Análisis multiresolución

Carlos Orlando Ochoa C
Profesor Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
oochoac@udistrital.edu.co

Introducción

Las funciones de variable real a valor real o complejas a valor complejo con las operaciones de suma y producto por escalares como en Cálculo, es decir

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x)\end{aligned} \tag{1}$$

forman un espacio vectorial; que contiene el subespacio vectorial de todas las funciones periódicas de período T. Este subespacio contiene una base enumerable conformada por funciones sinusoidales; es decir cualquier función periódica se expresa como una suma enumerable de funciones sinusoidales multiplicadas por escalares, entrando entonces a las series de Fourier. Si se consideran funciones no periódicas, la serie de Fourier se generaliza y proporciona la transformada de Fourier de una función. Una transformada Wavelets es entonces una generalización de la transformada de Fourier, en donde ciertos subespacios vectoriales de funciones se les constituyen bases numerables, llamadas bases Wavelets. Estas teorías sobre estos espacios vectoriales han encontrado una gran aplicación en problemas de tecnología, por ejemplo en Análisis Multiresolución. Una introducción a estas aplicaciones se puden modelar con cierta restricción en los espacios de Hilbert que es un caso particular de lo espacios normados y este a su vez de espacios métricos.

1 Espacios Métricos

Algunas propiedades de $\mathbb{R}$ y de la función valor absoluto permiten establecer una noción de distancia entre números reales:

$$\begin{aligned} |\ \ | :&\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty) \\ &(x, y) \to |x - y|, \end{aligned} \tag{2}$$

esta función satisface las siguientes propiedades: para cada x, y, z en $\mathbb{R}$,

(i) Si $x = y$ entonces $|x - y| = 0$.

(ii) $|x - y| = 0$ entonces $x = y$.

(iii) $|x - y| = |y - x|$.

(iv) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

Como esta noción es útil en varios apartes del Análisis tales como en convergencia, continuidad, etc., es conveniente elevarla a otros espacios más generales pero preservando sus propiedades.

Definición 1. *Sea X un conjunto no vacío.*

*(a) Una **métrica** en X es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que satisface las siguientes propiedades para todo x, y, z en X : (m1) $x = y$ implica $d(x, y) = 0$.*
(m2) $d(x, y) = 0$ implica $x = y$. (Separación).
(m3) $d(x, y) = d(y, x)$. (Simetría).
(m4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.(Desigualdad Triangular).
El número $d(x, y)$ se llama distancia de x a y.

(b) *Una **seudométrica** es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que satisface (m1),(m3), (m4). Mientras que una **cuasimétrica** es aquella que cumple (m1) y (m4).*

(c) *Un **espacio métrico** X es un par (X, d), donde X es un conjunto no vacío y d es una métrica en X.*

Ejemplo 1. *El conjunto de los números reales con la métrica:*

$$d(x, y) = |x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, donde $|x|$ indica el valor absoluto de x, es un espacio métrico.

Ejemplo 2. [El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$] *Este ejemplo generaliza el ejemplo anterior, los puntos de $\mathbb{R}^n$ son de la forma $x = (x_{1,...,}x_n)$ donde cada una de las n coordenadas x_i es un número real y cuya función distancia se define por: si $x = (x_{1,...,}x_n)$, e $y = (y_{1,...,}y_n)$ entonces*

$$d(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right]^{1/2}.$$

También se presentarán dos maneras adicionales de definir una distancia entre elementos de $\mathbb{R}^n$.

(a) $d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$,

(b) $d_2(x, y) = \text{máx}\{|x_k - y_k| \ : \ k = 1, 2, 3, ..., n\}$.

Las funciones $d, d_1, d_2 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ son métricas.

Ejemplo 3. *Sea X cualquier conjunto no vacío, se define*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

para cada x e y en X. Demostrar que d es una métrica para X. Este espacio métrico recibe el nombre de espacio métrico discreto.

Solución. Obsérvese que las condiciones m1), m2) y m3) se satisfacen inmediatamente. Para ver que m4) también se satisface considere $x, y, z \in X$, si $x = y = z$, entonces

$$d(z, y) = d(x, z) = d(y, z) = 0,$$

y así $d(z, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$. Supóngase ahora que $x \neq y$ o $y \neq z$. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $x \neq y$, entonces $d(x, y) = 1$, luego en cualquiera de las posibilidades para z se tiene que

$$d(z, y) \leq d(x, z) + d(y, z).$$

Esto termina el ejercicio.

2 Espacios Vectoriales Normados

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial real. Una *norma* en $\mathbb{X}$ es una función real

$$\|.\| : \mathbb{X} \to \mathbb{R},$$

que asocia a cada vector $x \in \mathbb{X}$ el número real $\|x\|$, llamado norma de x, y satisface las siguientes condiciones para todo $x, y \in \mathbb{X}$ y λ un escalar:

n1) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

n2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular)

Un **espacio vectorial normado** es un par $(\mathbb{X}, \|.\|)$ donde $\mathbb{X}$ es un espacio vectorial y $\|.\|$ es una norma en $\mathbb{X}$.
Los ejemplos de espacios vectoriales normados más usuales son $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$, $(\mathbb{R}^n, \|.\|_1)$, $(\mathbb{R}^n\ \|.\|_2)$, donde, para $x = (x_{1,\ldots,}x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2},\ \|x\|_1 = \sum |x_i|\,,\ \ \|x\|_2 = \max |x_i|\,.$$

Las condiciones que caracterizan una norma son de verificación inmediata, exceptuando n3) para la primera de estas normas, pero se dmuestra facilmente con la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se hará despues que se presente esta desigualdad.

