¿Topología de la esencia o esencia de la topología?

Raúl Andrés Leal
Estudiante Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
rogemodron@hotmail.com.co

Introducción

> *La matemática es una parcela de nuestro universo personal en la que los elementos de la realidad son menos importantes que las relaciones que nuestra mente establezca entre ellos.*
> *El pedazo de papel escrito no constituye únicamente el resultado del proceso de hacer matemática, sino un medio para transmitir imágenes ya configuradas antes de tomar la pluma.*
> *Los artículos, libros y demás son sólo un medio para plasmar ideas.*
> **Adaptación de frases dichas por Salvador Dalí [30]**

Este trabajo son los dos primeros capítulos del trabajo de grado *Hahn-Banach-Tarski, los primeros pasos hacia la versión constructiva de la paradoja de Banach Tarski.* presentado en la Universidad Nacional de Colombia en el año 2003. Estos capítulos fueron presentados en el XIV Encuentro de geometría y sus aplicaciones en Junio del 2003 con sede en la Universidad Pedagógica Nacional.

Empecemos mencionando algunas de las concepciones tocantes a la matemática constructiva.

Lo primero que diremos es que aquí no diferenciaremos entre la matemática constructiva y la matemática intuicionista. En principio, muy en el fondo, estos dos tipos de matemática son distintas. La matemática intuicionista es la que está relacionada directamente con las ideas de Brouwer y sólo permite los razonamientos que usen lógica intuicionista; la matemática constructivista, se refiere a la que hace construcciones que valgan en cualquier contexto constructivo. Por *contexto* entenderemos *topos de Grothendieck*, por lo que las técnicas de trabajo en cada uno de tales tipos de matemática pueden llegar a ser sustancialmente distintas. Por ejemplo, para demostrar un teorema φ en matemática intuicionista sólo esta permitido usar métodos *constructivos*, en cambio para demostrar φ en matemática constructiva esta permitido usar técnicas no constructivas como el Axioma de Elección, siempre y cuando logremos concluir que φ vale en cualquier contexto constructivo.

Lo común a estos dos tipos de matemáticas es que las proposiciones que pueden ser demostradas en cualquiera de las dos, valen en los mismos contextos, lo cual es nuestra razón principal para no diferenciarlas. Otra razón es que procuraremos hacer una combinación de las dos para elaborar nuestros argumentos más fácil y claramente.

Hablemos un poco de lo que son los métodos *constructivos*.

Decir que una proposición p ha sido demostrada por métodos constructivos, para nosotros va a significar, que p fue demostrada usando lógica intuicionista.

- Demostrar $p \wedge q$ significa que hemos demostrado constructivamente p y hemos demostrado constructivamente q.
- Demostrar constructivamente $p \vee q$ significa que o bien hemos demostrado constructivamente p, o bien hemos demostrado constructivamente q.
- Demostrar constructivamente $p \to q$ significa que tenemos un método finito con el cual toda construcción de p se puede transformar en una construcción de q.
- Demostrar $\neg p$ significa que suponer p nos lleva a una contradicción.
- Demostrar $(\exists x)(p(x))$ significa que podemos dar *un método* finito para exhibir a tal que se cumple $p(a)$;
- demostrar $(\forall x)(p(x))$, significa que tenemos *un método* finito tal que para cualquier a podemos mostrar que vale $p(a)$.

En este punto es bueno notar que la matemática intuicionista no se caracteriza únicamente por rechazar el uso del Axioma de Elección, ni por criticar la concepción del infinito como un ente acabado o condenar el uso de la reducción al absurdo, tal como muchos lo creen, restando así méritos al trabajo de los constructivistas. No se puede negar que en algún momento se pudo pasar por este modo de entender, pero es una etapa completamente superada.

En este momento, para hacer matemática constructiva se requiere de un muy buen conocimiento y entendimiento de la matemática clásica. Se reconoce de manera abierta que el trabajo hecho en matemática clásica es de vital importancia para el desarrollo de cualquier tipo de matemática, como caso particular la matemática intuicionista. Los grandes avances en matemática, según nos ha mostrado la historia, tienen un fuerte componente clásico.

Lo que se hace generalmente en la matemática constructiva es analizar a fondo los métodos utilizados clásicamente, para poder llevarlos a formulaciones constructivas comúnmente más generales que las dadas clásicamente; un ejemplo típico de esto es el trabajo en teoría de categorías. Por este motivo, en este trabajo se intentará evitar hacer referencia directa a los elementos que constituyen las estructuras en cuestión. En ningún momento se pretende mutilar la matemática dejándola sin sus resultados más importantes como son el teorema de Hahn-Banach y el teorema de Tychonoff, entre otros. El ideal es que todo resultado F demostrado clásicamente tenga una contraparte F' demostrable constructivamente, la cual, trabajando clásicamente, sea equivalente a F.

Una de las principales razones para clamar por las demostraciones constructivas es la pérdida de información que podría acarrear la demostración clásica de F. Tomemos el siguiente ejemplo clásico.

