ningún modo es posible alcanzar, por diferenciación, la ecuación (H), a no ser que "alguna fluxión sea determinada como constante". Efectivamente, si $dx = q\,dp$, $dy = u\,dp$, donde dp es constante, entonces

$$x^m ddx = x^m dq\,dp = ddy + dy^2 = du\,dp + u\,dy\,dp,$$

de donde

$$x^m dq = du + u\,dy,$$
$$x^m dq = du + u^2\frac{dx}{q}.$$

Es decir, Riccati logra pasar de una ecuación en diferenciales de segundo orden a una en diferenciales de primer orden. Esta última ecuación es la que va a recibir su nombre, no la de segundo orden, con la que parece haber trasegado más.

X. **En resumen**, tal vez por haberse ocupado mucho tiempo de ellas (no hay otra herencia del mismo matemático italiano) destaca nueve ecuaciones diferenciales, solo la última es de veras interesante. De la ecuación

$$z\,dx = dy \tag{A}$$

pasa mediante diferencición a la

$$z\,ddx + dz\,dx = ddy. \tag{B}$$

Elevando los términos de la (A) a la potencia m e intercalándolos en la (B) obtiene

$$z^{m+1}dx^m ddx + dy^{m+1}\frac{dz}{z} = dy^m ddy. \tag{D}$$

Mediante su procedimiento de asumir una fluxión, dp, como constante, de $dx = q\,dp$, $dy = u\,dp$ logra pasar a la ecuación

$$z^{m+1}q^m dq + u^{m+1}\frac{dz}{z} = u^m du;$$

la cual, integrada, le permite hallar

$$u = z\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}}, \qquad g \text{ constante;}$$

de donde obtiene

$$dy = z\frac{dx}{q}\left(q^{m+1} + gm + g\right)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{E}$$

Ninguna de estas ecuaciones resuelve el problema que lleva entre manos.

Toma otra ecuación

$$x^m ddx = ddy, \tag{F}$$

que logra integrar, en parte, pero de manera que no resuelve el problema. De la ecuación

$$x^m ddx = z\,dxx + dz^2 + z^2dz^2, \tag{G}$$

mediante $z\,dx = dy$, no se puede pasar, como Riccati afirma, a

$$x^m ddx = ddy + (dy)^2. \tag{H}$$

Si, en cambio, se tiene

$$x^m ddx = z\,ddz + (dz)^2 + (z\,dz)^2, \tag{G'}$$

mediante $dy = z\,dz$, sí se puede llegar a (H).

Gracias a su procedimiento de tomar $dx = q\,dp$, $dy = u\,dp$, donde dp es considerada como una fluxión constante, Riccati logra llegar a la ecuación que lleva su nombre

$$x^m dq = du + u^2 \frac{dx}{q},$$

a la cual Daniel Bernoulli dio la forma conocida en los textos actuales como ecuación reducida de Riccati.

$$ax^m + u^2 = b\frac{du}{dx}.$$

XII. En cuanto a la nomenclatura es de anotar (para más detalles consultar el libro de Cajori) cómo escriben las ecuaciones Leibniz, los Bernoulli o Riccati. Nada más ilustrativo que la correspondencia, relativa, por cierto, a la ecuación de Riccati, antes de que éste se ocupara de ellas y les diera su nombre.

Desde Basilea, el 27 I 1697, escribe Jacob Bernoulli a Leibniz

"Pudiste ver recientemente en las Actas mi tratamiento de la ecuación

$$dy = y\,dx + x^n dx,$$

o mejor, una más general que esta, que tú escribes, haber también encontrado: quisiera pues saber de tu parte, si también hayas ensayado esta

$$dy = yy\,dx + x^n dx.$$

La transformé de mil maneras pero este duro problema escapó siempre a mis pesquisas".

Es de notar que se trata en verdad de una ecuación diferencial, es decir, escrita con diferenciales, lo cual puede explicar que se habla de grado o de orden indistintamente.

Jacob Bernoulli escribe yy en lugar de y^2, pero escribe x^n y no n veces x.