Un ejemplo de espacio vectorial normado es el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales T de un espacio vectorial normado $\mathbb{X}$ en $\mathbb{R}$, denotado con B($\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$), donde la norma se define en este caso como:

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|T(x)|}{\|x\|}\ .$$

Obsérvese que para todo $x \in \mathbb{X}$, $|T(x)| \leq \|x\|\,\|T\|$ y que las condiciones n1), n2) se satisfacen de manera inmediata. Para ver n3), sean $T_1, T_2 \in$ B($\mathbb{X}$,$\mathbb{R}$), entonces

$$\begin{aligned}
\|T_1 + T_2\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{|(T_1 + T_2)(x)|}{\|x\|} \\
&\leq\ \sup_{x\neq 0} \frac{|T_1(x)|}{\|x\|} + \sup_{x\neq 0} \frac{|T_2(x)|}{\|x\|} \\
&= \|T_1\| + \|T_2\|\,.
\end{aligned}$$

Lo que termina la demostración de n3).

Todo espacio vectorial normado $(\mathbb{X}, \|.\|)$ es un espacio métrico con métrica d, definida por

$$d(x, y) = \|x - y\|\,,$$

en este caso se dice que la métrica es inducida por la norma $\|.\|$. Por ejemplo las metricas d, d_1 y d_2 son inducidas por las normas $\|.\|$, $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ respectivamente. Las propiedades m1) a m4) para una métrica inducida por una norma resultan inmediatamente de las análogas para la norma, en el caso de la desigualdad triangular se demuestra así:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|(x-z)+(z-y)\| \\ &\leq \|x-z\|+\|y-z\| \\ &= d(x,z)+d(z,y). \end{aligned}$$

Ejemplo 4 (Espacio vectorial con producto interno). Sea $\mathbb{H}$ un espacio vectorial. Un *producto interno* en $\mathbb{H}$ es una función

$$\langle , \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

que asocia a cada par de vectores $x, y \in \mathbb{H}$ un número real $\langle x, y\rangle$, llamado el producto interno entre x, e y que satisface las siguientes propiedades para todo $x, y, z \in \mathbb{H}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$: a) $\quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, b) $\quad \langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, c) $\quad \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, d) $\quad \langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{H}$, e) $\quad \langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.
A partir de un producto interno, se define una norma para los vectors $x \in \mathbb{H}$ mediante la siguiente fórmula

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Las propiedades n1) y n2) son inmediatas a partir de las propiedades del producto interno, la condición n3) es más complicada necesita de la siguiente desigualdad

2.1 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

En todo espacio vectorial con producto interior se tiene

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Nótese que la desigualdad es obvia si $x = 0$. Así que supóngase que $x \neq 0$ y tómese $z = tx + y$. Utilizando las propiedades del producto interior se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle z, z\rangle \\ &= \langle tx + y, tx + y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle t^2 + 2\langle x, y\rangle t + \langle y, y\rangle, \end{aligned}$$

entonces para $A = \langle x, x\rangle, \;\; B = \langle x, y\rangle, \;\; C = \langle y, y\rangle$ se obtiene

$$At^2 + 2Bt + C \geq 0.$$

Como $A > 0$, entonces $t = -B/A$ proporciona

$$B^2 - AC \leq 0,$$

esto es, $\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$.
Lo que termina la demostración de la desigualdad.
Ahora se puede demostrar la condición n3) de la definición de norma inducida por un producto interno. En efecto si $x, y \in \mathbb{H}$, entonces

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\| \,.\, \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

El ejemplo más natural con producto interno es $\mathbb{R}^n$, con producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

las propiedades de producto interno se satisfacen inmediatamente y su norma inducida es

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Los espacios vectoriales normados estudiados en las secciones anteriores son algo más que espacios vectoriales pues incluyen la noción de longitud de un vector. Uno de los conceptos geométricos que desaparecen en el estudio de los espacios abstractos es el de ángulo entre dos vectores; en el ambiente de los espacios de Hilbert no se habla de ángulos en general sino que se tiene la ortogonalidad como reminiscencia de esa intuición geométrica.

2.2 De un Ejemplo muy Conocido

Consideramos el espacio Euclideo $\mathbb{R}^3$. Un vector en $\mathbb{R}^3$ se puede representar mediante una terna ordenada $x = (x_1, x_2, x_3)$ de números reales y su *norma* está definida por:

$$\|x\| = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Por otro lado, el *producto interior* (o producto punto)de los vectores representados por $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ está definido por

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

este producto interior está relacionado con la norma por

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Es familiar la ecuación

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\theta,$$

donde θ es el ángulo entre los vectores x e y, para justificar esta última expresión se ilustra la condición

$$\|x + y\| = \|x - y\|$$

que coincide con la propiedad geométrica x es *perpendicular* a y:

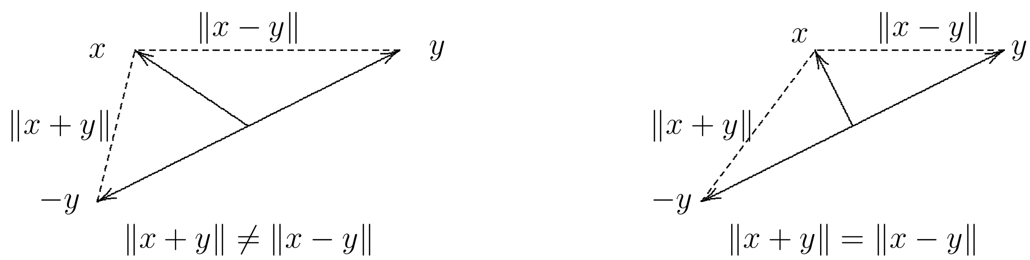

Figura: 1

Elevando al cuadrado cada miembro de $\|x+y\| = \|x-y\|$ se tiene

$$\langle (x+y), (x+y) \rangle = \langle (x-y), (x-y) \rangle$$

expresión que al ser desarrollada equivale a

$$\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle,$$

cancelando se obtiene que $4\langle x, y \rangle = 0$ o lo que es lo mismo $\langle x, y \rangle = 0$ es decir: $\|x+y\| = \|x-y\|$ si y solo si $\langle x, y \rangle = 0$.

Sean los vectores x e y con $y \neq 0$, la *proyección de* x *a lo largo de* y es un vector z tal que $z = ky$ para algún $k \in \mathbb{R}$ y $x - z$ es perpendicular a y; es decir,

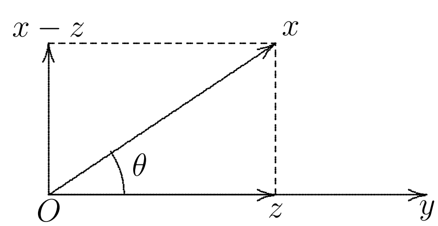

Figura: 2

$\langle x - ky, y \rangle = 0$ equivale a $\langle x, y \rangle = \langle ky, y \rangle = k\langle y, y \rangle$, esto es,

$$k = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2},$$

a este escalar k se le llama la *componente* de x a largo de y; ahora, volviendo a la Figura 2 y haciendo uso de la trigonometría elemental se tiene que

$$\cos\theta = \frac{k\|y\|}{\|x\|} = k\frac{\|y\|}{\|x\|} = \frac{\langle x, y\rangle}{\|y\|^2}\frac{\|y\|}{\|x\|},$$

por tanto,

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

como se había anunciado.

2.3 En un Espacio Vectorial Complejo

Las ideas cruciales expuestas en la sección anterior se adaptan al espacio $\mathbb{C}^3$; para dos vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ en este espacio, se define su producto interior por

$$\langle x, y\rangle = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + x_3\overline{y}_3.$$

Se introducen los complejos conjugados para garantizar que la relación $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ tenga siempre sentido. Por otro lado, para cada y fijo, es lineal visto como función de x, es decir $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$; hay también una simetría con respecto a la conjugación i. e. $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$. Aquí la condición $\langle x, y\rangle = 0$ es tomada para definir la ortogonalidad.

Definición 2. *Sea X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x_n\}$ es convergente si existe un punto $x \in X$ con la siguiente propiedad: para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que $n \geq N$ implica $d(x_n, x) < \epsilon$.*

En este caso se dice que $\{x_n\}$ converge a x o que x es el límite de $\{x_n\}$ y se escribe

$$x_n \to x, \quad ó \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Si $\{x_n\}$ no converge, se dice que $\{x_n\}$ es divergente.

Definición 3. [Sucesión de Cauchy]. *Sea X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$, siempre que $n \geq N,\ m \geq N$.*

Teorema 1. *Sea X un espacio métrico y $\{x_n\}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ (en X). Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Inmediata. □

3 Espacios de Hilbert

Sea $\mathbb{H}$ un espacio vectorial con producto interno, por lo tanto normado y así un espacio métrico (con métrica inducida por el producto interno definido en $\mathbb{H}$). Si este espacio métrico es completo, es decir toda sucesión de Cauchy converge en $\mathbb{H}$, entonces $\mathbb{H}$ se llama un espacio de Hilbert. **Ejemplos**

(a) Para cada n fijo, el conjunto $\mathbb{C}^n$ de todas las $x = (x_1 \cdots, x_n)$ donde cada x_j son números complejos, es un espacio de Hilbert si la suma y multiplicación por escalares se definen componente a componente, como en Cálculo elemental, y si además

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \qquad (y = (y_1 \cdots, y_n)).$$

(b) Si μ es la medida de Lebesgue sobre un espacio medible X, $L^2(\mu)$ el espacio vectorial de todas las funciones complejas f definidas sobre X tales que

$$\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$$

es un espacio de Hilbert, con producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}\, d\mu$$

4 Sistemas Ortonormales

Definición 4. *Seadonde $\mathcal{E}$ un espacio de Hilbert, dos elementos $x, y \in \mathcal{E}$ son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Como se dijo antes, en este contexto se puede definir en ángulo entre dos vectores $x, y \in \mathcal{E}$ como $\cos^{-1} \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$, expresión que tiene sentido pues en $\mathcal{E}$ se satisface la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

pero lo que es relevante aquí es la ortogonalidad.

