El orden de especialización, un puente entre los espacios topológicos y los conjuntos ordenados

Jesús Antonio Ávila G.
Profesor Universidad del Tolima
Tolima, Colombia
javila@ut.edu.co

Introducción

Son muchas las relaciones existentes entre álgebra y topología, entre ellas pueden citarse la teoría de operadores sobre espacios topológicos (operador adherencia, interior, etc.), el espectro primo de un anillo, espacios Booleanos y anillos Booleanos, álgebras de Heyting espaciales y topología, todas ellas de gran importancia, pues han dado origen a innumerables trabajos de investigación. Esto muestra la riqueza de estas dos ramas de la matemática y deja ver que en su interior existen relaciones insospechadas y que en muchos casos, problemas difíciles de solucionar en un área se reducen observándolos en la otra. Ambas ramas se complementan y de hecho pueden dar origen a nuevos e interesantes trabajos.

Esta conferencia busca presentar una interesante relación y es que a todo espacio topológico T_0 se puede asociar un conjunto ordenado, esto da origen a muchas clases de espacios topológicos cuyo conjunto ordenado tiene propiedades especiales como árbol, semi-retículo, conjunto acotado, dirigido, etc. Nuestro objetivo es presentar de forma clara parte de esta teoría, con ejercicios interesantes sobre el tema y mostrar la manera en que se puede utilizar directa e inversamente.

1. Preliminares

1.1. Espacios Topológicos

En este numeral se van a introducir las nociones principales de topología, necesarias para el desarrollo del tema que se desea tratar. Todas ellas y las demostraciones de algunas propiedades, pueden ser consultadas en cualquier texto de topología general como [6], [10] y [11].

Empecemos recordando que una topología sobre un conjunto X, es una colección de subconjuntos de X, que contiene a $\varnothing$, X y es cerrada para uniones arbitrarias e intersecciones finitas. A los elementos de la topología se les llama abiertos y al complemento de cada uno de ellos cerrados.

Con la noción de abierto ya se pueden definir las nociones de interior, punto de acumulación, frontera, exterior, adherencia, etc. Nosotros utilizaremos las siguientes:

El derivado de un conjunto $A(A')$ en un espacio topológico X, es el conjunto de puntos de acumulación de A, es decir, puntos tales que todo abierto que los contiene, contiene algún punto de A distinto de ellos mismos.

La adherencia de un conjunto $A(\overline{A})$ en un espacio topológico, es la intersección de todos los cerrados que contienen a A ó es $A \cup A'$. Un conjunto se llama punto clausura si es igual a la adherencia de un punto y el kernel de $x(\hat{x})$, es el conjunto de puntos y, tales que x no se puede separar por abiertos de y.

También se pueden introducir los axiomas de separación, los cuales son propiedades topológicas que se refieren fundamentalmente a la separación por abiertos de puntos, puntos y conjuntos cerrados ó cerrados y cerrados. Los más conocidos son:

T_4	$\Rightarrow$	$T_{3\frac{1}{2}}$	$\Rightarrow$	T_3	$\Rightarrow$	T_2	$\Rightarrow$	T_1	$\Rightarrow$	T_0

1.2. Conjuntos Ordenados

En este numeral se introducen las nociones más importantes de conjuntos ordenados como definición, elementos especiales, clases especiales de conjuntos ordenados, entre otras. Existe mucha literatura sobre el tema, aunque lo que se va a tratar en este documento no es “muy”profundo, pueden consultarse [4],[8] y [9].

Un conjunto es ordenado si sobre él se define una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Partes de un conjunto con la contenencia y los conjuntos numéricos con el orden usual, son tal vez los conjuntos ordenados más conocidos.

En este momento nos preguntaríamos cómo construir conjuntos ordenados, pues por la definición se podría pensar que encontrarlos es difícil, pero no es cierto, por ejemplo consideremos el conjunto $X = \{a, b, c, d, e\}$ y ubiquemos los elementos de X como indica la Figura 1.

