

SUPERFICIES PARALELEPIPÉDICAS Y OTRAS PARALELOGRAMOIDES

Luis Enrique Ruiz Hernández

Profesor Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Duitama, Colombia

leruizh@hotmail.com

Resumen

Si \mathfrak{A} es un intervalo cerrado en \mathbb{R}^3 se demuestra que existe una función continua $F : \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1})$ es una superficie paralelepipedica (salvo una cara) no degenerada. También, a partir de una superficie pentaédrica del tipo anterior, se construye una representación vectorial de la misma. Además, se introduce una función convexa no negativa $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi^{-1}(r)$ es una superficie paralelepipedica no degenerada, para cada $r > 0$. El caso inverso también es tratado: si \mathcal{P} es un paralelepipedo tridimensional dado, se construye una representación cartesiana de la frontera de \mathcal{P} . Finalmente, se acuña una función continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f([a, b])$ es una superficie poliédrica de caras paralelogramoides, determinadas por una partición $P_1 \times P_2$ del intervalo cerrado $[a, b]$ en \mathbb{R}^2 . La traza $f(\mathbb{R}^2 \sim [a, b])$ es una superficie poliédrica de caras planas no acotadas de dos especies.

Introducción

Hay una gran ausencia de conocimientos específicos sobre la geometría de las superficies poliédricas ensambladas de paralelogramos en \mathbb{R}^3 . Unas son abiertas como en las Figuras 1 y 3, y otras cerradas como en el caso del paralelepipedo, y en general las superficies zonoédricas acotadas por paralelogramos ([2] pp. 27 - 30; [6] pp. 39 - 54; [7] pp. 241 - 243).

En el presente documento se acomete el estudio riguroso de las superficies paralelepipedicas no degeneradas y de las superficies abiertas ensam-

bladas de paralelogramos y ciertas caras planas no acotadas (Ver Figura 3). Ambas superficies serán tratadas paraméricamente, además de obtener la primera superficie como un lugar geométrico de puntos en \mathbb{R}^3 sujetos a ciertas propiedades métricas.

Las superficies paralelepípedicas abiertas por una cara (las que resultan al omitir una cara en la frontera de un paralelepípedo, ver Figura 1) no se han indagado hasta el presente desde el punto de vista paramérico. Aquí abordaremos su geometría introduciendo un intervalo cerrado \mathfrak{A} en \mathbb{R}^2 y una función $F : \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya expresión es una representación vectorial unificada de una superficie paralelepípedica $F(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1})$ abierta por una cara, describiéndose minuciosamente sus vértices, aristas y caras como imágenes de partes del dominio, bajo F (Teorema 1.1). Además, dada una superficie paralelepípedica del tipo anterior, se construye su representación vectorial a partir de sus vértices (Corolario 1.2).

Igualmente, se introduce una función convexa no negativa φ sobre \mathbb{R}^3 cuyo conjunto de nivel $\varphi^{-1}(r)$ es una superficie paralelepípedica no degenerada, para todo $r > 0$ (Teorema 2.1). A la inversa, a partir de un paralelepípedo tridimensional \mathfrak{P} se construye la ecuación cartesiana unificada de la frontera de \mathfrak{P} (Corolario 2.2), hecho que rematamos con la Ilustración 2.3.

Posteriormente se investigan las superficies poliédricas ensambladas de paralelogramos y otras caras no acotadas. Sean, $[a, b]$ un intervalo cerrado en \mathbb{R}^2 dado, y $P = P_1 \times P_2$ una partición de $[a, b]$. Se construye una función continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en términos de P , de dos matrices reales de órdenes $|P_1| \times 3$ y $|P_2| \times 3$, y tres vectores constantes en \mathbb{R}^3 , con las siguientes cuatro propiedades geométricas:

- i)* La imagen bajo f de cada subrectángulo de P (Ver Figura 2) es un paralelogramo en \mathbb{R}^3
- ii)* La imagen bajo f de la unión de dos subrectángulos adyacentes de P , es la unión de dos paralelogramos adyacentes en \mathbb{R}^3
- iii)* $f([a, b])$ es una superficie $(|P_1| - 1)(|P_2| - 1)$ -édrica de caras paralelogramoides de $|P_1||P_2|$ vértices

iv) $f(\mathbb{R}^{+2} \sim [a, b])$ es una superficie $2(|P_1| + |P_2|)$ -édrica de caras planas no acotadas, $2(|P_1| + |P_2| - 2)$ caras de la misma especie, y cuatro caras que son regiones angulares las cuales se alternan con grupos de $|P_1| - 1$ y $|P_2| - 1$ caras de la misma especie, alrededor de $f([a, b])$.

Es decir, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa paramétricamente una superficie $(|P_1| + 1)(|P_2| + 1)$ -édrica en \mathbb{R}^3 , con las propiedades descritas anteriormente (Ver Figura 3). La descripción detallada de las propiedades geométricas de la traza de f se consignan en el Teorema 3.1.

La naturaleza metodológica del trabajo aquí desarrollado, es una articulación novedosa de nociones de álgebra lineal, topología y análisis convexo, en un contexto que contrasta con lo clásico y tradicional.

Denotaremos con letra imprenta mayúscula los puntos o vectores (fila) de \mathbb{R}^3 , el producto interior usual mediante un punto \cdot y el producto vectorial por una cruz \times .

1. Parametrización y Geometría de una Superficie Paralelepípedica

Si $V_1 \in \mathbb{R}^3$ y W_1, W_2, W_3 son vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , entonces el conjunto

$$\mathcal{P} = \{V_1 + \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\},$$

Los teoremas 1.1, 2.1, 3.1 y los corolarios 1.2 y 2.2, consignados en la presente investigación, constituyen aportes originales, concebidos y demostrados por el autor.

es llamado un **paralelepípedo tridimensional** generado por W_1, W_2, W_3 ([3] pp. 337 - 340, [2] pp. 122 - 124). Los 2^3 puntos

$$V_1 + \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 \quad , \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \{0, 1\}^3,$$

son los vértices de \mathcal{P} . En el siguiente teorema usaremos estas nociones.

1.1. Teorema

Sean A, B, C y D vectores dados en \mathbb{R}^3 tales que A, B y C son linealmente independientes, y hagamos

$$\mathfrak{A} = [-1, 2] \times [0, 1] \tag{1.1.1}$$

Consideremos la función

$$F : \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1} \rightarrow \mathbb{R}^3 \tag{1.1.2}$$

definida por

$$F(u, v) = (|u| + |v|)A + (|u - 1| + |v - 1|)B + (|v| - |v - 1|)C + D, \tag{1.1.3}$$

para todo $(u, v) \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}$, expresión que representa vectorialmente una superficie en \mathbb{R}^3 .

