Metodos geométricos en la construcción de los números reales: una aproximación de von Staudt.

Alvaro Duque Hoyos
Profesor Universidad Javeriana
Bogotá D.C, Colombia

La exposición anterior no concluyo el producto el producto en la forma geométrica análoga a la que permitió la definición de la suma.

De nuevo nos ocuparemos del plano proyectivo π.

Empezaremos con una línea proyectiva l arbitraria del plano π y tres puntos P_0, P_1, y P_∞ incidentes con ella.

Queremos multiplicar dos puntos P_x, P_y de esta línea que sean distintas de P_∞.

En el plano π trazamos tres rectas l_0, l_1, las distintas que pasan por P_0, P_1 y P_∞ respectivamente.

Tomamos las intersecciones $A := l_0 \cap l_1$, $B := l_\infty \cap l_1$.

Por los dos puntos P_x y P_y queremos multiplicar trazamos las rectas $P_x\ A$ y $P_y\ B$

Definimos $X := (P_x\ A) \cap l_\infty$ y $Y := (P_x\ B) \cap l_0$
Encontramos que la recta XY intersecta a l en P_{xy} aquí estamos introduciendo las definiciones

$$P_x \cdot P_y := P_{xy}$$
$$P_{xy} := (XY) \cap l$$

En realidad para P_x y P_y distintos de P_0, P_1 y P_∞ tenemos que todos estos puntos inciden con l y más aún, $Q(P_0\ P_x\ P_1\ ,\ P_\infty\ P_x\ P_{xy}\ )$.

Si consideramos el cuadrángulo $A \times B$ y podemos probar:
Si P_x y P_y son dos puntos de l distintos de $P_0,\ P_1$ y P_∞ entonces $Q(P_0\ P_x\ P_1\ ;\ P_\infty\ P_y\ P_{xy}\ )$. es condición necesaria y suficiente para la igualdad.

$$P_x \cdot P_y = P_{xy}$$

Nota 1. Siguiendo la definición. Si $P_x \neq P_\infty$ donde P_x es incidente con l se tiene

$$P_1 \cdot P_x = P_x \cdot P_1 = P_x$$
$$P_0 \cdot P_x = P_x \cdot P_0 = P_0$$

Nota 2. Se ve el inconveniente de incluir en la recta l a P_∞ para efectos de la multiplicación. Basta tomar $P_x \neq P_0$ y realizar los productos $P_\infty \cdot P_x$, $P_x \cdot P_\infty$. Los dos productos son P_∞.

Comparando en el resultado de multiplicar $P_x \cdot P_0$ y $P_0 \cdot P_x$ vemos que en cierta manera el permitir como factor a P_∞ trae consigo que tengamos dos "anuladores"

1. Axiomas que Satisfacen el Producto

Los axiomas que satisfacen el producto son la asociatividad, la existencia del elemento neutro P_1 pero no hay conmutatividad en la estructura multiplicativa. Como ciertamente no queremos contentarnos con los axiomas de anillo de división en la estructura total debemos añadir un axioma de contenido geométrico.

Axioma 1. *Una proyectividad De K de l en l que tiene al menos tres puntos fijos en la transformación idéntica de l, o en $K : l \to l$ en la proyectividad $K(T) = T$ pero todo T incidente con l*

(En geometría proyectiva clásica este enunciado se conoce como el teorema fundamental de la geometría proyectiva. En nuestro contexto es un axioma exigido por la condición de conmutatividad que queremos se satisfaga en nuestro producto de puntos.)

En virtud del axioma las imágenes de los puntos distintos (fijos) bajo una proyectividad de l en l determinan todas las demás imágenes. No completamos el desarrollo de esta idea por razones de espacio ya que estaríamos muy pronto comprometidos con la teoría de planos proyectivos que no satisfacen la propiedad de Papus pero sí la de Desarques.

Con la mira puesta en la construcción geométrica de los racionales examinamos ahora la solución de ecuaciones de la forma

$$P_a \cdot P_x = P_b$$

donde debemos hallar a P_x en función de P_a y P_b .

