Matemáticas recreativas

Octavio Montoya
Profesor Universidad del Tolima
Tolima, Colombia

Resumen

Se presentan algunas curiosidades de la aritmética.

Introducción

"Es mejor saber cosas inútiles, que no saber nada"

En el presente documento se presentan algunas curiosidades en aritmética, que permiten ver la matemáticas desde un punto de vista lúdico.

Los números inmodificables, multiplicación a la rusa y algunas sumas curiosas son los temas que se desarrollan a continuación con sus respectivas verificaciones. Es mi deseo, que el lector disfrute de estos tópicos, pues cuando nos divertimos con lo elemental con toda seguridad podremos llegar a la comprensión de los grandes conceptos de la matemática.

1. Los Inmodificables.

Definición 1. *Sea x un entero positivo de la forma $x = a_n a_{n-1} \cdots\cdots\cdots a_1 a_0$. El invertido de x ($inv(x)$) se define como: $(inv(x)) = a_0 a_1 \cdots\cdots\cdots a_{n-1} a_n$*

Teorema 1. *(El inmodificable 1089). Si x es un entero positivo de la forma $x = a_2 a_1 a_0$, dónde , $a_2 \neq a_0$, entonces $|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)| = 1089$.*

Demostración. Supongamos que $x = a_2 a_1 a_0$, dónde $a_2 > a_0$.

$$x = a_2 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_0$$
$$inv(x) = a_0 \cdot 100 + a_1 \cdot 10 + a_2$$

Como $a_2 > a_0$ y necesitamos calcular $x - inv(x)$, es necesario representar x de la siguiente manera:

$$x = (a_2 - 1) \cdot 100 + (a_1 + 9) \cdot 10 + (a_0 + 10).$$

Luego

$$x - inv(x) = (a_2 - 1 - a_0) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + (a_0 + 10 - a_2).$$

de donde

$$inv(x - inv(x)) = (a_0 + 10 - a_2) \cdot 100 + 9 \cdot 10 + (a_2 - 1 - a_0).$$

Por tanto

$$x - inv(x) - inv(x - inv(x)) = 900 + 180 + 9 = 1089.$$

La verificación anterior es análoga si se supone que $a_0 > a_2$. $\square$

Observación. $1089 - inv(1089) - inv(1089 - inv(1089)) = 1089$.

Corolario 1. *(El inmodificable 99). Si x es un entero positivo de la forma $x = a_1a_0$ dónde $a_1 \neq a_0$, entonces $|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)| = 99$.*
Verificación para el lector.

Teorema 2. *(Conjunto inmodificable base 10). Sea x un entero positivo en base 10, de la forma $x = a_na_{n-1}\cdots\cdots\cdots$.*
Los dígitos del numero $|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)|$ siempre están en el conjunto $\{1, 0, 8, 9\}$.

Verificación para el lector.

Ejemplo 1. *Sea $x = 1245$*

$$|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)| = 10890$$

Ejemplo 2. *Sea $x = 70021$*

$$|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)| = 99099$$

Los argumentos anteriores se pueden extender a otras bases, por ejemplo:

Teorema 3. *Si x es un entero positivo en base 2, de la forma $x = a_2a_1a_0$, dónde $a_2 \neq a_0$, entonces $|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)| = 1001$.*

Demostración. Supongamos que $x = a_2a_1a_0$, dónde $a_2 > a_0$.

$$x = a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a_0$$
$$x = a_0 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2^1 + a^2$$

Como $a_2 > a_0$ y necesitamos calcular $x - inv(x)$, es necesario representar x de la siguiente manera:

$$x = (a_2 - 1) \cdot 2^2 + (a_1 + 1) \cdot 2^1 + a_0 + 2$$

Luego

$$x - inv(x) = (a_2 - 1 - a_0) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + a_0 + 2 - a_2$$

de donde

$$inv(x - inv(x)) = (a_0 + 2 - a_2) \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + (a_2 - 1 - a_0).$$

Por tanto

$$x - inv(x) - inv(x - inv(x)) = 2^2 + 2^2 + 1 = 2^3 + 1 = 1001$$

La verificación anterior es análoga si se supone que $a_0 > a_2$. □

Teorema 4. *(Conjunto inmodificable base 2). Sea x un entero positivo en base 2, de la forma $x = a_na_{n-1} \cdots\cdots\cdot a_1a_0$*
Los dígitos del numero $|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)|$ siempre están en el conjunto $\{0, 1\}$.

Verificación para el lector.

Si el lector, repite el algoritmo anterior en cualquier base, podría deducir:

Teorema 5. *(Conjunto inmodificable base b). Sea x un entero positivo en base b, de la forma $x = a_n a_{n-1} \cdots\cdots\cdot a_1 a_0$.*
Los dígitos del numero $|x - inv(x)| + inv|x - inv(x)|$ siempre están en el conjunto $\{0, 1, b-1, b-2\}$.