Entonces la traza de F , es decir, $F(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1})$, es la superficie de un paralelepípedo (salvo una cara) no degenerado de vértices

$$\begin{aligned} V_1 &= F(1, 1) = 2A + C + D, \\ V_2 &= F(0, 1) = A + B + C + D, \\ V_3 &= F(0, 0) = 2B - C + D, \\ V_4 &= F(1, 0) = A + B - C + D, \\ V_5 &= F(-1, 0) = F(0, -1) = A + 3B - C + D, \\ V_6 &= F(1, -1) = F(2, 0) = 2A + 2B - C + D, \\ V_7 &= F(1, 2) = F(2, 1) = 3A + B + C + D, \\ V_8 &= F(-1, 1) = F(0, 2) = 2A + 2B + C + D, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

dispuestas como se muestra en la Figura 1, aristas

$$\begin{aligned}
 \overline{V_1V_2} &= F([0, 1] \times \{1\}), & \overline{V_2V_3} &= F(\{0\} \times [0, 1]), \\
 \overline{V_3V_4} &= F([0, 1] \times \{0\}), & \overline{V_4V_1} &= F(\{1\} \times [0, 1]), \\
 \overline{V_1V_7} &= F(\{1\} \times [1, 2]) = F([1, 2] \times \{1\}), \\
 \overline{V_2V_8} &= F(\{0\} \times [1, 2]) = F([-1, 0] \times \{1\}), \\
 \overline{V_2V_8} &= F(\{0\} \times [1, 2]) = F([-1, 0] \times \{1\}), \\
 \overline{V_3V_5} &= F(\{0\} \times [-1, 0]) = F([-1, 0] \times \{0\}), & (1.1.5) \\
 \overline{V_4V_6} &= F(\{1\} \times [-1, 0]) = F([1, 2] \times \{0\}), \\
 \overline{V_7V_8} &= F([0, 1] \times \{2\}), & \overline{V_8V_5} &= F(\{-1\} \times [0, 1]), \\
 \overline{V_5V_6} &= F([0, 1] \times \{-1\}), & \overline{V_6V_7} &= F(\{2\} \times [0, 1]),
 \end{aligned}$$

y caras

$$\begin{aligned}
 F([0, 1]^2) &= \text{conv}V_1, \dots, V_4, \\
 F([1, 2] \times [0, 1]) &= \text{conv}\{V_1, V_7, V_6, V_4\}, \\
 F([0, 1] \times [1, 2]) &= \text{conv}\{V_1, V_7, V_8, V_2\}, & (1.1.6) \\
 F([-1, 0] \times [0, 1]) &= \text{conv}\{V_2, V_8, V_5, V_3\}, \\
 F([0, 1] \times [-1, 0]) &= \text{conv}\{V_4, V_6, V_5, V_3\},
 \end{aligned}$$

la envolvente convexa de los vértices de los paralelogramos mostrados en la Figura 1.

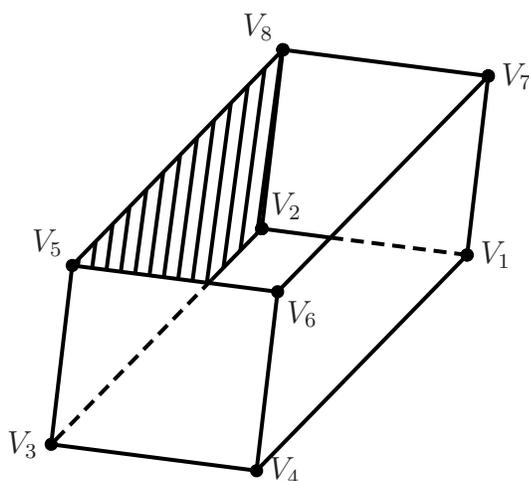


Figura: 1. La superficie paralelepípedica $F(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1})$

Demostración. Hagamos

$$W_1 = -A + B, \quad W_2 = -A + B - 2C, \quad \text{y} \quad W_3 = A + B \quad (1.1.7)$$

Entonces, aplicando las propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned} \det(W_1, W_2, W_3) &= \det(-A + B, -A + B - 2C, A + B) \\ &= \det(2B, 2B - 2C, A + B) = 2 \det(B, B - C, A + B) \\ &= 2 \det(B, -C, A) = -2 \det(A, B, C) \neq 0, \end{aligned}$$

dado que, por hipótesis, los vectores A , B y C son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 . Por lo tanto, el conjunto

$$\mathcal{P} = \{V_1 + \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\},$$

es un paralelepípedo tridimensional generado por W_1, W_2, W_3 de vértices

$$\begin{aligned} V_1 + 0 \cdot W_1 + 0 \cdot W_2 + 0 \cdot W_3 &= V_1, & V_1 + 1W_1 + 0W_2 + 0W_3 &= V_2, \\ V_1 + 1W_1 + 1W_2 + 0W_3 &= V_3, & V_1 + 0W_1 + 1W_2 + 0W_3 &= V_4, \\ V_1 + W_1 + W_2 + W_3 &= V_5, & V_1 + 0W_1 + W_2 + W_3 &= V_6, \\ V_1 + 0W_1 + 0W_2 + W_3 &= V_7, & V_1 + W_1 + 0W_2 + W_3 &= V_8, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

a la luz de (1.1.7) y la expresión que define a V_1 en (1.1.4). Consecuentemente los puntos V_1, \dots, V_8 listados en (1.1.4) son justamente los vértices de \mathcal{P} dispuestos como se muestra en la Figura 1.