Definición 5. *Un conjunto de vectores no nulos $\{x_k\}_{k\in K} \subset \mathcal{E}$ es un sistema ortogonal si $\langle x_k, x_j\rangle = 0$ para $k \neq j$, i. e. x_j y x_k son ortogonales; $\{x_k\}_{k\in K}$ es un sistema ortonormal si*

$$\langle x_k, x_j\rangle = \begin{cases} 0 & si\ \ k \neq j, \\ 1 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Note que si $\{x_k\}_{k\in K}$ es un sistema ortogonal entonces $\{\frac{x_k}{\|x_k\|}\}_{k\in K}$ es un sistema ortonormal.

Teorema 2. *Los vectores de un sistema ortogonal son linealmente independientes.*

Demostración. Sea $\{x_k\}_{k\in K} \subset \mathcal{E}$ un sistema ortogonal y $\{\alpha_k\}_{k\in K}$ escalares tales que $\sum_{k\in K} \alpha_k x_k = 0,$ entonces para $j \in K$

$$0 = \left(\sum_{k\in K} \alpha_k x_k, x_j \right) = \alpha_j (x_j, x_j)$$

de donde se sigue que $\alpha_j = 0.$ $\square$

El sistema ortogonal $\{x_k\}_{k\in K}$ es una base ortogonal si genera a todo el espacio $\mathcal{E}$.

Para el espacio $L_2[-\pi, \pi],$ se tiene que

$$\{e^{inx}\}_{n=1}^{\infty}$$

es un sistema ortonormal.

5 La Desigualdad de Bessel y los Sistemas Ortogonales

Si $e_1, e_2, \cdots, e_n$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n,$ entonces todo $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir en la forma $x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ donde $c_i = (x, e_i)$. Esto se generaliza al caso en que $\mathcal{E}$ es un espacio de Hilbert. Sea $\{\phi_n\}_n$ un sistema ortogonal en $\mathcal{E}$ y $f \in \mathcal{E},$ a cada uno de los números $c_k = (f, \phi_k)$ se le llama *componente de Fourier de* f con respecto al sistema $\{\phi_n\}_n$ y a la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k$ *serie de Fourier de* f con respecto al sistema $\{\phi_n\}_n$. Frente a esta serie surgen dos preguntas: Dado que hasta ahora su presentación ha sido formal ¿La serie converge?, en caso afirmativo ¿La serie converge a f? En esta dirección se tienen los resultados que siguen.

Teorema 3. *Dados $\{\phi_n\}_n$ un sistema ortogonal en un espacio de Hilbert $\mathcal{E}$ y un elemento arbitrario $f \in \mathcal{E}$. Entonces*

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k\|$$

se minimiza cuando $a_k = c_k = \langle f, \phi_k \rangle$ para todo k que satisface $1 \leq k \leq n$ y para todo n, y el mínimo es $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$. En consecuencia se tiene la desigualdad de Bessel, $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2$.

Demostración. Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$ entonces

$$\begin{aligned}
\|f - s_n\|^2 &= \|f\|^2 - 2\langle f, \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k)^2
\end{aligned}$$

por tanto, $\|f - s_n\|^2$ es mínimo cuando para todo k con $1 \leq k \leq n$ se tiene que $a_k = c_k$ y este mínimo es $\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$; como $\|f - s_n\|^2 \geq 0$, para todo n se tiene que $\|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} c_k^2$ y además la serie $\sum_{k=1}^{n} c_k^2$ es convergente. $\square$

En un espacio de Hilbert $\mathcal{E}$, un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$ se dice que *es cerrado* si para todo $f \in \mathcal{E}$ se tiene que $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ donde $c_k = (f, \phi_k)$.

Teorema 4. *Un sistema ortonormal* $\{\phi_n\}$ *en un espacio de Hilbert* $\mathcal{E}$ *es cerrado si y solamente si para todo* $f \in \mathcal{E}$ *se tiene que*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \phi_k)\phi_k$$

i.e., f *es la suma de su serie de Fourier.*

Demostración. De la definición, $\{\phi_n\}$ es un sistema ortonormal cerrado si y solamente si para todo $f \in \mathcal{E}$ se tiene que $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle^2$. Si $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k$ con $c_k = \langle f, \phi_k\rangle$ entonces $\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$, haciendo $n \to \infty$ se obtiene que $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, esto prueba el teorema. $\square$

A la expresión $f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f, \phi_k\rangle\phi_k$ se le llama *identidad de Parseval*; nótese que bajo un sistema ortonormal $\{\phi_n\}$, todo $f \in \mathcal{E}$ es el límite de las sumas parciales de su serie de Fourier; además, nótese que de la desigualdad de Bessel se obtiene que una condición necesaria para que los números $c_1, \ldots, c_n, \ldots$ sean coeficientes de Fourier de f es $\sum_{n=1}^{n} c_n^2 \leq \infty$. El resultado que sigue muestra que esta condición es suficiente.

Teorema 5 (Teorema de Riesz-Fischer). *Dado un sistema ortogonal* $\{\phi_k\}$ *en espacio de Hilbert* $\mathcal{E}$ *y* $c_1, \ldots, c_k, \ldots$ *números tales que* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \infty$*,entonces existe* $f \in \mathcal{E}$ *tal que*

$$c_k = \langle f, \phi_k\rangle \quad y \quad \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Demostración. Se define $f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\phi_k$ de donde se sigue que

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\phi_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\phi_{n+p}\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2$$

y como $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 = 0$ se tiene que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy, luego existe $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ya que el espacio es completo. Por otro lado,

$$\langle f, \phi_k \rangle = \langle f_n, \phi_k \rangle + \langle f - f_n, \phi_k \rangle$$

donde $\langle f_n, \ \phi_k \rangle = c_k$ cuando $k \leq n$ y $\lim_{n\to\infty} \langle f - f_n, \ \phi_k \rangle = 0$ pues $|\langle f - f_n, \phi_k \rangle| \leq \|f - f_n\| \|\phi_k\|$ luego $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \phi_k \rangle = c_k$.