Proposición 1. *Existen dos números irracionales a, b tales que a^b es racional.*

Demostración. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional tomamos $a = b = \sqrt{2}$, sino tomamos $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$ y tenemos que

$$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

$\square$

El problema en la conclusión de esta demostración consiste en que nos quedamos sin saber al fin quiénes son exactamente a y b, sabemos que en cualquier caso $b = \sqrt{2}$, pero no sabemos si $a = \sqrt{2}$ o $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. O sea no tenemos una respuesta exacta.

Un ejemplo es el teorema de Hahn-Banach. El desconocimiento de la extensión garantizada por dicho teorema nos priva de cualquier propiedad que queramos imponer en un futuro sobre el funcional encontrado.

Esta es una de las razones para no aceptar el Axioma de Elección, pues nos habla de la existencia de un objeto matemático A, el cual puede ser un elemento maximal o un buen orden dependiendo de la forma de elección que se use, pero en ningún caso nos dice quién es A, no nos da una descripción de A, sólo nos dice que dicho A existe, nada más, de modo que no tenemos información para hablar de A, algo lamentable pues los objetos que se obtienen por estos métodos son muy interesantes, son supremamente útiles. Un ejemplo de ello es el teorema de Hahn-Banach. Otro ejemplo, si quisiéramos saber si el intervalo $[a, b]$ en los reales es compacto con la topología inducida por el buen orden que se debe tener por el Axioma de Elección, simplemente no podríamos saberlo, pues no sabemos cómo es dicho buen orden. Ni siquiera podemos responder cómo es dicha topología con respecto a la topología usual, con lo cual de nuevo recalcamos que tener existencias sin saber quien es el objeto mencionado no es tan bueno. En un principio es útil pero después de que se sabe que existen dejan de ser tan interesantes. Tal vez no dejen de ser interesantes, pero digamos que dejan de ser manejables. No existe un tratado con un título como *Sobre la separabilidad de los abiertos usados en los subcubrimientos finitos obtenidos por el teorema de Tychonoff*, el punto no es si dicho tratado es o no útil, el punto es que es sobremanera complicado intentar determinar una propiedad sobre *todos* los subcubrimientos finitos obtenidos por Tychonoff, pues no tenemos la más remota idea de cómo sean en general. La propuesta que hacemos es que una vez se ha obtenido algo con el Axioma de Elección, el cual debe ser el primer método para demostrar dicha existencia, se debe volver sobre lo hecho con la intención de construir dicho objeto. Hablando platónicamente, si sabemos que dicho objeto existe, por el Axioma de Elección u otro método no constructivo, debemos hacer el camino para llegar a él directamente y poder contemplarlo en toda su inmensidad.

Antagónicamente, hay momentos en que la matemática clásica peca por exceso de información. Estos excesos son comúnmente debidos a los infinitos actuales. Por ejemplo, consideremos una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ completa, es decir sabiendo cómo es x_n para cualquier número natural n. Esto es demasiada información, de la cual la mayoría es inoficiosa. Si en vez de eso consideramos el método para construir x_n para todo número natural n, es algo más manejable a partir de lo cual eventualmente puedo saber cómo es toda la sucesión.

El punto es trabajar sólo con la información que sea necesaria.

Karla: *¿Comó sé cuál es la información necesaria?*
Su pregunta es análoga a la pregunta qué se hace cuando se esta comenzando en las matemáticas *¿Cómo sé qué camino tomar para hacer una demostración?*, en ambas la respuesta es la misma: *Eso se va descubriendo con el trabajo.*

Los constructivistas contemporáneos no tratan de ir en contra de ninguna corriente para fundamentar las matemáticas. Ya no se discute si la matemática es una parte de la lógica o si la lógica es una parte de la matemática. Se discute más bien el por qué llevar a cabo dicha discusión. No se reniega de los sistemas axiomáticos, como alguna vez lo hiciera Brouwer. La matemática constructiva los usa de manera constante y fructífera, el sistema axiomático para la lógica intuicionista es bien conocido. Aquí el uso de sistemas axiomáticos estará a la orden del día. Lo que se rechaza es el uso de sistemas axiomáticos que se enuncien sin hacer primero una referencia a un contexto en el cual dichos axiomas tengan sentido. En una opinión muy personal, considero que reducir la matemática a un simple juego con símbolos es tan insensato como reducir una obra de Bach a un simple garabateo sobre una partitura.

Es sabido que las demostraciones intuicionistas pueden llegar a ser tediosas, pesadas e ilegibles comparadas con sus contrapartes clásicas. Sin embargo en matemática intuicionista las demostraciones pasan a segundo plano, dejan de ser el motor de la matemática. Por supuesto que hay que hacerlas detallada y cuidadosamente, pues son la base de las matemáticas, pero lo realmente importante son las ideas, lo realmente importante es saber qué es lo que hay que demostrar, lo que en nuestro contexto sería: ¿cuál es la versión F' constructiva?, ¿cuál es la mínima información necesaria? Esa es la parte importante; como decía Riemman

> *si tan solo tuviera los teoremas (enunciados) fácilmente hallaría sus demostraciones.*

Para terminar esta introducción y entrar en materia, fijemos un poco la notación que no es tan común.