Percibiendo que el producto cartesiano $[0, 1] \times \{1\}$ es un segmento cerrado de recta (¡un conjunto convexo!) de extremos $(0, 1)$ y $(1, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} F([0, 1] \times \{1\}) &= F(\{(1 - \lambda)(0, 1) + \lambda(1, 1) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}) \\ F &= (\{(\lambda, 1) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}) = \{F(\lambda, 1) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \\ &= \{(\lambda + 1)A + (1 - \lambda)B + C + D \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} && \text{(Por (1.1.3))} \\ &= \{\lambda V_1 + (1 - \lambda)V_2 \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} && \text{(Por (1.1.4))} \\ &= \overline{V_1 V_2} \end{aligned}$$

Análogamente se prueban las demás relaciones en (1.1.5). Ahora probaremos las afirmaciones en (1.1.6). Haciendo notar que $[0, 1] \times [1, 2]$ es una región rectangular cerrada de vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$ y $(0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} F([0, 1] \times [1, 2]) &= F(\{\lambda_1(1, 1) + \lambda_2(1, 2) + \lambda_3(0, 2) + \lambda_4(0, 1) \\ &\quad \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \lambda_1 + \dots + \lambda_4 = 1\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= F(\{(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4) \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1\}) \\
 &= F(\{(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3 + 1) \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1\}) \\
 &= \{F(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 + \lambda_3 + 1) \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1\} \\
 &= \{(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 1)A + (1 - \lambda_1 + \lambda_3)B + C + D \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y} \\
 &\quad \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1\} \tag{Por (1.1.3)} \\
 &= \{(2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4)A + (\lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4)B + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_4)C \\
 &\quad + (\lambda_1 + \cdots + \lambda_4)D \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1\} \\
 &= \{\lambda_1(2A + C + D) + \lambda_2(3A + B + C + D) + \lambda_3(2A + 2B + C + D) \\
 &\quad + \lambda_4(A + B + C + D) \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1\} \\
 &= \{\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_7 + \lambda_3 V_8 + \lambda_4 V_2 \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ y } \lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1\} \tag{Por (1.1.4)} \\
 &= \text{conv}\{V_1, V_7, V_8, V_2\} \\
 &= \text{Región cerrada encerrada por el paralelogramo } V_1 V_7 V_8 V_2
 \end{aligned}$$

Similarmente se prueban las demás relaciones en (1.1.6). Ahora, teniendo para \mathfrak{A} en (1.1.1) la siguiente representación

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A} &= ([-1, 0] \cup [0, 1] \cup [1, 2]) \times [0, 1] \\
 &= [-1, 0] \times [0, 1] \cup [0, 1]^2 \cup [1, 2] \times [0, 1],
 \end{aligned}$$

entonces

$$\mathfrak{A}^{-1} = [0, 1] \times [-1, 0] \cup [0, 1]^2 \cup [0, 1] \times [1, 2]$$

Así $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}$, el dominio de F según (1.1.2), es la unión de cinco productos cartesianos, por lo cual la traza de F es

$$\begin{aligned}
 F(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}) &= F([0, 1]^2 \cup [1, 2] \times [0, 1] \cup [0, 1] \times [1, 2] \cup [-1, 0] \times [0, 1] \cup [0, 1] \\
 &\quad \times [-1, 0]) \\
 &= F([0, 1]^2) \cup F([1, 2] \times [0, 1]) \cup F([0, 1] \times [1, 2]) \cup F([-1, 0] \\
 &\quad \times [0, 1]) \cup F([0, 1] \times [-1, 0]),
 \end{aligned}$$

precisamente la unión de cada una de las regiones cerradas paralelogramoides descritas en (1.1.6), con vértices y aristas según (1.1.4) y (1.1.5).

Recíprocamente, dada una superficie paralelepípedica, salvo una cara, hallaremos a continuación su representación paramétrica. \square

1.2. Corolario

Consideremos en \mathbb{R}^3 una superficie paralelepédica \mathfrak{F} dada, no degenerada de vértices V_1, \dots, V_8 dispuestos como se muestra en la Figura 1, y abierta por la cara $V_5 \cdots V_8$, de aristas laterales $\overline{V_i V_{4-2|i-2|+2|i-3|}}$, $i = 1, \dots, 4$. Si \mathfrak{A} es el rectángulo cerrado (1.1.1), entonces la función

$$F : \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (1.2.1)$$

definida por

$$\begin{aligned} F(u, v) = & \frac{1}{2}(|u| + |v|)(V_7 - V_2) + \frac{1}{2}(|u - 1| + |v - 1|)(-2V_1 + V_2 + V_7) \\ & + \frac{1}{2}(|v| - |v - 1|)(V_2 - V_4) + \frac{1}{2}(3V_1 + V_3 - 2V_7), \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

para todo $(u, v) \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}$,

para todo $(u, v) \in \mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}^{-1}$, representa vectorialmente la superficie \mathfrak{F} de vértices como se indica en (1.1.4) (omitiendo la última igualdad para cada V_i), aristas y caras como en (1.1.5) y (1.1.6), respectivamente.

Demostración. Hagamos

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}(V_7 - V_2) & , B = \frac{1}{2}(-2V_1 + V_2 + V_7), \\ C = \frac{1}{2}(V_2 - V_4) & , D = \frac{1}{2}(3V_1 + V_3 - 2V_7) \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Entonces, de acuerdo a las propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned} \det(A, B, C) &= \frac{1}{8} \det(V_7 - V_2, -2V_1 + V_2 + V_7, V_2 - V_4) \\ &= \frac{1}{8} \det(2V_1 - 2V_2, -2V_1 + V_2 + V_7, V_2 - V_4) \\ & \hspace{15em} (\text{restando la segunda fila a la primera}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \det(V_2 - V_1, V_2 - V_4, -2V_1 + V_2 + V_7) \\
 &= \frac{1}{4} \det(V_2 - V_1, (V_1 - V_4) + (V_2 - V_1), -2V_1 + V_2 + V_7) \\
 &= \frac{1}{4} \det(V_2 - V_1, V_1 - V_4, 2V_1 - V_2 - V_7) \\
 &= \frac{1}{4} \det(V_2 - V_1, V_1 - V_4, V_1 - V_7) \\
 &\hspace{15em} (\text{sumando la primera fila a la tercera}) \\
 &= \frac{1}{4} \det(V_2 - V_1, V_4 - V_1, V_7 - V_1) \neq 0 \quad (\text{Ver Figura 1}),
 \end{aligned}$$

dato que \mathfrak{F} es un poliedro no degenerado. Por tanto, \mathfrak{A} , A , B , C y D satisfacen todas las hipótesis del teorema 1.1. Sustituyendo las expresiones (1.2.3) en (1.1.3) se obtiene la representación (1.2.2) de la función (1.2.1). Puede así verificarse que cada V_i es la imagen bajo F de los puntos indicados en (1.1.4), y consecuentemente la veracidad de las relaciones en (1.1.5) y (1.1.6) \square

2. Representación Cartesiana de una Superficie Paralelepipedica

2.1. Teorema

Sean $r > 0$ y A, B, C, G vectores dados en \mathbb{R}^3 tales que A, B, C son linealmente independientes, es decir,

$$\Delta = \det(A, B, C) \neq 0 \tag{2.1.1}$$

Consideremos la función convexa $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(X) = \max\{|A \cdot (X - G)|, |B \cdot (X - G)|, |C \cdot (X - G)|\}, \tag{2.1.2}$$

para todo $X \in \mathbb{R}^3$, y el conjunto de nivel

$$\mathfrak{F} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X) = r\} \tag{2.1.3}$$

Entonces \mathfrak{F} es una superficie paralelepipedica no degenerada de centro G y vértices

$$\begin{cases} V_1 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B + B \times C + C \times A), \\ V_2 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B - B \times C + C \times A), \\ V_3 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B - B \times C - C \times A), \\ V_4 = G + \frac{r}{\Delta}(A \times B + B \times C - C \times A), \\ V_{i+4} = 2G - V_i, \quad i = 1, \dots, 4, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

dispuestos como se muestra en la Figura 1 (en este caso se incluye la cara $V_5 \cdots V_8$).