De $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ se tiene que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

esto termina la prueba. □

Dos espacios Euclídeos $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ son *isomorfos* si existe una biyección $\Psi : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ que preserva las operaciones de espacio vectorial y el producto escalar, es decir, para $x, y \in \mathcal{E}_1$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se satisface

$$\Psi(x + y) = \Psi(x) + \Psi(y), \quad \Psi(\lambda x) = \lambda \Psi(x) \quad \text{y} \quad \langle \Psi(x), \Psi(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

A la aplicación Ψ se le llama *isomorfismo.* Este concepto y el de espacios de Hilbert producen el siguiente resultado.

Teorema 6. *Dos espacios de Hilbert Cualesquiera son isomorfos.*

Demostración. Veamos que un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es isomorfo a l_2. Sea $\{\phi_n\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$, así para cada $f \in \mathcal{H}$ se le hace corresponder la sucesión de sus coeficientes de Fourier con respecto a $\{\phi_n\}$, es decir,

$$f \mapsto (c_1, \ldots, c_n, \ldots) = (\langle f, \phi_1 \rangle, \ldots, \langle f, \phi_n \rangle, \ldots),$$

como $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \infty$ entonces $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots) \in l_2$. Recíprocamente, por el teorema de Riesz-Fischer, a cada sucesión $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots) \in l_2$ le corresponde un elemento $f \in \mathcal{H}$, es decir se ha establecido una piyección entre $\mathcal{H}$ y l_2. Ahora, si se tiene la correspondencia $f \leftrightarrow (c_1, \ldots, c_n, \ldots)$ y $\hat{f} \leftrightarrow (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_n, \ldots)$ y α es un escalar, entonces

$$f + \hat{f} \leftrightarrow (c_1 + \hat{c}_1, \ldots, c_n + \hat{c}_n, \ldots) \quad \text{y} \quad \alpha f \leftrightarrow (\alpha c_1, \ldots, \alpha c_n, \ldots),$$

es decir, la biyección es un isomorfismo de espacios vectoriales. Ahora, por la identidad de Parseval, $\langle f, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_k^2, \langle \hat{f}, \hat{f}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{c}_k^2$, y

$$\langle f + \hat{f}, f + \hat{f}\rangle = \langle f, f\rangle + \langle f, \hat{f}\rangle + \langle \hat{f}, f\rangle + \langle \hat{f}, \hat{f}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (c_k \hat{c}_k)^2$$

para obtener que $\langle f, \hat{f}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_k \hat{c}_k^2$, en otras palabras, el producto interno se preserva.

$\square$

Bibliografía

[1] D. H. Griffel *Applied Functional Analysis*, Dover (New York, 2002).

[2] Serge Lang *Algebra Lineal*, Fondo Educativo Interamericano (Puerto Rico, 1974).

[3] L. Prasad, S. Iyengar *Wavelet Analysis with Applications to Image Processing*, CRC Press, (New York, 1997).

[4] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill (Singapore, 1963).

La más importante caracteristica del análisis multiresolución es la capacidad para separar una señal en muchas componentes a diferentes escalas (o resoluciones). Similar a una descomposición de una señal en multiples bandas de frecuencia, el objetivo es aplicar una estrategia de 'dividir' la señal para que sus componentes individuales puedan ser procesados por diferentes algoritmos. Para tal propósito consideremos las propiedades de los subespacios de aproximación y los subespacios wavelet

Definición 6. *una función $\varphi(t)\epsilon L^2(R)$ se llama función de escalado(o de aproximación), si genera una secuencia anidada de subespacios (de aproximación) $\{V_j\}$ de $L^2(R)$ tal que*

$$\{0\} \longleftarrow \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots\cdots \to L^2$$

y satisface la ecuación de refinamiento $\varphi(t) = \sum_{n\in Z} h_0(n)\sqrt[2]{2}.\varphi(2t-n)$ donde la secuencia de coeficientes $\{h_0(n)\} \in l^2$.

Los anteriores subespacios escalado V_j son generados por las funciones

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k)$$

para cada j y k$\in Z$

Definición 7. *Las wavelets $\psi(t)$ son funciones de energía finita con propiedades de localización que pueden ser usadas muy eficientemente para representar señales transitorias con muy pocos coeficientes. Estas funciones satisfacen la ecuación*

$$\psi(t) = \sum_{n\in Z} h_1(n)\sqrt[2]{2}.\varphi(2t-n)$$

donde los coeficientes $\{h_1(n)\} \in l^2$.