Notación 1. *Si tenemos un conjunto de sentencias* Γ *y una proposición* φ*, escribiremos,*

$$\frac{\Gamma}{\varphi};$$

lo cual significará que de Γ se deduce φ .

Notación 2. *Si escribimos,*

$$\frac{\psi}{\overline{\varphi}};$$

ello significará que de ψ se deduce φ y que de φ se deduce ψ .

Notación 3. *Cuando hablemos de conjuntos, en lugar de decir* $A \cap B \neq \emptyset$*, diremos,*

$$A \between B;$$

lo cual significará $(\exists x)(x \in A \wedge x \in B)$*.*

Esto último es más fuerte que decir simplemente que su intersección es no vacía pues necesitamos un método para construir el elemento común, lo cual en términos demostrativos es bastante diferente. A un conjunto A para el cual podamos demostrar que $(\exists x)(x \in A)$ lo llamaremos *habitado*
No siendo más, entremos en materia.

Notas y Referencias

Lo escrito en esta introducción es más o menos uno aproximación al a cosmovisión del autor, el cual se responsabilisa por lo dicho en ella, hay diferentes frases tomadas con algunas modificaciones de ([11, 5, 6, 10, 13, 21, 23, 31]). La introducción es una articulación de los artículos anteriormente citados.

1. ¿Topología de la Esencia o Esencia de la Topología?

Cuando los patitos salieron del cascarón, su primera frase fue la siguiente: "¡Qué grande es el mundo! " *Y no es extraño, pues respiraban más libremente que en el estrecho recinto de su cascarón.*
-¿Creéis tal vez -dijo la madre-, que lo que veis es todo el universo? Oh, no: el mundo se extiende hasta el otro lado del jardín, hasta la iglesia, cuyo campanario he divisado una vez, sin pasar de allí. **Fragmento de "El Patito Feo "**[1]

Empezaremos haciendo un análisis de la topología intentando dar una justificación, más o menos aceptable, del por qué usar las técnicas que aquí se presentaran.

Según se dijo anteriormente, este capítulo lo podríamos ver como un ejemplo en el cual se busca la generalidad de un concepto clásico. En este caso el concepto de topología.

Primero hagamos un breve recuento clásico.

1.1. Espacios Topológicos Clásicos

La forma más común de definir un espacio topológico, es la que hace referencia directa a la topología:

Definición 1. *Un espacio topológico es una pareja $\langle X, \tau\rangle$, donde X es un conjunto, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$, tal que $\emptyset, X \in \tau$, τ es cerrado para uniones arbitrarias e intersecciones finitas. A τ se le llama una topología para X, y a los elementos de τ se les llama abiertos.*

Ejemplos de espacios topológicos son:

- $\langle X, \{\emptyset, X\}\rangle$;

- $\langle X, \mathcal{P}(X)\rangle$;
- $\langle \mathbb{R}, \bar{B}\rangle$, donde $\bar{B} = \big\{A \subseteq \mathbb{R} : A = \bigcup_{i\in I}(a_i, b_i), I \subseteq \mathbb{N}, a_i, b_i \in \mathbb{R}\big\}$.

Las topologías son a veces mejor representadas a través de las llamadas *bases*.

Definición 2. *Un conjunto $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una base para una topología sobre X, si y solo si S es cerrado para intersecciones finitas.*

Esto equivale a decir que si tomamos τ como la colección de todas las uniones de elementos de S tenemos que τ es una topología para X.

Un ejemplo de base es $S = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, la cual es una base para la topología usual de los reales.

Otra forma de generar topologías es a través de las llamadas *subbases*.

Definición 3. *Un conjunto $W \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una subbase para una topología si y solo si*

$$\tau = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} s_i : n \in \mathbb{N}, s_i \in W\right\};$$

es una base para una topología sobre X.

Claramente toda base es una subbase, pero existen subbases que no son bases.

Hay varias propiedades acerca de las topologías que iremos discutiendo a medida que las vayamos necesitando.

1.2. Parejas Básicas

Antes de continuar consideremos el siguiente problema:

¿Qué tienen en común en las tres maneras presentadas en la sección anterior para generar topologías?

Rápidamente se puede pensar: *Un conjunto X sobre el cual se monta la topología.* Con un poco más de análisis, ustedes debieron notar que en las parejas $\langle X, \tau\rangle, \langle X, S\rangle, \langle X, W\rangle$ se tiene que $\tau, S, W \subseteq \mathcal{P}(X)$. O sea, hay otro conjunto relacionado. Pueden hablar de las propiedades de los conjuntos τ, S, W, pero eso no nos interesa por ahora, lo que nos interesa es otra semejanza, que tal vez ustedes intentando hayan notado, o que dada su evidencia, hayan considerado irrelevante. Me estoy refiriendo a que el conjunto X y el respectivo τ, S, W están relacionados. En un principio decimos $\tau \subseteq \mathcal{P}(X), S \subseteq \mathcal{P}(X), W \subseteq \mathcal{P}(X)$, lo cual es de por sí una relación, pero lo que quiero resaltar es que existe además una relación entre los elementos de X y los elementos de τ, S, W, en este caso dado $x \in X$ y un elemento a en τ, S ó W, según sea el caso, existe la relación *"x es un punto en a"* o sea "$x \in a$".