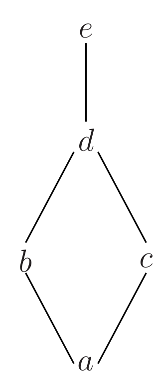


Figura 1

Ahora se tiene un orden definiendo $x \leq y$ si hay una cadena ascendente que une x con y. Nótese que de esta forma se pueden construir todos los conjuntos ordenados que queramos!, Basta tomar los puntos del espacio y unirlos por segmentos ascendentes en la forma que nosotros deseemos. El siguiente diagrama muestra varios ejemplos de conjuntos ordenados.

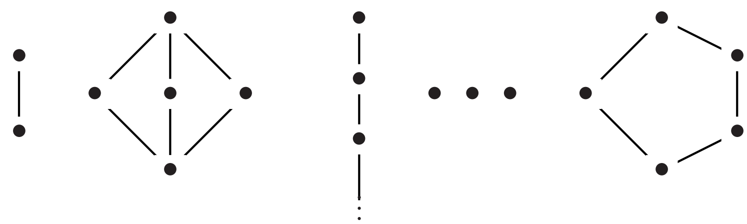


Figura 2

Ahora se van a definir algunas nociones importantes en los conjuntos ordenados, que serán tenidas en cuenta más adelante.

Un elemento x se llama máximo, si para todo y, $y \leq x$. Similarmente se define elemento mínimo.

Un elemento m se llama maximal, si siempre que $m \leq t$, esto implica que $m = t$. Similarmente se define elemento minimal.

Un elemento c es una cota superior de $A \subseteq X$, si para todo elemento a de A, $a \leq c$. Similarmente se define cota inferior.

Un conjunto ordenado se llama totalmente ordenado, si para todo x, y se tiene $x \leq y$ ó $y \leq x$.

Un conjunto ordenado se llama árbol si para todo x, el conjunto $\{y \in X \mid y \leq x\}$ es totalmente ordenado.

Un conjunto ordenado se llama retículo si para todo x,y existe $sup\{x, y\}$ e $inf\{x, y\}$.

Un conjunto ordenado es un conjunto dirigido si para todo x,y existe z, tal que, $x \leq z$ y $y \leq z$.

2. El Orden de Especialización

En este numeral se considera un espacio T_0 arbitrario, al cual se le asocia un orden, se presentan algunos ejemplos y se observa cual es la traducción de algunas nociones topológicas a conjuntos ordenados.

Dado un espacio topológico T_0, nótese que la relación $\leq$ definida por $x \leq \overline{y}$, si y solo si, $x \in y$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es decir todo espacio T_0 puede ser convertido en un conjunto ordenado por este método!

Consideremos un ejemplo muy particular, sea $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ y $T = \{\varnothing, X, \{2\}\ , \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}\}$, entonces (X,T) es un espacio T_0. Veamos cual es el conjunto ordenado, asociado a este espacio. Nótese que $\overline{1} = \{1\}$, $\overline{2} = \{1,2\}$, $\overline{3} = \{1,3\}$, $\overline{4} = \{1,2,3,4\}$, según esto $1 \leq 2 \leq 4$, $1 \leq 3 \leq 4$, $2 \not\leq 3$, $3 \not\leq 2$. Se tiene el siguiente conjunto ordenado:

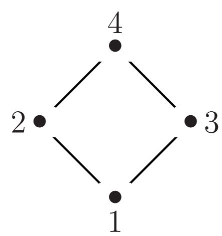
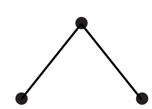
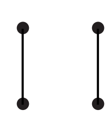


Figura 3

De esta forma nos podemos preguntar sobre cual es la traducción de algunas nociones topológicas en los conjuntos ordenados. En la siguiente tabla se presentan algunos resultados relacionados con el interrogante anterior.