La segunda ecuación es, desde luego, la ecuación reducida de Riccati, así llamada unos años más tarde.

Leibniz escribe por el estilo. Desde Berlín, en abril de 1703, escribe a Jacob Bernoulli:

"Te agradecería que expliques cómo reduces

$$dy = yy\,dx + xx\,dx$$

a

$$ddy : y = xx\,dx\,dx,$$

y cómo resuelves

$$y^e ddy = x^v dx\,dx.$$

Pues prefiero aprender lo ya encontrado por egregios personajes, que buscarlo por mí mismo, sobretodo no estando seguro de encontrarlo".

Leibniz escribe yy en lugar de y^2, xx en lugar de x^2, $dx\,dx$ en lugar de $(dx)^2$, que frecuentemente escribían dx^2, con riesgo de confusión.

La primera ecuación citada por Leibniz es, desde luego, una particular de Riccati.

Jacob Bernoulli responde a Leibniz, desde Basilea, el 3 X 1703. La correspondencia entre estos ilustres matemáticos contiene amplias lecciones de las cuales apenas se citan aquí algunas líneas que tienen que ver con la ecuación de Riccati.

Ya fue subrayado que Leibniz pregunta a Jacob Bernoulli cómo había transformado la ecuación (una particular de las que se llamarán de Riccati)

$$dy = y^2 dx + x^2 dx$$

en una de segundo orden. Jacob Bernoulli había logrado, convertir la ecuación diferencial ordinaria de primer orden no lineal en una ecuación de segundo orden con indeterminadas separadas. He aquí la explicación de Jacob Bernoulli, en la escritura actual con diferenciales:

"La reducción de la ecuación

$$dy = y^2dx + x^2dx$$

a otra differencio–diferencial no tiene ningún misterio; escribo

$$y = -\frac{dz}{z\,dx}$$

Será

$$dy = \frac{dx(dz)^2 - z\,dx\,ddz}{z^2dx^2} = y^2dx + x^2dx = \frac{dz^2}{z^2dx} + x^2dx;$$

entonces (al multiplicar por z^2dx^2)

$$dx\,dz^2 - z\,dx\,dz = dx\,dz^2 + x^2z^2dx^3;$$

esto es,

$$-z\,dx\,ddz = x^2z^2dx^3,$$

o,

$$-\frac{ddz}{z} = x^2dx^2$$

la ecuación esperada, en la cual las indeterminadas están separadas".

Ha de ser tenido en cuenta, como ya antes, que si x es la variable, entonces $dx = 1$, $ddx = 0$.

Se ve en otro aparte de este trabajo sobre la ecuación de Riccati, que la transformación de Jacob Bernoulli es fácilmente generalizable de modo que transmute entre sí ecuaciones de Riccati de primer orden en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden, aunque no con indeterminadas separadas como es el caso cuando la ecuación de primer orden es la reducida.

Este nexo establecido por Jacob Bernoulli es importantísimo para establecer la relación entre ecuaciones de Riccati y ecuaciones de Bessel. Aparece convenientemente explicado en la teoría que aplica grupos de Lie al estudio de ecuaciones diferenciales.

En la misma carta de Jacob Bernoulli a Leibniz, 3 X 1703, aparece la solución en serie del mismo Bernoulli. Dice así:

"Reduzco la ecuación $dy = y^2dx + x^2dx$ a una fracción y expreso cada término mediante una serie, así

$$y = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3\cdot4\cdot7} + \frac{x^{11}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11} - \frac{x^{15}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15} + \frac{x^{19}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15\cdot16\cdot19} - \cdots}{1 - \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^8}{3\cdot4\cdot7\cdot8} - \frac{x^{12}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12} + \frac{x^{16}}{3\cdot4\cdot7\cdot8\cdot11\cdot12\cdot15\cdot16} - \cdots}$$

series que ciertamente pueden ser fundidas por división efectiva en una sola en la cual es difícil poner de manifiesto la razón de la progresión, a saber,

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3\cdot3\cdot7} + \frac{2x^{11}}{3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot11} + \frac{13x^{15}}{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot7\cdot11} + \cdots\text{"}$$

Hasta aquí la carta de Jacob Beroulli.