En particular $P_a \cdot P_x = P_1$ es soluble si $P_a \neq P_0$ y $P_a \neq P_\infty$.
Así tenemos inversas multiplicativas de todos los puntos distintos de P_0 y P_∞. (Un poco de experimentación con las figuras lleva a “admitir”que $P_a/P_0 = P_\infty$). Sin embargo no hemos incluido entre los multiplicandos a P_∞ y así descartamos esa relación un poco inquietante.

De paso hemos introducido la notación conveniente P_a/P_b donde P_b es distinto de P_0 y de P_∞ con $P_b \cdot (P_a/P_b) = P_a$ reunimos el alcance de la notación P_a/P_b.

De la explicación anterior tenemos que emplear las redes de racionalidad sobre l. No se tenia con ellas un cuerpo isomorfo a los racionales porque no se había indicado las operaciones.

El uno del nuevo axioma nos da mas garantía que hallarnos en el contexto de los racionales (con lenguaje geométrico)

Definición 1. *En una línea h tomemos una tripla de puntos distintos H_0, H_1 y H_∞. Tomamos un plano τ que contiene a h, y en τ dos puntos distintos S y T tales que S y T no incidan con h y S, T y H_∞ sean colineales. Así hemos determinado una recta h_∞ con S, T y H_∞ incidentes con ella.*

Sea $K_0 = SH_0 \cap TH_1$. Trazamos la recta $H_\infty K$ cortamos ya con tres rectas distintas incidentes con H_∞.

Los puntos de h bajo la proyectividad con centro en s tiene imágenes $H_\infty K$. Esta proyectividad es una perspectividad.

En forma análoga con centro en T aplicamos la recta $H_\infty K$ en la recta h por medio de una perspectividad componemos las dos perspectividades: $h \rightarrow H_\infty \rightarrow h$. El resultado es una proyectividad de h consigo misma que denotamos Π

H_0, H_1 y H_∞ determinan esta compuesta debido al axioma introducido arriba *(teorema fundamental)*. En consecuencia con pleno sentido escribimos $H_0, H_1, H_2, H_3, \cdots H_i, H_{i+1}, \cdots H_\infty$ secuencia armónica (así la llamamos) obtenida con la relación funcional $H_{i+1} = \Pi(H_i)$, $i = 0, 1, 2, \cdots$ H_∞ no pertenece a la secuencia armónica, pero ha intervenido en la tarea de determinar por el axioma empleado.

H_∞ se llama punto límite de la secuencia armónica. Si sobre h realizamos una secuencia armónica en otra tripleta de puntos, digamos M_0, M_1 y M_∞ que puede ser distinta a la tripleta H_0, H_1 y H_∞, la nueva secuencia armónica difiere de la otra por una proyectividad.

El método de construcción no garantiza que todos los puntos de $H_0, H_1, \cdots H_i, \cdots$ sean distintos. Para que haya una biyección entre los números naturales y $H_0, H_1, \cdots H_i, \cdots$ se requiere un nuevo axioma.

Axioma 2. *Si h tiene una secuencia armónica (por lo menos) siempre tendrá una secuencia armónica con un número infinito de valores H_i (dentro de la simbología adoptada).*

No nos queremos alargar en la motivación profunda de este axioma. Bastan unos pocos intentos con secuencias armónicas para comprender que no se tienen todos los instrumentos para garantizar la biyección $i \rightarrow H_i$ de $\mathbb{N}$ con la secuencia armónica.

Como una proyectividad es una biyección, el axioma que garantiza una secuencia armónica con un número infinito de valores H_i, garantiza que cualquier otra también será "infinita"si es secuencia armónica, pues ya apuntamos que dos secuencias armónicas son imágenes bajo proyectividades que las relacionan.

En la primera que hemos construido y que retenemos en lo ucesivo podemos ver puntos de la recta en correspondencia con los naturales $0, 1, 2, \ldots (i \leftrightarrow H_i)$.

En la teoría de la adición realizada, con Von Staudt , geométricamente teníamos la indicación de la inversos aditivos. Obtengamos así $H_{-1}, H_{-2}, \cdots$ la lista de inversos aditivos de $H_1, H_2, \cdots$ nos será útil simbolizar así lo que estamos calculando:

$$H_{ji} = \Pi(H_{-i}, -1)$$

Para esta nueva formula que se añade a la anterior $\Pi(H_i) = H_{i+1}$, no tendremos nomenclatura distinta. Consideremos como secuencia armónica la secuencia

$$\cdots\ H_{-i-1},\ H_{-i},\ \cdots,\ H_{-2},\ H_{-1},\ H_0,\ H_1,\ H_2,\ \cdots,\ H_i,\ H_{i+1}$$

Como ya tenemos ya operaciones sobre estos puntos H_i, y tenemos correspondencia con los números naturales (que están en los subíndices) y con sus opuestos aditivos tenemos la posibilidad de pasar del símbolo de H_0 a 0 y de H_1 a 1.

