La curvatura relativa de curvas planas[1]

Juan Manuel Cordero Suárez
Profesor Escuela Colombiana de Ingenieros Julio Garavito
Bogotá D.C, Colombia
jcordero@escuelaing.edu.co

Resumen

Presentamos la noción de curvatura relativa, que surge del estudio, por parte de un observador en movimiento, de la curvatura de una curva recorrida por un objeto. Esta será la rapidez de cambio del ángulo formado por las direcciones del movimiento del objeto y del observador. Mostraremos cómo está la curvatura relativa relacionada con las curvaturas intrínsecas de las curvas en cuestión.

Introducción

La curvatura de una curva plana en cálculo diferencial se estudia mediante el análisis de la rapidez de cambio de su dirección al recorrer la curva, con respecto a una dirección fija, que por lo general está definida por el sistema de coordenadas utilizado.

La noción de curvatura relativa surge al hacer este mismo análisis, pero aceptando que la dirección de referencia puede variar a medida que se va recorriendo la curva. Para lograr esto podemos pensar en dos curvas, una, γ, cuya dirección servirá de referencia, y otra, β , a la que le estudiaríamos la curvatura al ser observada mientras se recorre γ.

Al analizar el comportamiento del ángulo formado por las direcciones de las mismas en tiempos simultáneos encontramos que la curvatura relativa de β con respecto a γ es la curvatura de β menos la de

[1]Quiero agradecer al profesor Ernesto Acosta Gempeler de la Escuela Colombiana de Ingeniería por sus observaciones y su orientación en la escritura del presente artículo.

Presentaremos en una primera sección la noción de curvatura intrínseca de una curva y en una segunda la noción de curvatura relativa, demostrando la relación existente entre estas curvaturas.

1. Curvatura Intrínseca de una Curva

Supongamos que un punto P se mueve en el plano describiendo una curva β rectificable (es decir, podemos calcular la longitud de arco de cualquier trozo de curva). Para localizar la posición del punto, introducimos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y la longitud de arco desde un cierto punto $P_0 = \beta(0)$ de la curva. Así, después de haber recorrido una distancia s, el punto se encuentra en la posición $\beta(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$. Si además suponemos que β es diferenciable en todo punto, es decir $x(s)$ y $y(s)$ lo son para todo s, se tiene que $\beta' = \vec{T}(s)$ es el vector tangente unitario a la curva β en el punto $\beta(s)$ [Tom, pgs 526-538].

Es claro que si el punto P no cambia su dirección cuando se mueve en el plano, el vector tangente unitario será el mismo durante el recorrido y por consiguiente la derivada de $\vec{T}$ será nula. Por definición, la curvatura $k(s)$ de la curva β en el punto $\beta(s)$ es la rapidez con que cambia la dirección del vector $\vec{T}$ en el punto $\beta(s)$.Es decir, si ϕ denota el ángulo que forma $\vec{T}(s)$ con $\vec{i}$ (dirección positiva del eje x), entonces

$$k(s) = \phi'(s)$$

Es claro que, en términos de ϕ, el vector $T\vec{(s)}$ se escribe como

$$\vec{T} = \cos\phi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\phi\,\vec{j}$$

y que $\frac{d\vec{T}}{d\phi} = -\operatorname{sen}\phi\,\vec{i} + \cos\phi\,\vec{j}$, es un vector unitario perpendicular a $\vec{T}$. Este es el vector normal unitario $\vec{N}(s)$ a la curva β en el punto $\beta(s)$. Se tiene entonces que

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{ds} = \vec{N}\cdot k$$

de donde se deduce que

$$\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = k$$

(ver [Tom, pgs 526-538]).

Esta última aparece en algunos textos como definición de curvatura, pero lo importante de esta expresión es que muestra que el concepto de curvatura no depende del sistema de coordenadas escogido (ver por ejemplo [Ste, pag. 718]). Por eso es que se dice que k es la curvatura intrínseca de la curva β.

Vemos los siguientes ejemplos. Consideremos $\beta(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$, que es la parametrización de una parábola. Como el parámetro t no es la longitud de arco de la parábola podemos calcular k usando la regla de la cadena así:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k \cdot \frac{ds}{dt}$$

Es decir,

$$k = \frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{ds}{dt}}$$

Se tiene entonces que, como $\beta'(t) = \vec{i} + 2t\,\vec{j}$, $\phi(t) = \arctan(2t)$ y $\frac{ds}{dt} = (1+4t^2)^{\frac{1}{2}}$. Por consiguiente

$$k(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La curvatura de la parábola en el punto $\beta(t)$ es $k(t)$. Sea ahora

$$\gamma(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\,\vec{j}$$

Se tiene que,$\gamma'(t) = -\operatorname{sen} t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$, $\phi(t) = -\arctan(\cot(t)) = t$ y $\frac{ds}{dt} = 1$. Por consiguiente

$$k(t) = 1,$$

para todo t. Este resultado era de esperarse, ya que γ no es otra cosa que una circunferencia de radio 1.