Demostración. Hagamos

$$\begin{aligned} W_1 &= -\frac{2r}{\Delta} B \times C, \\ W_2 &= -\frac{2r}{\Delta} C \times A, \\ W_3 &= -\frac{2r}{\Delta} A \times B, \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \det(W_1, W_2, W_3) &= -\frac{8r^3}{\Delta^3} \det(B \times C, C \times A, A \times B) \\ &= -\frac{8r^3}{\Delta^3} (B \times C) \cdot (C \times A) \times (A \times B) \\ &= -\frac{8r^3}{\Delta^3} (B \times C) \cdot (C \times A \cdot B)A \quad ([1], \text{ p. 492}) \\ &= -\frac{8r^3}{\Delta^3} (A \cdot B \times C)^2 \\ &= -\frac{8r^3}{\Delta^3} \cdot \Delta^2 = -\frac{8r^3}{\Delta^3} \neq 0 \quad (\text{por (2.1.1)}) \end{aligned}$$

Por lo tanto W_1, W_2, W_3 son vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 y consecuentemente el conjunto

$$\mathcal{F} = \{V_1 + \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2 + \lambda_3 W_3 \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

es un paralelepípedo tridimensional generado por W_1, W_2, W_3 . De vértices V_1, \dots, V_8 dispuestos como en la Figura 1 y representados, según (1.1.8), por las expresiones en (2.1.4), teniendo presente $V_4 = V_1 - V_2 + V_3$ propiedad que rige para todo paralelogramo $V_1 \cdots V_4$.

Ahora, puesto que

$$\mathcal{P} = \text{conv}V_1, \dots, V_8$$

la envolvente convexa de los vértices de \mathcal{P} ([4] p. 158, Theorem 17.2; p. 167, Corollary 18.5.1), si X es un punto de \mathcal{P} existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ no negativos, $\lambda_1 + \dots + \lambda_8 = 1$, tales que

$$X = \sum_{i=1}^8 \lambda_i V_i = G + \sum_{i=1}^4 (\lambda_i - \lambda_{i+4})(V_i - G)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} X - G &= \frac{r}{\Delta} \{ (\lambda_1 - \lambda_5)(A \times B + B \times C + C \times A) + (\lambda_2 - \lambda_6) \\ &\quad (A \times B - B \times C + C \times A) + (\lambda_3 - \lambda_7)(A \times B - B \times C - C \times A) \\ &\quad + (\lambda_4 - \lambda_8)(A \times B + B \times C - C \times A) \}, \\ \left\{ \begin{aligned} A \cdot (X - G) &= r \{ (\lambda_1 - \lambda_5) - (\lambda_2 - \lambda_6) - (\lambda_3 - \lambda_7) + (\lambda_4 - \lambda_8) \}, \\ B \cdot (X - G) &= r \{ (\lambda_1 - \lambda_5) + (\lambda_2 - \lambda_6) - (\lambda_3 - \lambda_7) - (\lambda_4 - \lambda_8) \}, \\ C \cdot (X - G) &= r \{ (\lambda_1 - \lambda_5) + (\lambda_2 - \lambda_6) + (\lambda_3 - \lambda_7) + (\lambda_4 - \lambda_8) \}, \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

$$|A \cdot (X - G)| \leq r \sum_{k=1}^4 |\lambda_k - \lambda_{k+4}| \leq r,$$

análogamente,

$$|B \cdot (X - G)| \leq r$$

y

$$|C \cdot (X - G)| \leq r,$$

teniendo presente que

$$\sum_{k=1}^4 |\lambda_k - \lambda_{k+4}| \leq 1$$

([5] pp. 41 - 43, lema 2). Por lo tanto, volviendo a (2.1.2), $\varphi(X) \leq r$, es decir,

$$\mathcal{P} \subseteq \varphi^{-1} ((0, r])$$

Dado que φ es una función real convexa, propia cerrada, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{aligned} \text{int}(\varphi^{-1} ((0, r])) &= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X) < r\}, & y \\ F_r(\varphi^{-1} ((0, r])) &= \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X) = r\} = \mathfrak{F} & \text{(Por (2.1.3))} \end{aligned}$$

([4] p. 59, Corollary 7.6.1)

Si $X \in \text{conv}V_5, \dots, V_8 \subseteq \mathcal{P}$, existen $\lambda_5, \dots, \lambda_8$ no negativos, $\lambda_5 + \dots + \lambda_8 = 1$, tales que

$$X = 0V_1 + \dots + 0V_4 + \lambda_5V_5 + \dots + \lambda_8V_8,$$

reduciéndose las expresiones en (2.1.5) a

$$\begin{aligned} A \cdot (X - G) &= (-\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7 - \lambda_8)r, & B \cdot (X - G) &= (-\lambda_5 - \lambda_6 + \lambda_7 + \lambda_8)r, \\ C \cdot (X - G) &= -r, \end{aligned}$$

lo que implica, a la luz de (2.1.2) y (2.1.3),

$$\varphi(X) = r \quad y \quad \text{conv}\{V_5, \dots, V_8\} \subseteq \mathfrak{F}$$

Así, utilizando (2.1.5) en general se prueba que todas las caras de \mathcal{P} están contenidas en \mathfrak{F} . Por lo cual,

$$\mathcal{P} \subseteq \varphi^{-1} ((0, r]) \quad y \quad F_r(\mathcal{P}) \subseteq F_r(\varphi^{-1} ((0, r])) = \mathfrak{F} \quad (2.1.6)$$

Si $X \in \varphi^{-1} ((0, r]) \sim \mathcal{P}$, entonces X es un punto interior de $\mathcal{P}' (= \mathbb{R}^3 \sim \mathcal{P})$ por ser \mathcal{P} cerrado, y el segmento $\overline{GX} \subseteq \varphi^{-1} ((0, r])$ corta a $F_r(\mathcal{P})$ en un punto P entre G y X por ser \mathcal{P} un poliedro convexo, esto es, $P \in \text{int}(\varphi^{-1} ((0, r]))$

([4] p. 45, Theorem 6.1) y además por (2.1.6) $P \in F_r(\varphi^{-1}((0, r]))$, lo cual es imposible. Así que $\varphi^{-1}((0, r]) \subseteq \mathcal{F}$. Concluimos que $\mathcal{F} = \varphi^{-1}((0, r])$, y por ende que $\mathfrak{F} = F_r(\mathcal{F})$.