Así mismo de $H_1 + H_1 + \cdots + H_1$ (n veces H_1 como sumando) a $1 + 1 + \cdots + 1$.

En estas transformaciones no hay sino paso de un simbología a otra más familiar. Lo mismo con la secuencia armónica que lleva símbolos H_{-i}.

En resumen podemos decir que hemos localizados puntos de h en coordenada entera. (Las distancias entre “enteros”resultan distorsionadas y no podemos esperar todavía una teoría de la distancia.)

Establecida una secuencia armónica en correspondencia con los números enteros volvemos a las redes de racionalidad.

Nuestra tarea es mostrar donde encajan los conceptos de red de racionalidad y de secuencia armónica.

Vamos a determinar nuevos puntos en H.
Sea $n \geq 1$ un número natural.
Definamos el símbolo $H_{1/n}$ como conjugado armónico de H_n con respecto a H_1 y H_{-1}.

Por teoremas de geometría proyectiva elemental Von Staudt sabia que se iba a producir una nueva secuencia armónica.

Siguiendo pues a este autor nos queda a medida que n varia en $\mathbb{N}$ (siempre $n \geq 1$)

$$H_{-1/3},\ H_{-1/2},\ H_{-1},\ H_{\infty},\ H_{1},\ H_{1/2},\ H_{-1/3},\ \ldots$$

Nótese que H_∞ y H_1 "reaparecen"pero H_∞ no es propio de ninguna secuencia armónica.

Recordamos que las dos secuencias mencionadas ambas armónicas están relacionadas proyectivamente. H_0 en la primera tiene imagen H_∞, por eso la incluimos en la lista de símbolos.

Tenemos nuevos puntos de h señalados con coordenada $\begin{cases} 1/n & n = 1, 2, \cdots, \\ -1/n \end{cases}$

Fijemos un punto $H_{1/n}$. Consideremos los puntos H_0, H_1, H_∞ que tenemos en h desde la primera secuencia armónica y con los puntos $H_0, H_{1/n}, H_\infty$ determinemos la secuencia armónica

$$\ldots\ H_{-3/n},\ H_{-2/n},\ H_{-1/n},\ H_0,\ H_{1/n},\ H_{2/n},\ H_{3/n},\ \ldots$$

acabamos de obtener una tercera secuencia armónica por cada símbolo $H_{1/n}$ $n \geq 1$ que tengamos de la segunda secuencia armónica podemos fijarnos en la terna o tripla $H_0, H_{1/n}, H_\infty$ y obtener por construcción de conjugados armónico una nueva secuencia armónica.

Al aplicar nuestra teoría de la red de racionalidad, vemos que cualquier punto de la red de racionalidad sobre h aparece en una secuencia armónica.