Diego: *¿Para que entramos en estos detalles?*
Para hacer una abstracción presentando la siguiente definición,

Definición 4. *Una pareja básica es una estructura $\chi = \langle X, \Vdash, S\rangle$ donde X, S son conjuntos (clases si es necesario), $\Vdash$ es una relación binaria de X a S* [1].

Helena: *¿Por qué las llama parejas básicas si son una tripla?*
Las llamamos parejas básicas, porque lo importante es la relación $\Vdash$ la cual es una relación binaria, y son básicas en el siguiente sentido:

Todo lo que necesitamos para hacer topología son parejas básicas .

Calma estimados muchachos, no abandonen este salón tan rápidamente por una afirmación tan insensata. Admito que el utilizar la palabra "todo"fue un tanto pretencioso, pero a lo que me refiero es que usando parejas básicas podemos definir las nociones de abierto, cerrado, punto interior y punto de frontera entre otras.

Karla: *¿Cómo?*
Dame tiempo.

[1] Si simplemente pedimos que $\Vdash$ sea una relación n-aria, tenemos los llamados *espacios de Chu*, los cuales están siendo usados en la teoría de la computación.

Antes de empezar, hay que notar que todo espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$ se puede ver como una pareja básica tomando

$$X = X,\ S = \tau,\ \Vdash = \in .$$

Gracias a nuestra definición, en principio no toda pareja básica es un espacio topológico pues no hemos dicho nada sobre S ni sobre la relación $\Vdash$. El objetivo primordial de este capítulo es ver cuándo una pareja básica define un espacio topológico. Algunos ejemplos de parejas básicas son los siguientes.

Ejemplo 1. *Sea S la clase de los cuerpos de característica p, y sea X la clase de polinomios con coeficientes en los cuerpos de S. Definimos $q(x) \Vdash F$ si y solo si $q(x)$ tiene una raíz en F.*

Ejemplo 2. *Sea X el conjunto de sentencias sobre el lenguaje de una teoría T y sea S la clase de modelos de la teoría T. Definimos $\varphi \Vdash M$ si y solo si M valida φ ($M \vDash \varphi$).*

Veamos un ejemplo un tanto menos matemático.

Ejemplo 3. *Sea X el conjunto de sustantivos en el idioma castellano, S el conjunto de adjetivos en el mismo idioma, sea P un individuo que habla español. Tomando $x \in X$, y $b \in S$ definimos $x \Vdash b$ si y solo si el individuo P aplica el adjetivo b al sustantivo x.*

Estos son ejemplos de parejas básicas que están lejos de ser espacios topológicos, especialmente el último. Aún así, es interesante que podremos hablar de abiertos y cerrados en estos ejemplos.

1.3. Los Operadores ext , rest , $\Box$, $\Diamond$

Dada una pareja básica $\langle X, \Vdash, S \rangle$ podemos definir inicialmente dos funciones.

Definición 5. *Dado $x \in X$ definimos $\Diamond x = \{a \in S : x \Vdash a\}$, es decir, una función*

$$\Diamond : X \to \mathcal{P}(S).$$

Ejemplo 4. *Tomemos la pareja básica del ejemplo 1. Si* $p(x)$ *es un polinomio* $\Diamond\, p(x)$ *es la clase de cuerpos en los cuales* $p(x)$ *tiene una raíz.*

Ejemplo 5. *Pensemos en la pareja básica del ejemplo 2. Si* φ *es una sentencia,* $\Diamond\, \varphi$ *es la clase de modelos en los cuales vale* φ*. Si* $\Diamond\, \varphi = S$*,* φ *es un teorema de la teoría* T*.*

Ejemplo 6. *Consideremos la pareja básica del ejemplo 3. Si* s *es un sustantivo en español,* $\Diamond\, s$ *es el conjunto de adjetivos que* P *asigna a* s*, es decir, las características que el individuo* P *cree que el sustantivo* s *posee.*

Igualmente, dado $a \in S$ podemos definir

Definición 6. $\mathbf{ext}\, a = \{x \in X : x \Vdash a\}$*, o sea tenemos una función*

$$\mathbf{ext} : S \to \mathcal{P}(X).$$

Ejemplo 7. *Considerando la pareja básica del ejemplo 1, si* F *es un cuerpo,* $\mathbf{ext}\, F$ *es la clase de polinomios que tienen una raíz en* F*. En este contexto podemos hacer afirmaciones como la siguiente:*
Tomando $p(x) \in X$*, podemos afirmar que* F *contiene al cuerpo de descomposición de* $p(x)$ *si y solo si* $\downarrow p(x) \subseteq \mathbf{ext}\, F$*, donde* $\downarrow p(x)$ *es el conjunto de factores de* $p(x)$*.*

Ejemplo 8. *Tomemos la pareja básica del ejemplo 2. Si* M *es un modelo de la teoría* T*,* $\mathbf{ext}\, M$ *es el conjunto de sentencias que valen en* M *o sea* $\mathbf{ext}\, M$ *es la teoría del modelo.*

Ejemplo 9. *En la pareja básica del ejemplo 3, para un adjetivo* a*,* $\mathbf{ext}\, a$ *es el conjunto de sustantivos los cuales* P *cree que cumplen* a*, o sea al alcance del adjetivo* a *según* P*.*

Hagamos un dibujo que nos represente lo anteriormente dicho.