A la inversa, en el siguiente corolario se construye la ecuación cartesiana de una superficie paralelepédica dada. \square

2.2. Corolario

Sea \mathcal{P} un paralelepípedo tridimensional dado, de centro G y vértices V_1, \dots, V_8 dispuestos como en la Figura 1. Entonces, la ecuación cartesiana de la frontera de \mathcal{F} (la unión de las seis caras de \mathcal{P}) es,

$$\begin{aligned} & \text{máx} \left\{ \left| \sum_{j=1}^3 \det(v_j - G, V_{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}|j-2|+4} - G, X - G) \right| \right\}, & (2.2.1) \\ & \left| \sum_{j=1}^3 (-1)^{\frac{1}{2}\{j-|j-2|\}} \det(v_j - G, V_{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}|j-2|+4} - G, X - G) \right| \Bigg\}, \\ & \left| \sum_{j=1}^3 (-1)^j \det(v_j - G, V_{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}|j-2|+4} - G, X - G) \right| \Bigg\}, \\ & = |\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G)|, \end{aligned}$$

o bien, reduciendo,

$$\begin{aligned} & \text{máx}_{1 \leq i \leq 3} \left| \sum_{j=1}^3 (-1)^{\frac{1}{2}\{ij-j-|j-2|+|i-2||j-2|\}} \det(V_j - G, V_{-\frac{j}{2} - \frac{3}{2}|j-2|+4} - G, X - G) \right| \\ & = |\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G)| \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Demostración. Puesto que \mathcal{P} es un paralelepípedo tridimensional (es decir, no degenerado) de centro G , entonces

$$\nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) \neq 0$$

Sea $r > 0$ arbitrario pero fijo, y hagamos

$$\begin{aligned} A &= r\nabla^{-1}\{-(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_3 - G) \times (V_1 - G)\} \\ B &= r\nabla^{-1}\{-(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) + (V_3 - G) \times (V_1 - G)\} \\ C &= r\nabla^{-1}\{-(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) + (V_3 - G) \times (V_1 - G)\} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Entonces,

$$\Delta = \det(A, B, C) = 4r^3\nabla^{-1} \neq 0, \quad (2.2.4)$$

o equivalentemente, A, B y C son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 ;

$$\begin{aligned} A \times B &= 2r^2\nabla^{-1} \{(V_1 - G) + (V_3 - G)\}, \\ B \times C &= 2r^2\nabla^{-1} \{(V_1 - G) + (V_2 - G)\}, \\ C \times A &= 2r^2\nabla^{-1} \{(V_2 - G) + (V_3 - G)\}, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Sustituyendo (2.2.3) en (2.1.2), se sigue del teorema 2.1 que $\varphi^{-1}(r)$ es la frontera de un paralelepípedo no degenerado de centro G . Directamente puede verificarse, reemplazando (2.2.4) y (2.2.5) en los miembros derechos de (2.1.4), que los vértices de $\varphi^{-1}(r)$ son, justamente, los vértices de \mathcal{P} (téngase presente $V_4 = V_1 - V_2 + V_3$ en el paralelogramo $V_1 \cdots V_4$); es decir, $\mathcal{P} = \varphi^{-1}(r)$

Se infiere de la relación que define a $\varphi^{-1}(r)$ en (2.1.3), que la frontera de \mathcal{P} está representada por la ecuación (2.2.1).

2.3. Ilustración

Sean

$$\begin{aligned} V_1 &= (1, 1, 1), & V_2 &= (1, -1, 1), & V_3 &= (1, -1, -1) \\ V_4 &= (1, 1, -1), & V_{i+4} &= -V_i, & i &= 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

los vértices del cubo de Edmund Hess de arista 2 y centro el origen $\mathbf{0}$ de \mathbb{R}^3 , ubicados espacialmente como se indica en la Figura 1 ([2], p. 52). Si $X = (x_1, x_2, x_3)$, entonces

$$\begin{aligned} \det(V_1, V_2, V_3) &= 4, & \det(V_1, V_2, X) &= 2x_1 - 2x_3, \\ \det(V_2, V_3, X) &= 2x_1 + 2x_2, & \det(V_3, V_1, X) &= -2x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Remitiéndonos al corolario 2.2, y sustituyendo estos valores (con $G = \mathbf{0}$) en la expresión (2.2.2), después de reducir obtenemos

$$\max_{i \leq i \leq 3} |x_i| = 1$$

una sencilla ecuación cartesiana que represente la frontera del cubo de Hess. □

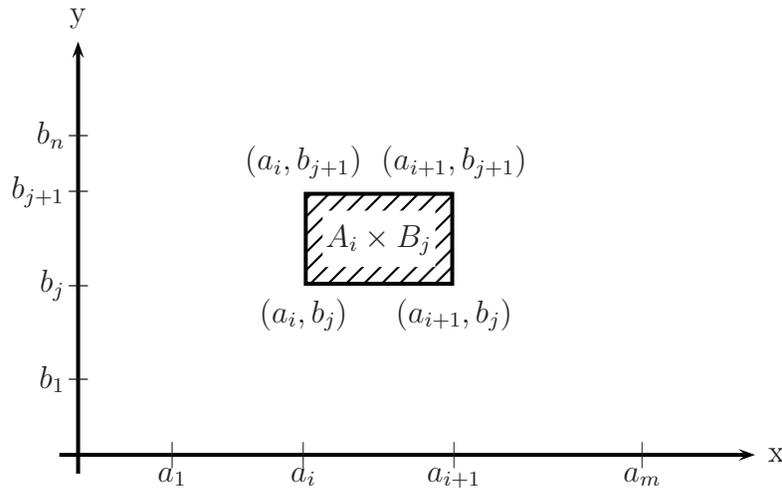


Figura: 2. La partición $P_1 \times P_2$ y un subrectángulo genérico

3. Parametrización y Geometría de una Superficie $(m+1)(n+1)$ -Édrica de $2(m+n)$ Caras Planas no Acotadas y $(m-1)(n-1)$ Caras Paralelogramoides