En carta posterior, 3 XII 1703, Leibniz le sugiere a Jacob Bernoulli, valerse de la ecuación de segundo orden a la que ha llevado la de Riccati para determinar allí los coeficientes de una serie solución.

XIII. Hay, en Watson, un comentario que tiene que ver con la solución en serie dada por Jacob Bernoulli: "Los matemáticos concentraban su energía en obtener soluciones en términos finitos, así que Jacob Bernoulli parece no haber recibido el crédito completo a que tenía derecho. Porque 20 años más tarde, ..., Daniel Bernoulli afirma que la solución de la ecuación

$$ax^ndx + u^2dx = b\,du$$

es todavía un problema no resuelto".

Quizá no sobre observar que la escritura con diferenciales era la más utilizada, por lo menos en el círculo de Leibniz. Parece haber sido así, hasta Lagrange quien destierra las diferenciales, por estar demasiado cerca de los infinitésimos, e introduce más sistemáticamente, el cálculo mediante derivadas.

Vale la pena anotar que el término fluxión, típico de Newton, aparezca en los escritos de los Bernoulli o de Riccati.

Bibliografía

[1] Daniel Bernoulli, Danielis Bernoulli, Joh. Fil. Med. Cand. *Notata in praecedens schediasma Ill. Co. Jocobo Riccati,* Actorum Eruditorum Supplementa, Tomo VIII, Sect. II, 73 - 75.

[2] Daniel Bernoulli, *Solutio Problematis riccatini propositi in Act. Lips. Suppl. Tom. VIII. p 73*, Acta Eruditorum Mensis Octobris, A. MDCCXXV, 473 - 475.

[3] Florian Cajori, (1859 - 1930), *A history of mathematical notations* (1928 - 1929), 1993, Dover.

Volume I. $xvi + 451$ pp. *Notations in elementary mathematics.*

Volume II. $xii + 367$ pp. *Notations mainly in higher mathematics.*

[4] Alberto Campos, *Acerca del estudio de ecuaciones de Bernoulli–Riccati mediante grupos de Lie*, 20 páginas. (No publicado)

[5] Alberto Campos, *Parte de la historia de la llamada ecuación de Riccati*, 9 páginas. (No publicado)

[6] Alberto Campos, *Grupo de Lie para una ecuación de Riccati generalizada*, 10 páginas. (No publicado)

[7] Alberto Campos, *Iniciación en el análisis de ecuaciones diferenciales mediante grupos de Lie*, (Prepublicación 1995), 260 pp.

[8] Alberto Campos, *Consideraciones epistemológicas acerca de la ecuación de Riccati*, 5 XI 8 2002, Cali, Primera Escuela Latinoamericana de Historia y Epistemología de las matemáticas, 15 páginas.

[9] C. H. Edwards Jr., *The historical development of the calculus*, (1979), 1982, Springer–Verlag, $xii + 351$ pp.