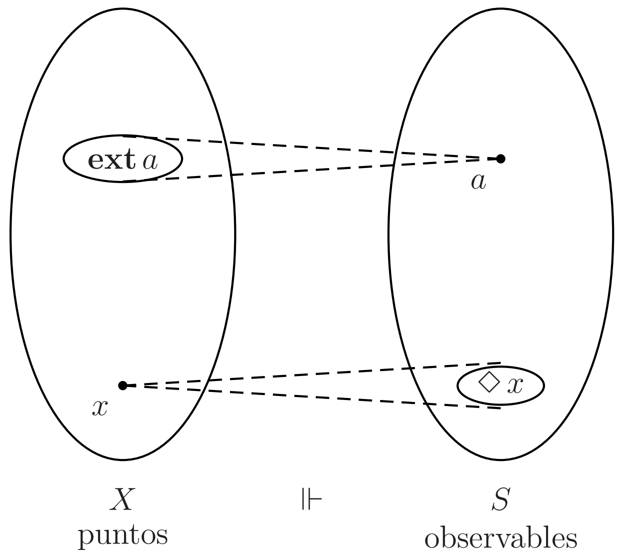

Figura: 1

A los elementos de X los llamaremos *puntos concretos*, o simplemente puntos por brevedad, y a los elementos de S los llamaremos *observables*. La idea intuitiva de esos nombres está en que si $x \Vdash a$, a de cierta manera se puede ver como una vecindad de x. Para aclarar un poco recordemos las nociones de interior y clausura usadas en topología. En nuestro contexto, dado un $D \subseteq X$ podemos hablar de su interior y clausura como sigue,

$$x \in \mathbf{int}\, D \text{ si y solo si } \exists a(x \Vdash a \wedge \mathbf{ext}\, a \subseteq D),$$
$$x \in \mathbf{cl}\, D \text{ si y solo si } \forall a(x \Vdash a \rightarrow \mathbf{ext}\, a \between D).$$

Esto lo podemos hacer siguiendo la idea de que los elementos de S son análogos a los elementos de la topología. De lo cual inmediatamente podemos decir,

Definición 7.

$$\begin{aligned} D \textit{ es abierto si y solo si } D &= \mathbf{int}\, D, \\ \textit{si y solo si } D &\subseteq \mathbf{int}\, D. \\ D \textit{ es cerrado si y solo si } D &= \mathbf{cl}\, D, \\ \textit{si y solo si } \mathbf{cl}\, D &\subseteq D. \end{aligned}$$

Esta es entonces nuestra primera aproximación a las parejas básicas como espacios topológicos. A cada pareja básica le podemos asignar el conjunto de subconjuntos de X que son abiertos según la anterior definición, igualmente podemos asignarle el conjunto de cerrados. Estos abiertos (cerrados) casi cumplen las propiedades para ser una topología.

Luitzen: *¿Cuál es el problema?, tiene abiertos y cerrados, además la definición que usted hace es análoga a la definición de interior y clausura en topología. Simplemente hay que interpretar los elementos de S como abiertos y ya.*
No podemos decir eso tan apresuradamente. Es cierto que estos abiertos son cerrados para uniones arbitrarias, pero no necesariamente son cerrados para intersecciones finitas. Además no necesariamente X es abierto, pues dado $x \in X$ si queremos que sea un punto interior necesitaríamos $\exists a(x \Vdash a \wedge \mathbf{ext}\, a \subseteq X)$, y nada nos dice que dicho a exista.

Nuestro objetivo es volver la topología plenamente formal. Los abiertos que hemos definido son subconjuntos o subclases de X, los llamaremos *abiertos (cerrados) concretos*; como queremos trabajar sintéticamente, es decir, de manera que lo que hagamos pueda ser interpretado en teoría categorías, usando categorías arbitrarias o por lo menos en las categorías llamadas *topos*. Esto nos permitiría afirmar que nuestro trabajo es constructivo [13, 3, 18, 10].

Más adelante volveremos sobre los operadores **cl** e **int**.

Al tomar $D \subseteq X$ estábamos intentando motivar la extensión de las funciones $\diamond, \mathbf{ext}$ sobre $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(S)$ respectivamente. Esto se puede hacer de una manera muy natural como sigue.

Definición 8 (Diamante, $\diamond$). *la función $\diamond : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(S)$ la definimos de la siguiente manera: Sea $D \subseteq X$,*

$$\begin{aligned} a \in \diamond D &\text{ si y solo si } \exists x(x \Vdash a \wedge x \in D), \\ &\text{ si y solo si } \mathbf{ext}\, a \between D. \end{aligned}$$

En otras palabras $\diamond D \equiv \{a : \exists x(x \Vdash a \wedge x \in D)\}$.

Una lectura intuitiva para $b \in \diamond D$ es la siguiente: *b toca a D*. Podemos ver que $\diamond D = \bigcup_{x \in D} \diamond x$.