3.1. Teorema

Sean \mathcal{Q} y \mathcal{L} matrices matrices reales, arbitrarias pero fijas, de orden $m \times 3$ y $n \times 3$, respectivamente, $m \geq 2, n \geq 2$; A, B, C vectores constantes en \mathbb{R}^3 , y

$$a_1 < \cdots < a_m, \quad b_1 < \cdots < b_n, \quad (3.1.1)$$

números reales que definen particiones

$$P_1 = \{a_1, \dots, a_m\} \quad P_2 = \{b_1, \dots, b_n\}, \quad (3.1.2)$$

e intervalos cerrados

$$\begin{aligned} A_0 &= (-\infty, a_1], & A_m &= [a_m, +\infty), \\ A_i &= [a_i, a_{i+1}], & i &= 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} B_0 &= (-\infty, b_1], & B_n &= [b_n, +\infty), \\ B_j &= [b_j, b_{j+1}], & j &= 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Consideremos la función continua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya expresión

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (|u - a_1|, \dots, |u - a_m|)\mathcal{Q} + (|v - b_1|, \dots, |v - b_n|)\mathcal{L} \\ &+ uA - vB + C, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, representa paramétricamente una superficie.

Entonces la traza de f es una superficie poliédrica en \mathbb{R}^3 , con las siguientes propiedades:

- i)* La imagen bajo f de cada subrectángulo de la partición $P_1 \times P_2$ en \mathbb{R}^2 mostrada en la Figura 2, es un paralelogramo (posiblemente degenerado). Más exactamente, $f(A_i \times B_j)$ es una región paralelogramoide, de vértices

$$\begin{aligned} &f(a_i, b_j), f(a_{i+1}, b_j), f(a_{i+1}, b_{j+1}), f(a_i, b_{j+1}), \\ &i = 1, \dots, m-1 \quad ; \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

la imagen bajo f de los vértices del rectángulo $A_i \times B_j$.

Por lo tanto, $f([a_1, a_m] \times [b_1, b_n])$ es una superficie poliédrica acotada y ensamblada de $(m-1)(n-1)$ paralelogramos, de mn vértices a saber,

$$f(a_i, b_j), \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

(Ver Figura 3).

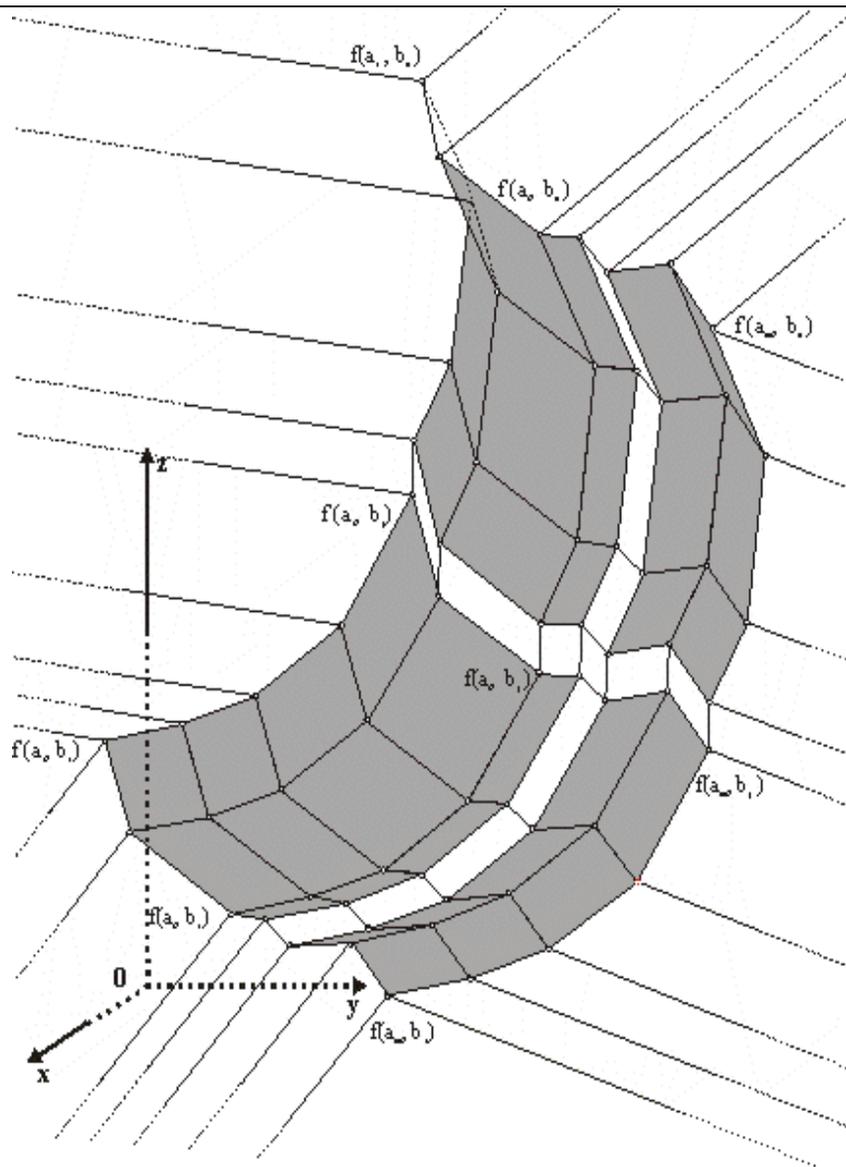


Figura: 3. $f([a_1, a_m] \times [b_1, b_n])$ es una superficie poliédrica de mn vértices ensamblada de $(m - 1)(n - 1)$ paralelogramos

ii) $f(A_i \times B_j)$ es una región angular cerrada representada por

$$f(A_i \times B_j) = \mathfrak{L}_{ij} + \mathfrak{L}'_{ij} - f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right), \quad (3.1.5)$$

de vértice

$$f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) \quad (3.1.6)$$

y lados las semirrectas

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{ij} &= \left\{ f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + t\{(1, \dots, 1) \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{Q} - 1(-1)^{\frac{i}{m}}A\} \mid t \geq 0 \right\} \quad \text{y} \\ \mathfrak{L}'_{ij} &= \left\{ f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + t\{(1, \dots, 1) \right. \\ &\quad \left. \mathfrak{L} - 1(-1)^{\frac{j}{n}}B\} \mid t \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

$$i = 0, m \quad ; \quad j = 0, n,$$

de punto inicial común (3.1.6). Posiblemente $f(A_i \times B_j)$ sea una figura degenerada según lo sean \mathfrak{L}_{ij} o \mathfrak{L}'_{ij} .