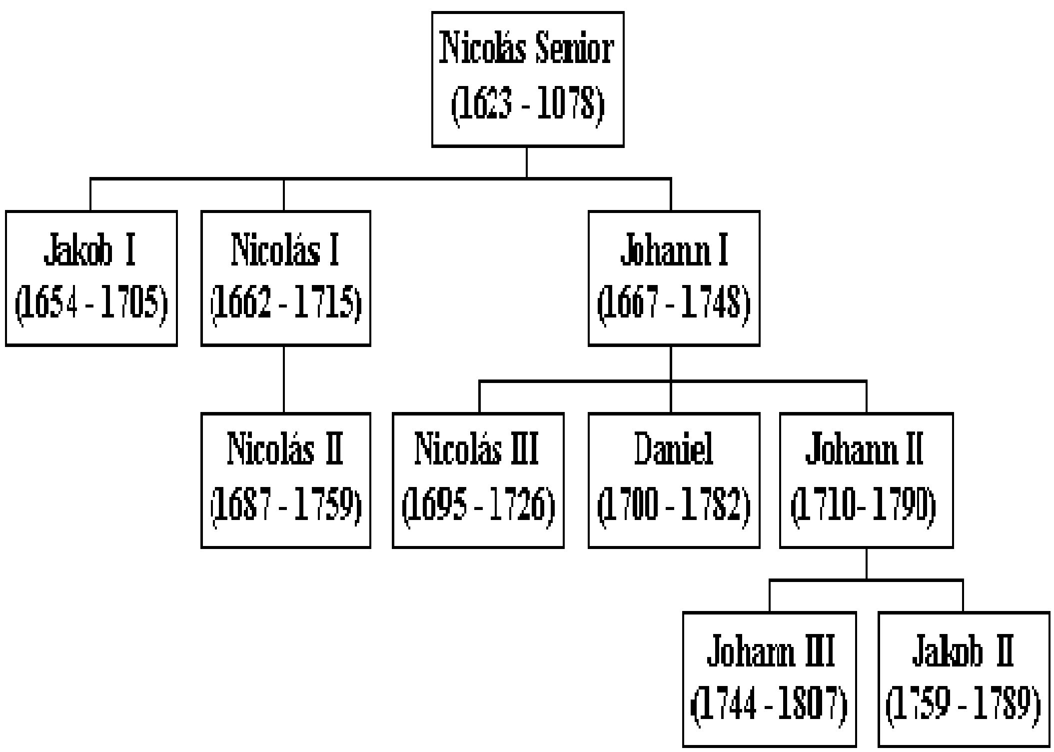
[10] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Mathematische Schriften*, 1971, Georg Olms Verlag, Hildeshcim, New York, Brand III/1, Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann und Nicolaus Bernoulli, 420 s.

[11] Jesper Lützen, *The solution of partial differential equations by separations of variables: a historical survey*, 242 - 277, Studies in history of Mathematics, 1987, MAA Studies in Mathematics, 308 pp, Esther R. Phillips, Editor.

[12] Jacopo Riccati, *Animadversiones in æquationes differentiales secundi gradus*, Autore (Sic) Co, Jacopo Riccato, Actorum Eruditorum Supplementa, Tom VIII, Sect. II, 66 - 73.

[13] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, (1922), 1966, Second edition, At the University Press, $viii + 804$ pp, Cambridge (U. K.)

Bernoulli



- Los ancestros Bernoulli habían huido de Amberes para no morir, por protestantes, a manos de católicos. Pasaron a Francfort, luego a Basilea (Bale).
- Salvo el bisabuelo, tanto el abuelo como el padre de la primera generación matemática Bernoulli tuvieron grandes fortunas.
- Hubo ocho matemáticos notables. Sobresalieron entre ellos: Jakob (Jacques) I, Johann (Johannes) I, Daniel. Dice Bell (p. 100. *Los grandes matemáticos*. 1948. Buenos Aires. Losada. 682 pp.): "Los Bernoulli y Euler fueron los matemáticos que perfeccionaron el cálculo hasta el punto de que un hombre común puede utilizarlo para obtener resultados a que no podrían llegar los más famosos sabios griegos".
- Escribieron en latín o en francés.
- Es bien curioso que, en principio, debido a la influencia paterna, ninguno de ellos hizo sus estudios universitarios en matemática.

  Jakob I fue inducido a estudiar teología. Por eso adoptó luego la divisa: "Invito patre sidera verso"(Contra la voluntad de mi padre estudio las estrellas).

  Johann I hizo estudios de medicina.

  Nicolás I estudió filosofía y leyes.

  Al parecer Nicolás II hizo los mismos estudios.

  Daniel estudió medicina.

  Johann II estudió leyes y elocuencia.

  Johann III estudió leyes, filosofía y geografía.

  Jakob II estudió leyes.

  No se encuentra detalle de los estudios de Nicolás III.

Jakob I, o Jacques, BERNOULLI. (1654. Basilea. 1705)

Autodidacta en el cálculo de Leibniz.

Profesor de matemática en Basilea.

Hizo avanzar el cálculo creado por Leibniz y Newton.