A partir de ahora, cuando nos refiramos a $\Diamond$ nos referiremos al función anteriormente definida. Cuando escribamos $\Diamond x$ lo interpretaremos como $\Diamond\{x\}$.

De la misma manera podemos extender **ext** diciendo,

Definición 9 (ext). *La función* **ext** $: \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X)$ *la definimos de la siguiente manera : Sea* $U \subseteq S$,

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{ext}\, U \ &\textit{si y solo si } \exists a(x \Vdash a \wedge a \in U), \\ &\textit{si y solo si } \Diamond x \between U. \end{aligned}$$

Lo cual dice que $\mathbf{ext}\, U \equiv \{x : \exists a(x \Vdash a \wedge a \in U)\}$.

$x \in \mathbf{ext}\, U$ intuitivamente nos dice: *x es un punto en un elemento a de U.* Podemos ver que $\mathbf{ext}\, U = \bigcup_{a \in U} \mathbf{ext}\, a$.
A partir de ahora, cuando nos refiramos a **ext** nos referiremos al función anteriormente definida. Cuando escribamos $\mathbf{ext}\, a$ lo interpretaremos como $\mathbf{ext}\,\{a\}$.

Mirando las definiciones de **ext** , $\Diamond$, vemos que sólo hablamos de $\Vdash$ por medio de cuantificadores y conectivos lógicos, luego podríamos pensar en sus duales de la siguiente manera.

Definición 10 (Caja $\Box$). *Definimos la función* $\Box : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(S)$ *de la siguiente manera: Sea* $D \subseteq X$ *definimos,*

$$\begin{aligned} a \in \Box D \ &\textit{si y solo si } \forall x(x \Vdash a \to x \in D) \\ &\textit{si y solo si } \mathbf{ext}\, a \subseteq D. \end{aligned}$$

Lo cual quiere decir que $\Box D \equiv \{a : \forall x(x \Vdash a \to x \in D)\}$.

Intuitivamente $a \in \Box D$ se puede leer *todos los puntos de a están en D, o sea, a está dentro de D.*

Ejemplo 10. *Consideremos la pareja básica del ejemplo 2, dada D una clase de sentencias, $\Box D$ es la clase de modelos tales que $Th(M) \subseteq D$.*

Igualmente podemos definir el dual de **ext** .

Definición 11 (rest). *Definimos la función* **rest** $: \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X)$ *de la siguiente manera: Sea* $U \subseteq S$ *definimos,*

$$x \in \mathbf{rest}\,U \text{ si y solo si } \forall a(x \Vdash a \to a \in U),$$
$$\text{si y solo si } \Diamond x \subseteq U.$$

Lo cual es igual a decir que $\mathbf{rest}\,U \equiv \{x : \forall a(x \Vdash a \to a \in U)\}$.

Ejemplo 11. *Tomemos de nuevo la pareja básica del ejemplo 2, dado* U *una clase de modelos,* $\mathbf{rest}\,U$ *es la clase de las sentencias que sólo valen en los elementos de* U.

Debido a que el origen de los dos últimos operadores es la lógica y no la topología, su lectura no se considera para nada evidente.

Karla: *¿Para qué estos operadores?*

Pues porque ahora tenemos cuatro funciones,

$$\Diamond : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(S) \qquad \mathbf{rest} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X);$$
$$\Box : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(S) \qquad \mathbf{ext} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(X).$$

Antes de continuar hagamos el siguiente diagrama con las relaciones entre los operadores $\Diamond, \Box, \mathbf{ext}, \mathbf{rest}$.

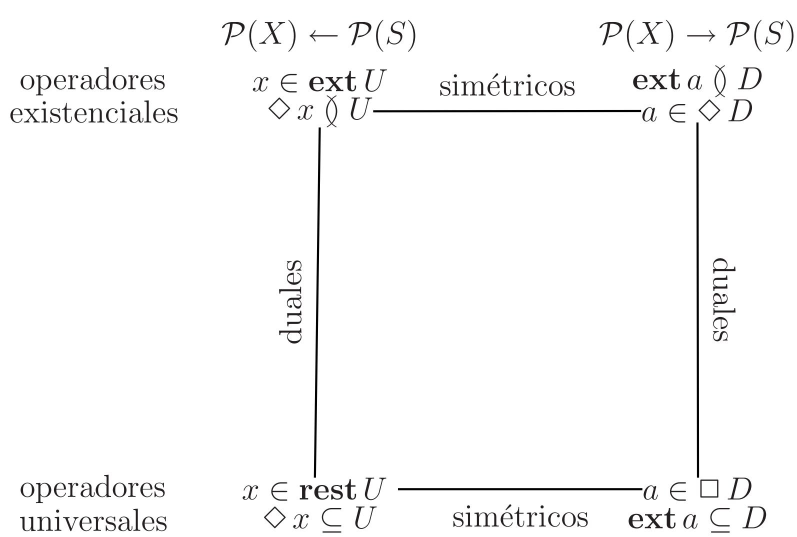

Figura: 2

Volviendo a las funciones, es bien sabido que para un conjunto o una clase X, el conjunto o clase formado por $\mathcal{P}(X)$ es un retículo completo, co-completo, y distributivo, es decir, es un álgebra de Heyting. Además es sabido que los abiertos de un espacio topológico forman un álgebra de Heyting. Luego sería muy bueno si las funciones $\diamond$, $\square$, $\mathbf{ext}$, $\mathbf{rest}$ fueran funciones entre retículos, y que preservaran las uniones y las intersecciones. No pedimos que sean funciones entre álgebras de Heyting puesto que esa no es la noción que se usa para representar espacios topológicos constructivos. La noción usada es la noción de local, que difiere de la de álgebra de Heyting sólo cuando se consideran los morfismos entre locales, los cuales son distintos de los morfismos entre álgebras de Heyting.

Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 2 (Monotonía). *Los operadores* $\square$, $\diamond$, $\mathbf{rest}$, $\mathbf{ext}$ *son monótonos. i.e; si* $U \subseteq V$ *entonces* $\square U \subseteq \square V$, *igualmente para* $\diamond$, $\mathbf{rest}$, $\mathbf{ext}$.

Demostración. Sólo consideraremos los casos $\diamond$ y $\mathbf{rest}$, los otros son similares.
Sean $U \subseteq V \subseteq X$, sea $a \in \diamond U$ entonces tenemos $\exists x(x \Vdash a \wedge x \in U)$. Como $U \subseteq V$, tenemos $x \in V$ luego podemos decir $a \in \diamond V$, en conclusión $\diamond U \subseteq \diamond V$.
Sean $U \subseteq V \subseteq S$, sea $x \in \mathbf{rest}\, U$, entonces $\diamond x \subseteq U$, o sea que podemos decir $\diamond x \subseteq V$ de donde concluimos que $x \in \mathbf{rest}\, V$, o sea $\mathbf{rest}\, U \subseteq \mathbf{rest}\, V$. $\square$

Sigamos haciéndonos preguntas sobre las cuatro funciones construidas. Sabemos que $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(S)$ como retículos tienen unos elementos muy especiales, como lo son $X, \emptyset, S, \emptyset$ respectivamente. ¿Qué pasa con estos elementos a través de los operadores que hemos definido? Con un poco de análisis nos damos cuenta de lo siguiente:

Proposición 3. *Para cada pareja básica* $\langle X, \Vdash, S\rangle$ *se tiene:*

$$\square X = S, \quad \mathbf{rest}\, S = X, \quad \diamond\emptyset = \emptyset, \quad \mathbf{ext}\,\emptyset = \emptyset.$$

Demostración.

- $\Box X = S$ Tomemos $a \in S$, por definición tenemos $\mathbf{ext}\, a \subseteq X$ luego podemos decir $a \in \Box X$, así que tenemos $S \subseteq \Box X$, como S es el máximo tenemos $\Box X = S$.
- $\Diamond \emptyset = \emptyset$ Dado que para todo $a \in S$ tenemos $\neg(\mathbf{ext}\, a \between \emptyset)$, podemos concluir $\Diamond \emptyset = \emptyset$. Los casos restantes son simétricos.

$\square$

Propiedades como $\Diamond X = S, \Box \emptyset = \emptyset$ y sus simétricas en general no se tienen. Por ejemplo, dado $a \in S$ tenemos $a \in \Diamond X$ si y solo si $\exists x(x \in \mathbf{ext}\, a)$ es decir $\mathbf{ext}\, a$ es habitado, lo cual no siempre se tiene.

Ejemplo 12. *Tomemos un lenguaje fijo para una teoría T, X la clase de los modelos de la teoría, S las sentencias en el lenguaje de la teoría. Definimos $M \Vdash \varphi$ si y solo si $M \vDash \varphi$ (el ejemplo 2 invertido). Si φ una sentencia, tomando $\varphi \wedge \neg\varphi$ tenemos que $\varphi \wedge \neg\varphi \notin \Diamond X$, luego $\Diamond X \neq S$*

Sabemos que X y S son el máximo en sus respectivos retículos, en teoría de categorías son el objeto terminal en la respectiva categoría. Similarmente, $\emptyset$ es el mínimo en le retículo, el inicial en la categoría. Dado que el terminal es un co-límite y el inicial es un límite. Luego tenemos que $\Box$ y **rest** preservan un co-límite, y $\Diamond$ y **ext** preservan un límite. Por simetría no es tan descabellado hacer la siguiente afirmación:

Teorema 1 (Adjunción Fundamental). *Los operadores universales $\Box$ y* **rest** *son adjuntos a derecha de los operadores existenciales $\Diamond$ y* **ext**. *Esto es, dados $D \subseteq X$, y $U \subseteq S$,*

$$\begin{aligned} \mathbf{ext}\, U \subseteq D \quad &\textit{si y solo si} \quad U \subseteq \Box D, \\ \Diamond D \subseteq U \quad &\textit{si y solo si} \quad D \subseteq \mathbf{rest}\, U. \end{aligned}$$

La notación estándar para hablar de adjunciones es $\dashv$, en nuestro caso,

$$\begin{aligned} \mathbf{ext} \dashv \Box \text{ significa } \Box \textit{ es adjunto a derecha de } \mathbf{ext}. \\ \Diamond \dashv \mathbf{rest} \text{ significa } \mathbf{rest} \textit{ es adjunto a derecha de } \Diamond. \end{aligned}$$

Para demostrar este teorema[2], primero demostramos el siguiente lema.