Otra fórmula útil para calcular la curvatura de β es la siguiente:

$$k(t) = \frac{|\beta'(t) \times \beta''(t)|}{|\beta'(t)|^3}$$

La deducción de esta fórmula requiere la descomposición del vector aceleración en sus componentes tangencial y normal. Aunque usaremos esta fórmula más adelante, no haremos su deducción. El lector interesado puede consultar por ejemplo [Smi, pag.1008]

2. Curvatura Relativa

Estudiemos ahora la curvatura de la curva β que está siendo observada por un observador en movimiento mientras se recorre la curva. Es decir, a medida que la curva β se recorre el observador recorre una curva γ. Para facilitar el estudio de la curvatura supondremos que tanto el observador como el recorrido de la curva β se hacen con rapidez 1. Es decir, $|\beta'| = |\gamma'| = 1$ en todo instante. Esto es equivalente a decir que β está parametrizada por la longitud de arco de γ y que con ese parámetro $|\beta'| = 1$ Se podría decir que estamos estudiando la curvatura de β usando un tiempo *"curvo"* (γ).

Sea ϕ el ángulo que forman los vectores $\beta'(s)$ y $\gamma'(s)$. Imitando la definición de curvatura intrínseca, definimos curvatura relativa de β con respecto a γ en el punto $\beta(s)$ como

$$k_\beta^\gamma = \frac{d\phi}{ds},$$

es decir, la rapidez de cambio del ángulo ϕ en el instante s.

La pregunta ahora es: ¿qué relación existe entre la curvatura relativa de β y las curvaturas intrínsecas de β y γ? Para responder esta pregunta necesitamos los siguientes resultados:

$$\vec{T}(s) = \gamma'(s), \qquad \vec{T}'(s) = k_\gamma(s)\vec{N}(s), \qquad y \qquad \vec{N}'(s) = -k_\gamma(s)\vec{T}(s).$$

(ver [Ste, pag. 723, ejercicio 42], caso de torsión 0). Los vectores $\vec{T}$ y $\vec{N}$ son los vectores tangencial unitario y normal unitario de γ y k_γ es la curvatura intrínseca de γ.

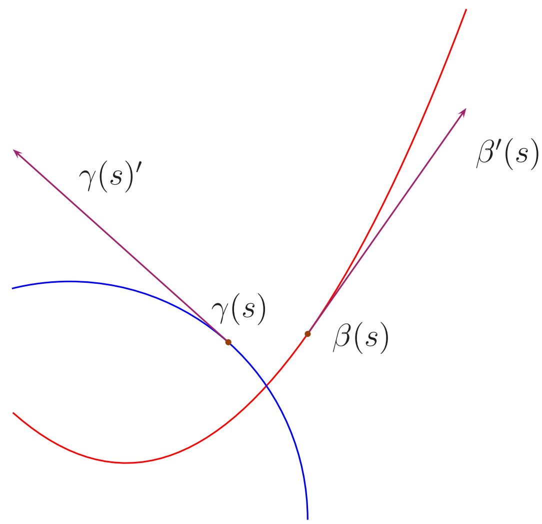

Figura: 1. Las posiciones $\beta(s)$ y $\gamma(s)$ y los vectores tangentes $\beta'(s)$ y $\gamma(s)'$

Obsérvese que, como

$$\beta'(s) \cdot \vec{T} = |\beta'(s)| \cdot |\vec{T}(s)| \cos\phi \qquad y \qquad \beta'(s) \cdot \vec{N} = |\beta'(s)| \cdot |\vec{N}(s)| \operatorname{sen}\phi,$$

se tiene que

$$\tan\phi = \frac{\vec{\beta}'(s) \cdot \vec{N}(s)}{\vec{\beta}'(s) \cdot \vec{T}(s)}$$