ESPACIOS TOP. T_0		CONJUNTOS ORDENADOS
$X = \{1,2,3\}$, $T = \{\varnothing, X, \{1,3\}, \{3\}, \{2,3\}\}$	$\longrightarrow$	
$X = \{a,b,c,d\}$, $T = \{\varnothing, X, \{a,b\}, \{b\}, \{c,d\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d\}\}$	$\longrightarrow$	

Un punto cerrado	$\longrightarrow$	Un minimal !
Un punto denso	$\longrightarrow$	Un máximo !
Un espacio T1	$\longrightarrow$	$\cdots \bullet \quad \bullet \quad \bullet \cdots$?
Un espacio T_2	$\longrightarrow$	Igual que T1 !
Anidado	$\longrightarrow$	$\vdots$ $\vert$ $\bullet$ $\vert$ $\bullet$ $\vert$ $\vdots$?

Tabla: 1

Invito a los lectores a considerar cual sería el conjunto ordenado asociado ó qué propiedades tendría ese orden, cuando se toma un espacio $T(\delta), T_F, T_D$, T_{UD}, T_Y [4, 5] ó un espacio sobrio [1, Pág. 7].

Esta forma de asociación también permite hacer interrogantes en forma inversa, es decir, se podría tomar una propiedad de los conjuntos ordenados y entonces caracterizar los espacios T_0 cuyo orden asociado tiene esa propiedad fijada de antemano. En este sentido se pueden citar los siguientes ejemplos.

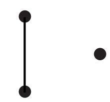
ESPACIOS TOP. T_0		CONJUNTOS ORDENADOS
$X = \{1, 2, 3\}$, $T = \{\varnothing, X, \{1, 3\}, \{3\}, \{2, 3\}\{2\}\}$	$\longleftarrow$	
Un espacio T_0, donde para todo a, e se cumple $\hat{a} \cap \hat{e}$ es Un punto cerrado	$\longleftarrow$	Un árbol !
intersección de dos kernels es distinta de $\varnothing$.	$\longleftarrow$	Un conjunto dirigido !
Un espacio T_0, donde la intersección de dos puntos clausura es punto clausura y la intersección de dos kernels es kernel.	$\longleftarrow$	Un retículo !

Tabla: 2

Es bueno mencionar que aunque esta teoría ha sido bastante estudiada [4, 5, 7], no puede considerarse que ya todo esté realizado, pues se han venido generalizando los resultados obtenidos en ella desde el punto de vista de los pre-órdenes [2, 9]. Entonces todavía hay camino por recorrer!!

Bibliografía

[1] L. Acosta, *El Funtor Espectro: Un Puente Entre Álgebra y Topología*, Memorias XIX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 2003.

[2] L. Acosta y E. Lozano, *Compactificaciones por un Punto de un Espacio Topológico*, Memorias XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 1999.

[3] L. Acosta y E. Lozano, *Una Caracterización de las Topologías Compactas T0*, Boletín de Matemáticas, Nueva Serie, Vol. VI (1999) No. 2, 77-84.

[4] S. Andima and W. J. Thron, *Order-induced Topological Properties*, Pac. J. Math., Vol. 75 (1978), No.2, 297-318.

[5] C. E. Aull and W. J.Thron, *Separation Axioms Between T0 and T1*, Ind. Math. 24 (1962), 26-37.

[6] R. Engelking, Outline of General Topology, North Holland, Amsterdam, 1968.

[7] R. Larson, *Minimal T0-spaces and Minimal TD-spaces*, Pac. J. Math., Vol. 31 (1969), No.2, 451-457.

[8] F. Lorrain, *Notes on Topological Spaces with Minimum Neighborhoods*, Amer. Math. Monthly, Vol. 76 (1969), 616-627.

[9] E. Lozano, *Sobre algunas Topologías Concordantes*, Tesis Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2000.

[10] J. R. Munkres, *Topology a First Course*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[11] G. Rubiano, *Topología General*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.