Series (1689).

Tangentes a las espirales parabólicas y logarítmicas.

Loxodrómicas.

Cuadratura y rectificación (1691).

Catenaria. Cálculo exponencial.

Jakob I y su hermano Johann I establecieron que la cicloide es la curva de tiempo mínimo (Fermat) o braquistócrona (1697).

Introdujo, (1691), el término "cálculo integral" en lugar de "cálculo sumatorio" propuesto por Leibniz.

Isoperímetro (1701).

Publicó la primera integración de una ecuación diferencial.

Dinámica de los cuerpos rígidos.

Teoría de la elasticidad.

1713. Obra póstuma. Ars conjectandi. Cálculo de probabilidades (ley de los grandes números).

Hizo demostraciones rigurosas de convergencia, lo cual es un adelanto sobre su época.

Distingue una probabilidad "geométrica" a priori con base en razones de simetría del problema y una probabilidad a posteriori constatada por la frecuencia de aparición.

Atribuía especial significación (un tanto mística) a la espiral logarítmica o equiangular, que se desarrolla cada vez como una espiral análoga. Escogió como epitafio: "Eadem mutata resurgo". Algo así como: A pesar del cambio, vuelvo a aparecer la misma. El grabador no era matemático, diseñó una espiral de Arquímedes para la tumba.

Jakob I era de caracter muy reservado.

Johann I escribió este comentario referente al hallazgo de la braquistócrona: "Con justicia podemos admirar a Huygens, por haber descubierto que una partícula pesada, describe una cicloide siempre en el mismo tiempo, cualquiera que sea el punto de partida. Pero quedaréis petrificados de asombro cuando diga que exactamente esta misma cicloide, la tautócrona de Huygens, es la braquistócrona que estamos buscando".

Johann I, (Johannes), BERNOULLI. (1667. Bâle (Basilea). 1748)

Alumno de su hermano Jakob I (1690).

Magister Artium a los 18 años.

Doctorado en 1690.

1695. Groninga. Profesor de matemática.

1705. Reemplazó a su hermano Jakob I como profesor de matemática en Basilea.

Gran admirador de Leibniz y muy poco de Newton. Atacó a los newtonianos en defensa de Leibniz.

Fue profesor de Euler y luego su gran admirador.

Johann I y Jakob I se querellaban frecuentemente, pero adelantaron juntos diversas investigaciones y los resultados les pertenecen por igual.

Johann I era bastante pendenciero. Echó de la casa a su hijo Daniel Bernoulli por haber tenido que compartir con él el premio de la Academia Francesa, 1734, cuyo tema era un estudio sobre órbitas de planetas.

Había hecho una estadía en París y allí fue profesor del marqués Guillermo Francisco Antonio de l'Hospital (1661 - 1704) quien publicó el primer texto de cálculo diferencial, Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, 1696, en el que figuran resultados establecidos por Johann I Bernoulli, como la célebre fórmula llamada de l'Hospital, sin que el señor marqués le diera los créditos.

Se interesa en diversas ramas de la matemática donde sigue la senda de su hermano Jakob aunque tendrá menos logros.

Serie de Bernoulli (1694).

Tangentes, inflexiones, radios de curvatura de diversas curvas planas. Trayectorias ortogonales.

Coordenadas polares (1691).

Cálculo de variaciones. Catenaria. Braquistócrona. (1696). (Academia de Ciencias. 1699).

Ecuaciones diferenciales. Factor integrante (1691). Variación de constantes (1693).

Exponencial y logaritmo como funciones inversas.

Al integrar funciones racionales introduce el logaritmo de un número complejo (1702).

Introdujo el principio de los desplazamientos virtuales en mecánica racional.

Hizo estudios acerca de las mareas y de las velas de los barcos.

Daniel, BERNOULLI. (Groninga. 1700 – Basilea. 1782)

Pertenece a la segunda generación matemática Bernoulli.

Alumno de su hermano Nicolás III.

10 veces (como Euler) recibió el premio de la Academia Francesa.