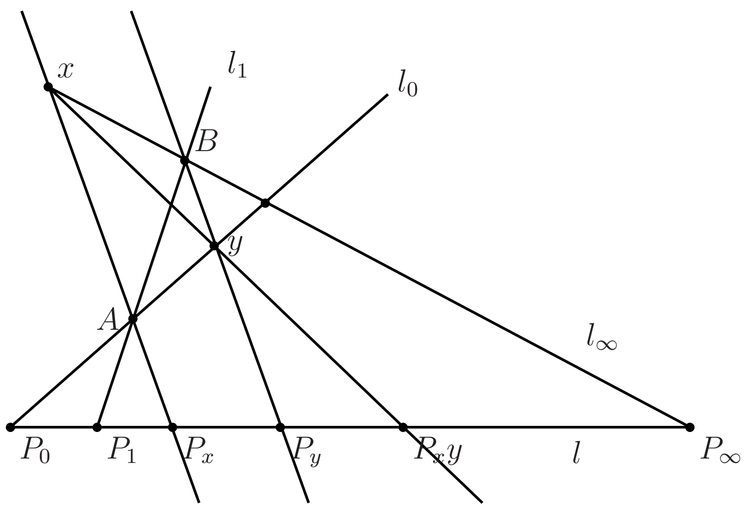

Figura 1: Multiplicación en l de P_x por P_y

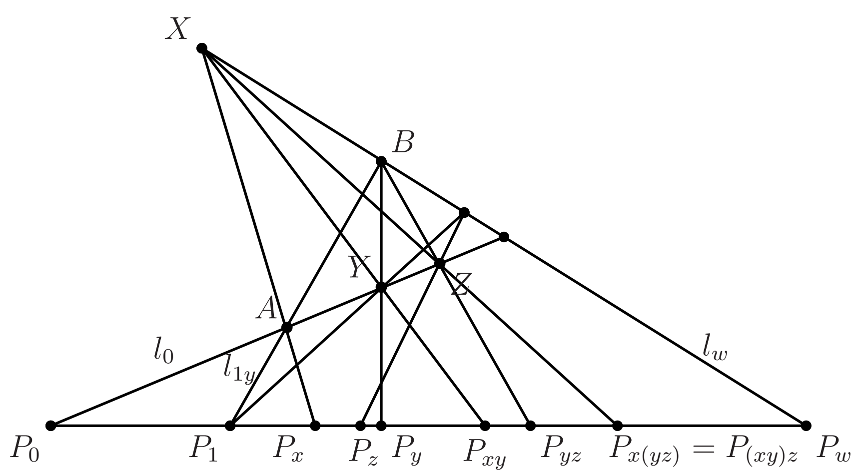

Figura 2: Asociatividad del producto en l

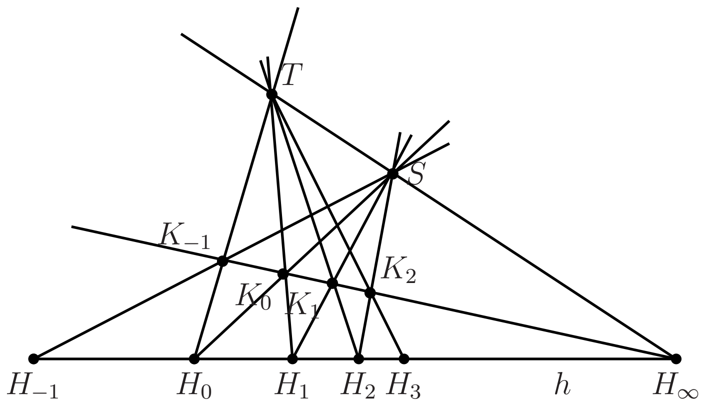

Figura 3: Secuencia armónica (inicial) para h

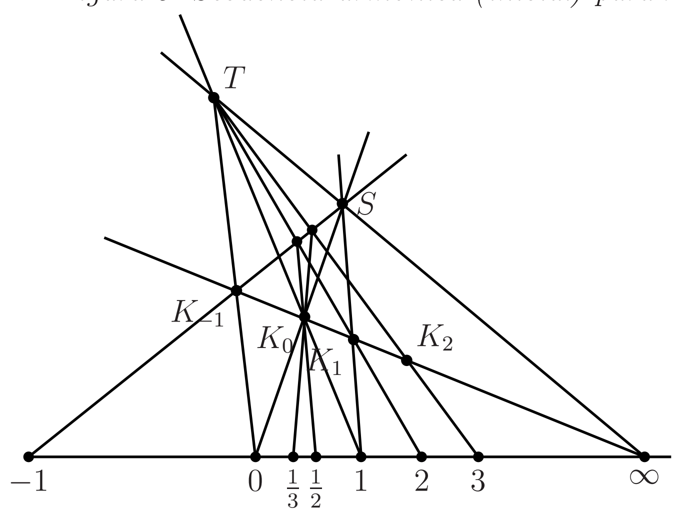

Figura 4: Segunda secuencia armónica para h

Bibliografía

[1] Veblen O. y Young J.W.,*Projective Geometry*, Vol I y II, Blaisdell publishing company,N. York,Toronto, London, 1946.

[2] Blather J.W., *Plane Projective Geometry*, Holden-Day Inc, San Francisco, 1968