Verificación para el lector.

Dejamos al lector el descubrimiento de nuevas curiosidades de la función $inv(x)$.

2. Multiplicación a la Rusa.

Una de las dificultades que los muchachos tienen cuando comienzas a aprender las operaciones básicas, esto es, suma, resta, multiplicación y división, es la de memorizarse las llamadas tablas de multiplicar; sin ellas nunca hubiéramos aprendido a dividir.

A continuación presentamos un método para multiplicar números enteros con solo la tabla del 2.

Teorema 6. *(Multiplicación a la Rusa). Sean m_0 y n_0 dos enteros positivos y las sucesiones finitas $m_i = \dfrac{m_{i-1}}{2}, n_i = 2n_{i-1},\ i = 1, 2, 3, \cdots k$ donde $m_k = 1$. (Si m_{i-1} es impar definimos la mitad como $\dfrac{m_{i-1} - 1}{2}$, para evitar números no enteros). Las sucesiones las podemos presentar en un cuadro así:*

m_0	n_0
m_1	n_1
m_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
m_i	n_i
$\vdots$	$\vdots$
m_{k-2}	n_{k-2}
m_{k-1}	n_{k-1}
$m_k = 1$	n_k

Se cumple que $m_0 \cdot n_0$ *es la suma de los donde* m_i *es impar.*

Lo anterior se puede ilustrar con un ejemplo:

Ejemplo 3. *Calcular* 9×8.

$m_0 = 9$	$n_0 = 8$
$m_1 = 4$	$n_1 = 16$
$m_2 = 2$	$n_2 = 32$
$m_3 = 1$	$n_3 = 64$
$m_0 \cdot n_0 = n_0 + n_3 = 8 + 64 = 72$	

Se puede verificar fácilmente que $9 \times 8 = 8 \times 9$.

Verificación del teorema 6.

Sean m_0 y n_0 dos enteros positivos. Es evidente que m_0 y n_0 se pueden representar como polinomios en base 2, es decir, de la forma:

$$\begin{aligned} m_0 =& a_i 2^i + a_{i-1} 2^{i-1} + \cdots\cdots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\ n_0 =& b_j 2^j + b_{j-1} 2^{j-1} + \cdots\cdots + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0 \end{aligned}$$

donde los a_i es 0 ó 1 y b_j es 0 ó 1.

Elaborando el cuadro de la hipótesis tenemos:

$m_0 = a_i 2_i + a_{i-1} 2^{i-1} + \cdots + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0$	$n_0 = b_j 2_j + b_{j-1} 2^{j-1} + \cdots + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0$
$m_1 = a_i 2_{i-1} + a_{i-1} 2^{i-2} + \cdots + a_2 2^1 + a_1 + 0$	$n_1 = b_j 2_{j+1} + b_{j-1} 2^j + \cdots + b_2 2^3 + b_1 2^2 + b_0 2^1$
$m_2 = a_i 2_{i-2} + a_{i-1} 2^{i-3} + \cdots + a_2 + 0 + 0$	$n_2 = b_j 2_{j+2} + b_{j-1} 2^{j+1} + \cdots + b_2 2^4 + b_1 2^3 + b_0 2^2$
$\vdots$	$\vdots$
$m_k = a_i 2_{i-k} + \cdots + a_k + 0 + \cdots + 0$	$n_k = b_j 2_{j+k} + b_{j-1} 2^{j+k-1} + \cdots + b_1 2^{k+1} + b_0 2^{k+1} + b_0 2^k$
$m_i = a_i + 0 + \cdots\cdots + 0$	$n_i = b_j 2_{j+i} + b_{j-1} 2^{j+i-1} + \cdots + b_1 2^{i+1} + b_0 2^i$

Multiplicando los términos $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, a_i$ con

$b_j2^j + b_{j-1}2^{j-1} + \cdots + b_22^2 + b_12^1 + b_02^0, b_j2^{j+1} + b_{j-1}2^j + \cdots + b_22^3 + b_12^2 + b_02^1, b_j2^{j+2} + b_{j-1}2^{j+1} + \cdots + b_22^4 + b_12^3 + b_02^2, b_j2^{j+k} + b_{j-1}2^{j+k-1} + \cdots + b_12^{k+1} + b_02^k, b_j2^{j+i} + b_{j+i-1} + \cdots + b_12^{i+1} + b_02^i$

respectivamente, tenemos que

$$a_0\sum_{k=0}^{j} b_k2^k + 2a_1\sum_{k=0}^{j} b_k2^k + 2^2a_2\sum_{k=0}^{j} b_k2^k + \cdots + 2^ia_i\sum_{k=0}^{j} b_k2^k$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{j} b_k2^k\right)\left(\sum_{k=0}^{j} a_k2^k\right)$$

$$= m_0n_0$$

En la expresión anterior se puede observar:

Si $a_k = 0$ (esto indica que $a_i2^{i-k} + \cdots + a_k$ es par) entonces el término $b_j2^{j+k} + \cdots + 2^kb_0$ no aparece en la suma anterior, de otro lado si $a_k = 1$ (esto indica que $a_i2^{i-k} + \cdots + a_k$ es impar) entonces el termino $b_j2^{j+k} + \cdots + 2^kb_0$ aparece.

Por tanto $m_0 \cdot n_0$ es la suma de los n_i donde m_i es impar.

Observación. Un teorema análogo al teorema 6 es:

Teorema 7. *Sean m_0 y n_0 dos enteros positivos y las sucesiones finitas $m_i = \dfrac{m_{i-1}}{2}, n_i = 2n_{i-1}, i = 1, 2, 3, \cdots, k$ donde $m_k = 1$. (Si m_{i-1} es impar definimos la mitad como $\dfrac{m_{i-1}+1}{2}$, para evitar números no enteros). Las sucesiones las podemos presentar en un cuadro así:*

m_0	n_0
m_1	n_1
m_2	n_2
$\vdots$	$\vdots$
m_i	n_i
$\vdots$	$\vdots$
m_{k-2}	n_{k-2}
m_{k-1}	n_{k-1}
$m_k = 1$	n_k

Se cumple que $m_0 \cdot n_0$ *es* n_k *menos la suma de los* n_i *donde* m_i *es impar.*

Lo anterior se puede ilustrar con un ejemplo:

Teorema 8. *Calcular* 13×25

$m_0 = 13$	$n_0 = 25$
$m_1 = 7$	$n_1 = 50$
$m_2 = 4$	$n_2 = 100$
$m_3 = 2$	$n_3 = 200$
$m_4 = 1$	$n_4 = 400$
$m_0 \cdot n_0 = n_4 - n_1 - n_0 = 400 - 50 - 25 = 325$	

La verificación del teorema anterior la dejamos al lector.

3. Una Suma Misteriosa.

Observe la siguiente suma:

$$2304 + 3582 + 6417 + 6542 + 3457 = 22338$$

Note que la suma es anteponerle al primer sumando el número 2 y al número resultante se le resta 2, es decir:

$$22340 - 2 = 22338.$$

Observe la siguiente suma:

$$231 + 548 + 451 + 621 + 378 + 600 + 399 = 3228$$

Note que la suma es anteponerle al primer sumando el número 3 y al número resultante se le resta 3, es decir:

$$3231 - 3 = 3228.$$

Observe la siguiente suma:

$$5 + 9 + 9 + 9 + 9 = 41.$$

Note que la suma es anteponerle al primer sumando 4 y al numero resultante se le resta 4, es decir:

$$45 - 4 = 41.$$

Si el lector analiza cuidadosamente los sumandos de los casos anteriores puede deducir:

Afirmación 1. *Sean* $a_1a_0, b_1b_0, c_1c_0, d_1d_0, e_1e_0$ *números enteros positivos de 2 dígitos donde* $b_0 + c_0 = 9, b_1 + c_1 = 9, d_1 + e_1 = 9,$ *y* $d_0 + d_0 = 9$ *Se cumple que la suma de los enteros anteriores*
Anteponerle el numero 2 al numero a_1a_0 *y al resultado restarle 2, es decir, al suma es* $2a_1a_0 - 2$*. Verificación. Es evidente que la suma de los números anteriores es* $a_1a_0 + 198$*. Este número se puede escribir así:*

$$a_1a_0 + 200 - 2.$$

Lo cual indica que la suma es

$$2a_1a_0 - 2.$$

El lector puede verificar fácilmente que:

Afirmación 2. *Sean* a_1a_0, b_1b_0, c_1c_0, d_1d_0, e_1e_0, f_1f_0, g_1g_0 *números enteros positivos de 2 dígitos donde* $b_0 + c_0 = 9$, $b_1 + c_1 = 9$, $d_1 + e_1 = 9$, $d_0 + d_0 = 9$, $f_1 + g_1 = 9$ *y* $f_0 + g_0 = 9$*. Se cumple que la suma de los enteros anteriores es*

Anteponerle el número 3 al número $a_1{}^a{}_0$ y al resultado restarle 3, es decir, al suma es

$$3a_1a_0.$$

Las afirmaciones anteriores se pueden generalizar para enteros positivos de más dígitos y más sumandos, conservando las mismas características.