1725. Profesor de matemática en San Petersburgo.

1733. Profesor de anatomía, botánica y física en Basilea.

1738. Sobre la senda de Huygens, concibe la hidrodinámica como basada en el principio de conservación de las fuerzas vivas.

Estudió el movimiento de los fluidos.

Hizo avanzar los conocimientos en cálculo, ecuaciones diferenciales, probabilidades.

1727. Teoría cinética de los gases.

Por trabajos que comenzó a publicar en 1733, Daniel Bernoulli es un iniciador en el tema de las ecuaciones diferenciales parciales. En particular inspiró a d'Alembert quien en 1743 concibió la primera de tales ecuaciones, la ecuación del movimiento.

Particularmente importante fue su estudio de la ecuación diferencial de la cuerda vibrante (1755).

Es considerado el primer físico matemático. Es más un físico que un matemático.

Aplicó la teoría de la gravitación de Newton al estudio de las mareas (1748).

Teoría de oscilaciones.

Se ocupó de la precisión de los relojes y de la inclinación magnética.

Estudió las ecuaciones de Riccati y las llamadas de Bernoulli.

Fue el primero en exponer el principio de un cálculo correcto del trabajo cardíaco como producto del peso de la inundación ventricular por el desplazamiento sistólico.

Anécdota: Daniel se presenta a alguien: "Soy Daniel Bernoulli". El otro responde guasonamente: "Y yo, Isaac Newton". Este episodio, decía Daniel, me produjo más placer que todos los honores.

Daniel Bernoulli se interesó en la aplicación de las probabilidades a las ciencias humanas, desde un enfoque bastante curioso, que se podría relacionar tal vez con la ética calvinista del trabajo y la riqueza. Compara el crecimiento de la riqueza 'física' con el de la riqueza 'moral', que según él, ella conlleva. Apoyado en una ecuación afirma que el crecimiento geométrico de la primera no genera sino un crecimiento aritmético de la segunda. Hauchecorne y Suratteau recuerdan a Jeremy Bentham (1748 - 1832) creador del utilitarismo como doctrina que trata de "poner la felicidad en ecuación". En nuestros días, el diseñador Giorgio Armani, anda diciendo que solo deberían gobernar los ricos; al parecer supone que quien tiene mucho dinero está exento de codicia y es ajeno a la corrupción.

Nicolás II, BERNOULLI (1687 – Bâle – 1759)

Estuvo como profesor de matemática en la Universidad de Padua de 1716 a 1719 y allí encontró a Riccati.

Profesor después en su ciudad natal trata de aplicar la teoría de las probabilidades a los problemas jurídicos.

Sus trabajos puramente matemáticos tienen que ver con ecuaciones diferenciales y geometría.

Nicolás III, BERNOULLI (Bâle. 1695 – San Petersburgo. 1726)

Estudia geometría de curvas, ecuaciones diferenciales y probabilidades. Enunció la paradoja de San Petersburgo.

Johann II, BERNOULLI (1710 - 1790)

Recibió tres veces el premio de la Academia Francesa.

Intentó una teoría ondulatoria de la luz mediante ondas transversas.

Johann III, BERNOULLI (Bâle. 1744 – cerca de Berlín. 1807)

A los 19 años fue nombrado astrónomo real en Berlín.

Teoría de probabilidades.

Escritura decimal de un número.

Jakob II, BERNOULLI (1759 - 1789)

Casado con una nieta de Euler.

Intento, fallido, de una teoría de la placa oscilante.

Se ocupó de física experimental.

Bibliografía

[1] Eric Temple Bell, *Los grandes matemáticos*, (1937) 1948, Losada, Buenos Aires, 682 pp.

[2] Bertrand Hauchecorne, et, Daniel Suratteau, *Des mathématiciens de A a Z*, 1996, Ellipses, Paris, 384 pp.

[3] Petit Robert, *Dictionnaire Universel des noms propres*, 1983, Le Robert, Paris, 1952 pp.

Conviene tener en cuenta que estas fuentes no siempre concuerdan en la información acerca de las investigaciones de los Bernoulli y de los hallazgos de cada cual.