iii) Si $1 \leq i \leq m - 1$ entonces

$$f(A_i \times B_j) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} L(i, j, \lambda) \quad (3.1.8)$$

la unión de una familia de semirrectas paralelas representadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(i, j, \lambda) &= \left\{ (1 - \lambda)f\left(a_i, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + \lambda f\left(a_{i+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) \right. \\ &\quad \left. + t\{(1, \dots, 1)L - (-1)^{frac{j}{n}}B\} \mid t \geq 0 \right\}, \\ &\quad j = 0, n, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

con puntos iniciales en el segmento cerrado de recta de extremos

$$f\left(a_i, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) \quad \text{y} \quad f\left(a_{i+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) \quad (3.1.10)$$

Posiblemente $f(A_i \times B_j)$ sea una figura degenerada.

iv) Si $1 \leq j \leq n - 1$ entonces

$$f(A_i \times B_j) = \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} \Lambda(i, j, \lambda), \quad (3.1.11)$$

la unión de una familia de semirrectas paralelas representadas por

$$\begin{aligned} \Lambda(i, j, \lambda) = & \left\{ (1 - \lambda)f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_j\right) + \lambda f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{j+1}\right) \right. \\ & \left. + t \left\{ (1, \dots, 1) \mathcal{Q} - (-1)^{\frac{i}{m}} A \right\} | t \geq 0 \right\}, \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$i = 0, m,$$

con puntos iniciales en el segmento cerrado de recta de extremos

$$f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_j\right) \quad \text{y} \quad f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{j+1}\right) \quad (3.1.13)$$

Posiblemente $f(A_i \times B_j)$ sea una figura degenerada.

Demostración. Si $I = \{0, 1, \dots, m\}$ y $J = \{0, 1, \dots, n\}$ entonces $I \times J$ está representado por la siguiente unión disjunta

$$\begin{aligned} I \times J = & (I \sim \{0, m\}) \times (J \sim \{0, n\}) \cup \{0, m\} \times \{0, n\} \\ & \cup (I \sim \{0, m\}) \times \{0, n\} \cup \{0, m\} \times (J \sim \{0, n\}) \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

lo que aporta para \mathbb{R}^2 la siguiente unión

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j, \quad (3.1.15)$$

donde A_i, B_j son los intervalos cerrados introducidos en (3.1.3).

Se deriva de (3.1.14) y (3.1.15) que la traza de la función f definida en (3.1.4), puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}^2) = & \bigcup_{(i,j) \in I \times J} f(A_i \times B_j) \\ = & \bigcup_{(i,j) \in (I \sim \{0, m\}) \times (J \sim \{0, n\})} f(A_i \times B_j) \cup \bigcup_{(i,j) \in \{0, m\} \times \{0, n\}} f(A_i \times B_j) \\ & \cup \bigcup_{(i,j) \in (I \sim \{0, m\}) \times \{0, n\}} f(A_i \times B_j) \cup \bigcup_{(i,j) \in \{0, m\} \times (J \sim \{0, n\})} f(A_i \times B_j), \end{aligned}$$

razón por la cual las partes (i), \dots , (iv) del presente teorema describen conjunta y totalmente la geometría de la traza de f .

i) Dada la continuidad de f la traza

$$\begin{aligned}
 & f([a_1, a_m] \times [b_1, b_n]) \\
 &= f\left(\left\{\bigcup_{i=1}^{m-1} [a_i, a_{i+1}]\right\} \times \left\{\bigcup_{j=1}^{n-1} [b_j, b_{j+1}]\right\}\right) \quad (\text{Por (3.1.1)}) \\
 &= f\left(\left\{\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right\} \times \left\{\bigcup_{j=1}^{n-1} B_j\right\}\right) \quad (\text{Por (3.1.3)}) \\
 &= f\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \bigcup_{j=1}^{n-1} A_i \times B_j\right) \\
 &= \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \bigcup_{j=1}^{n-1} f(A_i \times B_j)\right) = \bigcup_{(i,j) \in (I \sim \{0,m\}) \times (J \sim \{0,n\})} f(A_i \times b_j),
 \end{aligned}$$

es un conjunto compacto, por ser la unión de un número finito de conjuntos compactos. Si $(i, j) \in (I \sim \{0, m\}) \times (J \times \{0, n\})$ entonces

$$\begin{aligned}
 f(a_i, b_j) &= (|a_i - a_1|, \dots, |a_i - a_i|, |a_i - a_{i+1}|, \dots, |a_i - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &\quad + (|b_j - b_1|, \dots, |b_j - b_j|, |b_j - b_{j+1}|, \dots, |b_j - b_n|) \mathcal{L} \\
 &\quad + a_i A + b_j B + C,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(a_{i+1}, b_j) &= (|a_{i+1} - a_1|, \dots, |a_{i+1} - a_i|, |a_{i+1} - a_{i+1}|, \dots, |a_{i+1} - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &\quad + (|b_j - b_1|, \dots, |b_j - b_j|, |b_j - b_{j+1}|, \dots, |b_j - b_n|) \mathcal{L} \\
 &\quad + a_{i+1} A + b_j B + C,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(a_{i+1}, b_{j+1}) &= (|a_{i+1} - a_1|, \dots, |a_{i+1} - a_i|, |a_{i+1} - a_{i+1}|, \dots, |a_{i+1} - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &\quad + (|b_{j+1} - b_1|, \dots, |b_{j+1} - b_j|, |b_{j+1} - b_{j+1}|, \dots, |b_{j+1} - b_n|) \mathcal{L} \\
 &\quad + a_{i+1} A + b_{j+1} B + C,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(a_i, b_{j+1}) &= (|a_i - a_1|, \dots, |a_i - a_i|, |a_i - a_{i+1}|, \dots, |a_i - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &\quad + (|b_{j+1} - b_1|, \dots, |b_{j+1} - b_j|, |b_{j+1} - b_{j+1}|, \dots, |b_{j+1} - b_n|) \mathcal{L} \\
 &\quad + a_i A + b_{j+1} B + C,
 \end{aligned}$$

expresiones que implican

$$f(a_i, b_{j+1}) - f(a_i, b_j) = f(a_{i+1}, b_{j+1}) - f(a_{i+1}, b_j),$$

esto es,

$$f(a_i, b_j)f(a_{i+1}, b_j)f(a_{i+1}, b_{j+1})f(a_i, b_{j+1})$$

es un paralelogramo en \mathbb{R}^3 , posiblemente degenerado

ii) Si $(i, j) \in \{0, m\} \times \{0, n\}$ entonces según (3.1.3)

$$A_i = \left\{ a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - (-1)^{\frac{i}{m}} t \mid t \geq 0 \right\} \quad y \quad (3.1.16)$$