El subespacio wavelet W_j es generado por las funciones $\psi_{\ j,k}\ (t) = 2^{\frac{j}{2}}\ \psi(2^j t - k)$ y constituye un subespacio mutuamente ortogonal con V_j dentro del siguiente subespacio de resolución V_{j+1}, por tanto $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$

Ejemplo 1. *La función de escalado de Haar φ es el más ejemplo simple:*

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & if \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & if \quad |t| \geq 1 \end{cases}$$

que puede expresarse como:

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1) \ \ donde\ h_0(0) = \frac{1}{\sqrt[2]{2}} = h_0(1)$$

La wavelet $\psi(t)$ asociada al escalado de Haar :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & if \quad 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & if \quad 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & if \quad |t| \geq 1 \end{cases}$$

$$\psi(t) = \quad \varphi(2t) - \varphi(2t-1) \quad donde \quad h_1(0) = \frac{1}{\sqrt[2]{2}}\,,\ h_1(1) = \ \frac{-1}{\sqrt[2]{2}}$$

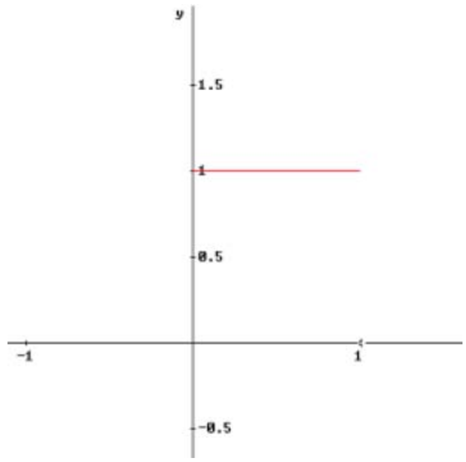

Figura: 3

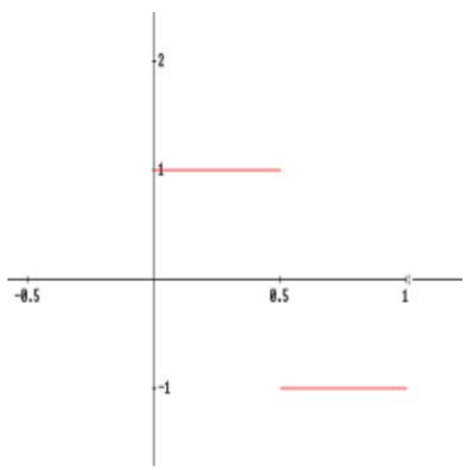

Figura: 4

Definición 8. *Un análisis multiresolución de L^2 es secuencia anidada doblemente infinita de subespacios de L^2*

$$\{0\} \longleftarrow \cdot\cdot \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \to L^2$$

con las propiedades:

1. *$\cup_n V_n$ es denso en L^2.*
2. *$\cap_n V_n = \{0\}$*
3. *$f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(2x) \in V_{n+1}$ para todo $n \in Z$*
4. *$f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(x - 2^{-n}k) \in V_n$ para todo $n, k \in Z$*
5. *Existe una función $\varphi \in L^2$ tal que $\{\varphi(x-k) : k \in Z\}$ forma una base estable de V_0.*

La función base φ es llamada la función de escalado. El MRA se dice ortogonal si φ es ortogonal

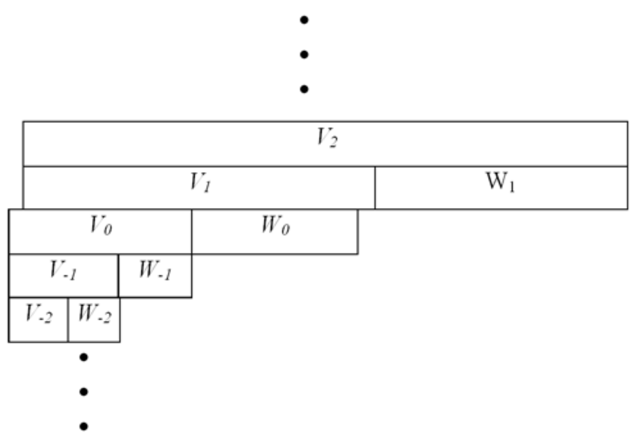

Figura 5: Ilustración pictórica de la relación entre los espacios vectoriales Wavelets y Escalados

La proyección ortogonal de una función arbitraria $f \in L^2$ sobre V_j viene dada por

$$P_j f = \sum_k \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$$

La diferencia entre las aproximaciones en las resolución 2^{-j} y 2^{-j-1} se denomina el *detalle fino en la resolución* 2^{-j} expresado:

$$Q_j f(x) = P_{j+1} f - P_j f = \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \, \psi_{j,k}$$

De $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ se deduce que para $j = n$

$$P_{n+1} f = \; P_n f + Q_n f(x) = \sum_k \langle f, \varphi_{n,k} \rangle \, \varphi_{n,k} + \; \sum_k \langle f, \psi_{n,k} \rangle \, \psi_{n,k}$$

repitiendo el proceso para

j= n-1 obtenemos $P_{n+1} f = P_{n-1} f + Q_{n-1} f(x) + Q_n f(x)$ después de n+1 pasos

$$P_{n+1} f = P_0 f + \sum_{j=0}^{n} Q_j f(x) = \sum_k \langle f, \varphi_{0,k} \rangle \, \varphi_{0,k} + \sum_{j=0}^{n} \; \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \, \psi_{j,k}$$

Ejemplo 2. *Ejemplo: Utilizando el DERIVE representar la función sin(2πt)sin(4πt)en los espacios escalados V5 ,V7 , V9*