Luego

$$\phi = \arctan\Big(\frac{\vec{\beta}'(s) \cdot \vec{N}(s)}{\vec{\beta}'(s) \cdot \vec{T}(s)}\Big),$$

de donde,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{ds} &= \frac{1}{1+\Big(\dfrac{\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s)}{\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s)}\Big)^2} \\
&\qquad\cdot\frac{(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))'(\vec{\beta}'(s)\cdot T'(s))-(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))(\vec{\beta}'(s)\cdot T(s))'}{(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))^2} \\
&= \frac{(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))^2}{(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))^2+(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s))^2} \\
&\qquad\cdot\frac{(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))'(\vec{\beta}'(s)\cdot T'(s))-(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))(\vec{\beta}'(s)\cdot T(s))'}{(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))^2} \\
&= \frac{1}{|\vec{\beta}'(s)|^2}\cdot\big[(\vec{\beta}''(s)\cdot\vec{N}(s)+\vec{\beta}'(s))\cdot\vec{N}'(s)(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s)) \\
&\qquad\qquad -(\vec{\beta}''(s)\cdot\vec{T}(s)+\vec{\beta}'(s))\cdot\vec{T}'(s)(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))\big] \\
&= \begin{array}{c}(\vec{\beta}''(s)\cdot\vec{N}(s))(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s))-(\vec{\beta}''(s)\cdot\vec{T}(s))(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s)) \\ + \\ (\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}'(s))(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s))-(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}'(s))(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))\end{array} \\
&= -det\begin{vmatrix}\vec{\beta}''(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}''(s)\cdot\vec{T}(s)\\ \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s)\end{vmatrix}+det\begin{vmatrix}\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}'(s) & \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}'(s)\\ \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s)\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Como $\vec{N}'(s)=-k_\gamma\cdot\vec{T}(s)$ y $\vec{T}'(s)=k_\gamma\cdot\vec{N}(s)$ entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{ds} &= det\begin{vmatrix}\vec{\beta}''(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}''(s)\cdot\vec{T}(s)\\ \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s)\end{vmatrix}+det\begin{vmatrix}\vec{\beta}'(s)\cdot(-k_\gamma(s)\cdot\vec{T}(s)) & \vec{\beta}'(s)\cdot(k_\gamma(s)\cdot\vec{N}(s))\\ \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s)\end{vmatrix} \\
&= det\begin{vmatrix}\vec{\beta}''(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}''(s)\cdot\vec{T}(s)\\ \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s) & \vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s)\end{vmatrix}-k_\gamma(s)\cdot\Big((\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{T}(s))^2+(\vec{\beta}'(s)\cdot\vec{N}(s))^2\Big) \\
&= \text{Area del paralelogramo formado por } \vec{\beta}'(s) \text{ y } \vec{\beta}''(s)-k_\gamma(s)\cdot|\vec{\beta}'(s)|^2 \\
&= |\vec{\beta}'(s)\times\vec{\beta}''(s)|-k_\gamma(s).
\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $\vec{\beta}'(s)\times\vec{\beta}''(s)=\dfrac{\vec{\beta}'(s)\times\vec{\beta}''(s)}{|\vec{\beta}'(s)|^3}=k_\beta(s)$.Obtenemos la relación buscada

$$k_\beta^\gamma = k_\beta(s) - k_\gamma(s)$$

Podemos ver por ejemplo, cuál es la curvatura relativa de la parábola βcon respecto a al circunferencia γ de radio 1. De los ejemplos de la sección 1 tenemos que

$$k_\beta(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{y} \quad k_\gamma = 1,$$

y por consiguiente $k_\beta^\gamma(t) = \dfrac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} - 1$ es la curvatura relativa de β con respecto a γ en el punto $\beta(t)$.

Conclusiones

- Como se puede observar, la variación del ángulo ϕ con respecto al parámetro de longitud de arco s, es la diferencia de las curvaturas intrínsecas de las curvas β y de referencia γ y que viene dada por:

  $$\frac{d\phi}{ds} = k_\beta(s) - k_\gamma(s).$$

- Nótese que se ha escogido las longitudes de arco de las curvas como parámetro de ambas. Esto asegura que las rapidez con que se recorren es 1 lo que se simplifican enormemente los cálculos. La expresión que se obtiene demuestra nuevamente que la relatividad de la curvatura esta relacionada con la escogencia de la curva γ y no de ningún sistema de coordenadas. Se puede concluir que la curvatura relativa será intrínseca a las curvas β y γ.

- En los cálculos específicos hay que tener cuidado, ya que no siempre (casi nunca) se parametriza por longitud de arco. Por consiguiente, la interpretación de la fórmula de curvatura relativa debe hacerse bajo la escogencia posterior de los parámetros convenientes. En el caso de la parábola y la circunferencia hemos estado de buenas ya que la curvatura de la circunferencia es constante. En este caso, el parámetro t sirve para localizar la posición del punto donde estamos calculando la curvatura.

Bibliografía

[1] R. Smith y R. Minton , *Cálculo*, Tomo II, Mc Graw Hill, 2001.

[2] J. Stewart , Cálculo, *Conceptos y contextos*, International Thomson Editores, 1999

[3] G. Tomas, *Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica*, AGILAR, 1966.