$$B_j = \left\{ b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s \mid s \geq 0 \right\} \quad (3.1.17)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \left| a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - (-1)^{\frac{i}{m}} t - a_k \right| &= (-1)^{\frac{i}{m}} \left\{ a_k - a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} \right\} + t \\ &= \left| a_{\frac{i}{m}(m-1)} - a_k \right| + t, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

$$\begin{aligned} \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s - b_k \right| &= (-1)^{\frac{j}{n}} \left\{ b_k - b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} \right\} + s \\ &= \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)} - b_k \right| + s, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

para todo $t \geq 0, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} &f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - (-1)^{\frac{i}{m}} t, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s\right) \\ &= \left(\left| a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - (-1)^{\frac{i}{m}} t - a_1 \right|, \dots, \left| a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - (-1)^{\frac{i}{m}} t - a_m \right| \right) \mathcal{Q} \\ &+ \left(\left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s - b_1 \right|, \dots, \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s - b_n \right| \right) \mathcal{L} \\ &+ \left\{ a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - (-1)^{\frac{i}{m}} t \right\} A + \left\{ b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s \right\} B + C \\ &= \left(\left| a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - a_1 \right| + t, \dots, \left| a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - a_m \right| + t \right) \mathcal{Q} \\ &+ \left(\left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_1 \right| + s, \dots, \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_n \right| + s \right) \mathcal{L} \\ &+ \left\{ a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - (-1)^{\frac{i}{m}} t \right\} A + \left\{ b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s \right\} B + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \left(\left| a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - a_1 \right|, \dots, \left| a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} - a_m \right| \right) \mathcal{Q} \right. \\
 &+ \left(\left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_1 \right|, \dots, \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_n \right| \right) \mathcal{L} \\
 &\left. a_{\frac{i}{m}(m-1)+1} A + b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} B + C \right\} \\
 &(t, \dots, t) \mathcal{Q} + (s, \dots, s) \mathcal{L} - (-1)^{\frac{i}{m}} A - (-1)^{\frac{j}{n}} s B \\
 &f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + t \left\{ (1, \dots, 1) \mathcal{Q} - (-1)^{\frac{i}{m}} A \right\} + s \\
 &\quad \left\{ (1, \dots, 1) L - (-1)^{\frac{j}{n}} B \right\} \\
 &\left[f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + t \left\{ (1, \dots, 1) \mathcal{Q} - (-1)^{\frac{i}{m}} A \right\} \right] \\
 &+ \left[f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + s \left\{ (1, \dots, 1) L - (-1)^{\frac{j}{n}} B \right\} \right] \\
 &- f\left(a_{\frac{i}{m}(m-1)+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right)
 \end{aligned}$$

Se colige de aquí y (3.1.7) la igualdad en (3.1.5).

iii) Si $(i, j) \in (I \sim \{0, m\}) \times \{0, n\}$ entonces el intervalo A_i en (3.1.3) también tiene la siguiente representación

$$A_i = \{(1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

además de percibirse que

$$\begin{aligned}
 |(1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1} - a_k| &= |(1 - \lambda)(a_i - a_k) + \lambda(a_{i+1} - a_k)| \\
 &= (1 - \lambda)|a_i - a_k| + \lambda|a_{i+1} - a_k|, \quad (3.1.20)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad k = 1, \dots, m$$

Así reteniendo (3.1.17), obtenemos

$$\begin{aligned}
 &f\left((1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s\right) \\
 &= (|(1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1} - a_1|, \dots, |(1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1} - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &+ \left(\left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s - b_1 \right|, \dots, \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s - b_n \right| \right) \mathcal{L} \\
 &+ \{(1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1}\} A + \left\{ b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s \right\} B + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ((1 - \lambda)|a_i - a_1| + \lambda|a_{i+1} - a_1|, \dots, (1 - \lambda)|a_i - a_m| + \lambda|a_{i+1} - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &+ \left(\left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_1 \right| + s, \dots, \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_n \right| + s \right) \mathfrak{L} \\
 &+ \{(1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1}\}A + \left\{ b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - (-1)^{\frac{j}{n}} s \right\} B + C \quad (\text{Por (3.1.19)}) \\
 &= (1 - \lambda)|a_i - a_1|, \dots, |a_i - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &+ \left(\left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_1 \right|, \dots, \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_n \right| \right) \mathfrak{L} + a_i A + b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} B + C \} \\
 &+ \lambda(|a_{i+1} - a_1|, \dots, |a_{i+1} - a_m|) \mathcal{Q} \\
 &+ \left(\left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_1 \right|, \dots, \left| b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} - b_n \right| \right) \mathfrak{L} + a_{i+1} A + b_{\frac{j}{n}(n-1)+1} B + C \} \\
 &+ (s, \dots, s) \mathfrak{L} - (-1)^{\frac{j}{n}} B \\
 &= (1 - \lambda)f\left(a_i, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + \lambda f\left(a_{i+1}, b_{\frac{j}{n}(n-1)+1}\right) + s \left\{ (1, \dots, 1)L - (-1)^{\frac{j}{n}} B \right\}, \\
 &0 \leq \lambda \leq 1 \qquad \qquad \qquad , s \geq 0
 \end{aligned}$$

De aquí y (3.1.10) se infiere la igualdad en (3.1.8).

iv) Si $(i, j) \in \{0, m\} \times (J \sim \{0, n\})$, una expresión como (3.1.20) es válida al reemplazar a, i, m por b, j, n , respectivamente. Además teniendo en cuenta (3.1.16) y (3.1.18), con una técnica similar al caso anterior se demuestra la *(iv)* parte del presente teorema.

□

Bibliografía

- [1] Tom M Apóstol, *Calculus*, Vol. 1, Xerox College Publishing, second edition, 1967.
- [2] H. S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Third edition, New York: Dover Publications, Inc., 1973.
- [3] Mostow, Sampson, Meyer, *Fundamental Structures of Algebra*, New York: McGraw-Hill, 1963.

- [4] Ralph T Rockafellar, *Convex Analysis*, New Jersey: Princeton University Press, Princeton, 1972.
- [5] Luis Enrique Ruiz Hernández, *Esferas hiper-octaédricas centralmente simétricas*. En: Revista Integración, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Vol. 9, No. 1, Enero - Julio de 1991.
- [6] _____ *Esferas dodecaédricas rómbicas afines*. En: Revista Integración, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, Vol. 11, No. 1, Enero - Junio de 1993.
- [7] Robert Williams, *The Geometrical Foundation of Natural Structure*. New York: Dover Publications, Inc. First edition, 1979.