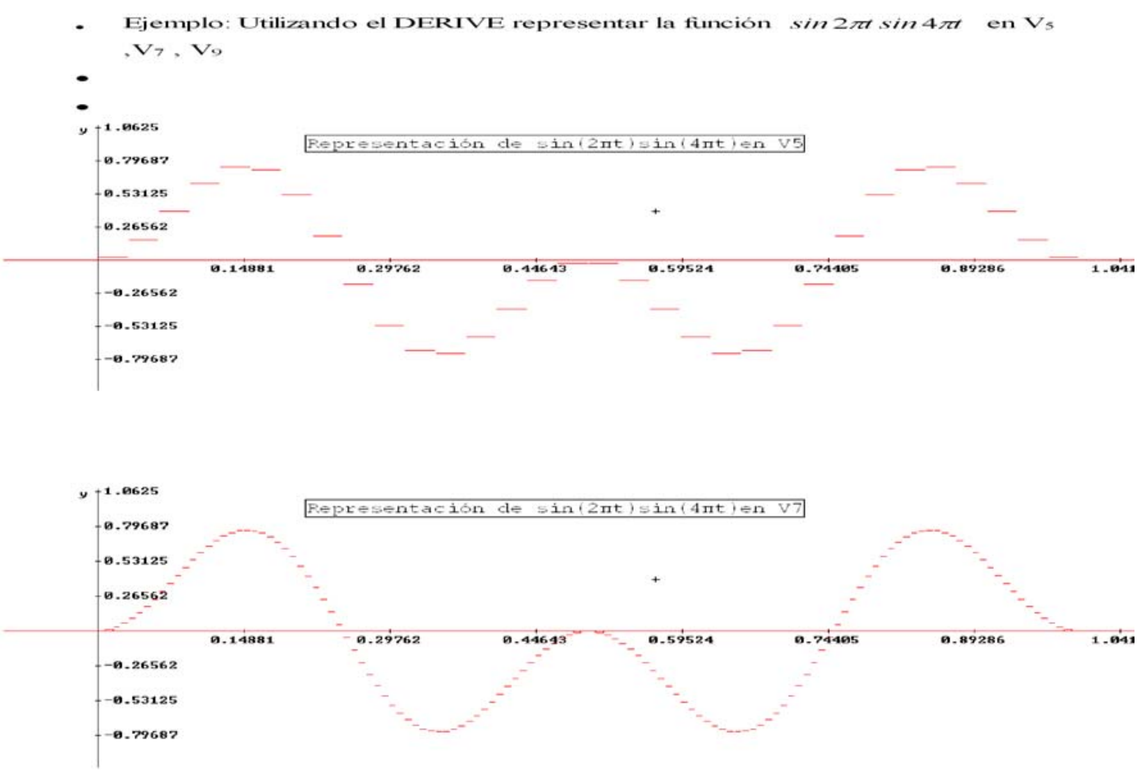

Figura 6

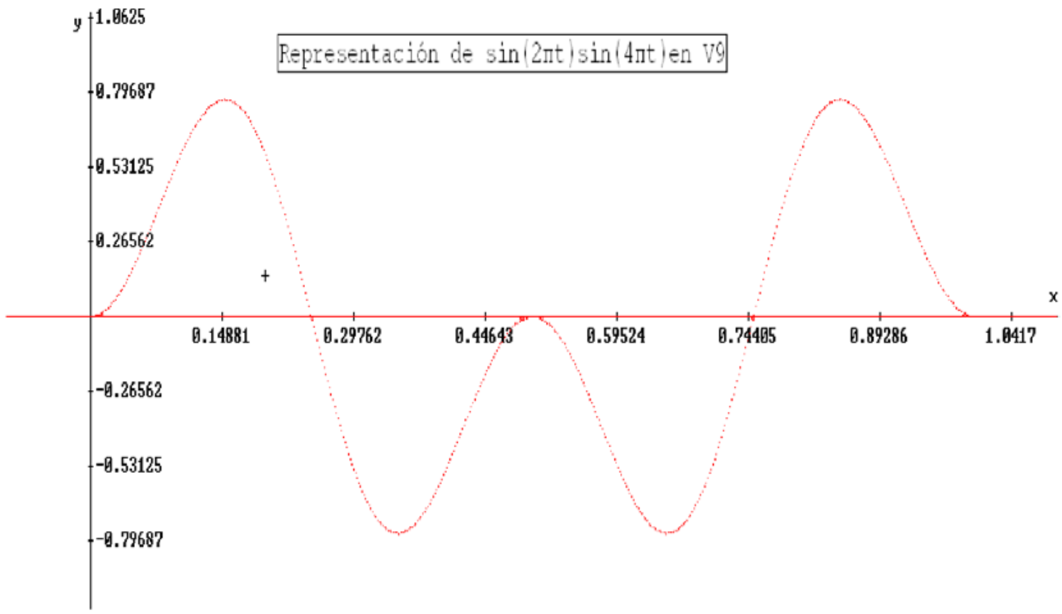

Figura 7

Utilizando el DERIVE calcular la aproximación en W_5, W_7 y W_9.

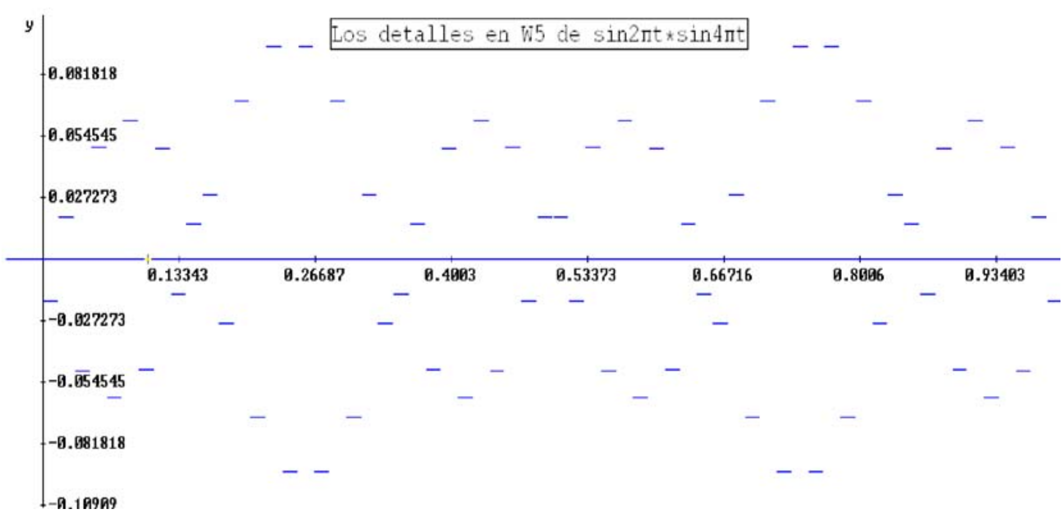

Figura 8

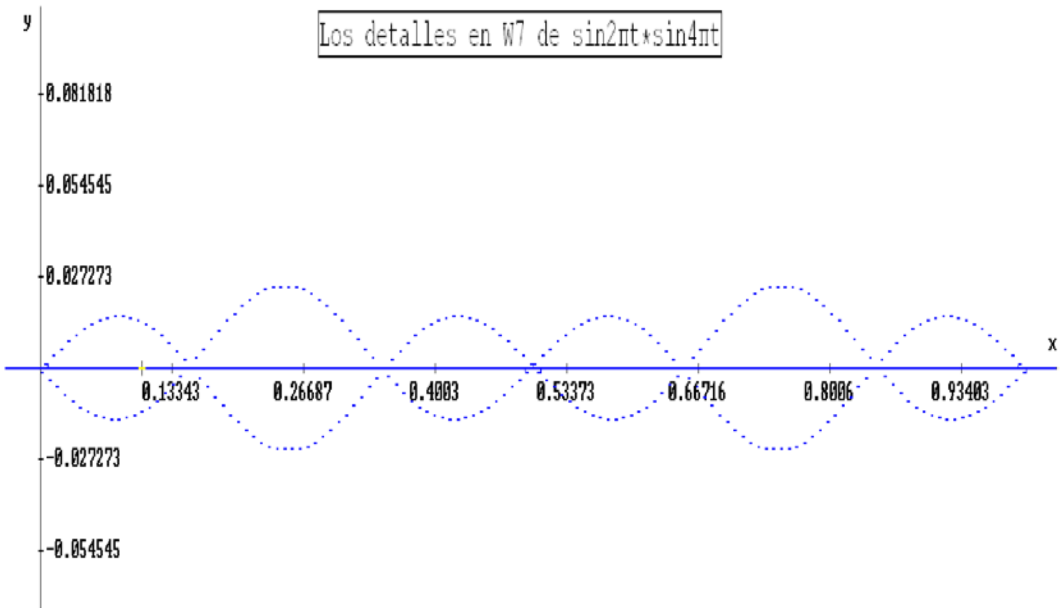

Figura 9

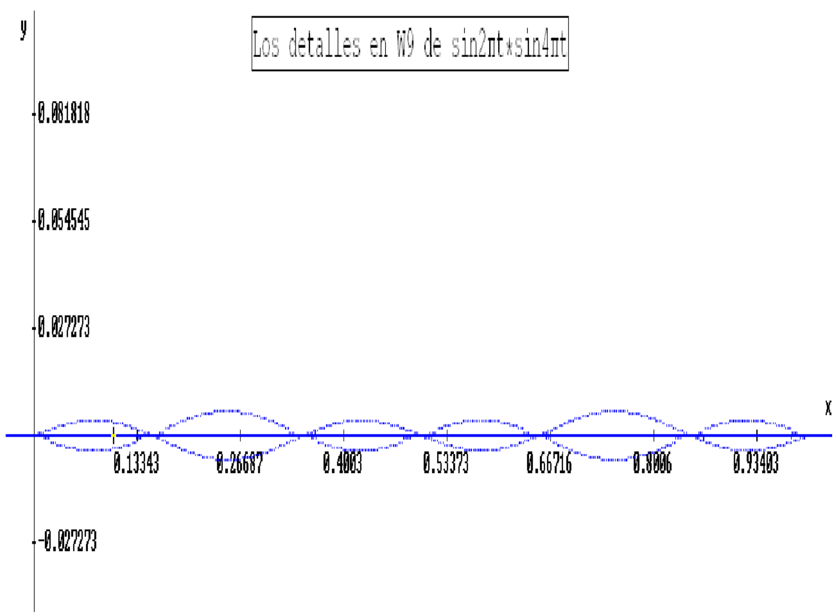

Figura 10

Bibliografía

[1] An Introduction To Wavelets, Charles Chui VOL.1 Academic Press, 1992.

[2] An Introduction To Wavelets, Analysis David Walnut, Edit.Birkhauser, 2002.