Lema 1. *Dadas* $U_{i\in I} \subseteq S, D_{i\in I} \subseteq X$ *familias, tenemos*

- *Los operadores existenciales* $\mathbf{ext}\,, \Diamond$ *distribuyen sobre uniones arbitrarias, eso es,*
    - $\mathbf{ext}\,(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{ext}\, U_i$ *;*
    - $\Diamond\,(\bigcup_{i\in I} D_i) = \bigcup_{i\in I} \Diamond\, D_i$.
- *Los operadores Universales* $\mathbf{rest}\,, \Box$ *distribuyen sobre intersecciones arbitrarias, esto es,*
    - $\mathbf{rest}\,(\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} \mathbf{rest}\, U_i$*;*
    - $\Box\,(\bigcap_{i\in I} D_i) = \bigcap_{i\in I} \Box\, D_i$.

Demostración. Sólo demostraremos los casos $\mathbf{ext}\,, \mathbf{rest}$ los otros son simétricos.
Tomemos $x \in \mathbf{ext}\,(\bigcup_{i\in I} U_i)$, esto se tiene si y solo si $\Diamond\, x \between \bigcup_{i\in I} U_i$, lo cual es posible si y solo si $\Diamond\, x \between U_i$ para algún $i \in I$, lo cual es equivalente a decir $x \in \mathbf{ext}\, U_i$ para algún $i \in I$, pero esto es lo mismo que decir $x \in \bigcup_{i\in I} \mathbf{ext}\, U_i$. O sea que $\mathbf{ext}\,(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{ext}\, U_i$.

Tomemos $x \in \mathbf{rest}\,(\bigcap_{i\in I} U_i)$, esto se tiene si y solo si $\Diamond\, x \subseteq \bigcap_{i\in I} U_i$, lo cual se tiene si y solo si $\Diamond\, x \subseteq U_i$ para todo $i \in I$, lo que por definición es lo mismo que decir $x \in \mathbf{rest}\, U_i$ para todo $i \in I$, siendo esto es equivalente a $x \in \bigcap_{i\in I} \mathbf{rest}\, U_i$. Luego tenemos $\mathbf{rest}\,(\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} \mathbf{rest}\, U_i$. $\Box$

Este lema basta para garantizar la existencia de las adjunciones mencionadas.

Demostración del teorema de la Adjunción Fundamental.
Primero veamos que $\mathbf{ext}\ \dashv \Box$:

[2] A partir de este punto por razones técnicas sólo consideraremos conjuntos y no clases en nuestro trabajo.

Tomemos $U \subseteq \Box D$, esto se cumple si y solo si $\forall a(a \in U \to \mathbf{ext}\, a \subseteq D)$, esto es equivalente a decir, $\mathbf{ext}\, a \subseteq D$ para todo $a \in U$, pero esto es igual a decir $(\bigcup_{a\in U} \mathbf{ext}\, a) \subseteq D$, luego, por el lema anterior es lo mismo que decir $\mathbf{ext}\,(\bigcup_{a\in U} a) \subseteq D$, lo cual equivale $\mathbf{ext}\, U \subseteq D$. Es decir $\mathbf{ext} \dashv \Box$.

Ahora veamos que $\Diamond \dashv \mathbf{rest}$:

Tomemos $D \subseteq \mathbf{rest}\, U$ esto es $\forall x(x \in D \to \Diamond x \subseteq U)$, lo cual es equivalente a $\Diamond x \subseteq U$ para todo $x \in D$, esto se tiene si y solo si $\bigcup_{x\in D} \Diamond x \subseteq U$, y gracias al lema anterior es equivalente a $\Diamond(\bigcup_{x\in D} x) \subseteq U$, lo cual reescrito es $\Diamond D \subseteq U$. O sea tenemos que $\Diamond \dashv \mathbf{rest}$. $\Box$

Inmediatamente tenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 1. *Dados $D \subseteq X, U \subseteq S$ tenemos que,*

- $\mathbf{ext}\, \Box D \subseteq D$;
- $U \subseteq \Box\, \mathbf{ext}\, U$;
- $D \subseteq \mathbf{rest}\, \Diamond D$;
- $\Diamond\, \mathbf{rest}\, U \subseteq U$.

También tenemos la conocida regla de *dos contra uno*.

Proposición 2. *Dados $D \subseteq X, U \subseteq S$ tenemos que,*

- $\mathbf{ext}\, \Box\, \mathbf{ext}\, U = \mathbf{ext}\, U$;
- $\Box\, \mathbf{ext}\, \Box D = \Box D$;
- $\mathbf{rest}\, \Diamond\, \mathbf{rest}\, U = \mathbf{rest}\, U$;
- $\Diamond\, \mathbf{rest}\, \Diamond D = \Diamond D$.

1.4. Interior, Clausura y sus Simétricos

Teniendo en cuenta estos resultados, y retomando nuestras definiciones de interior y clausura dadas anteriormente, es natural preguntarse acerca de cómo construir sus simétricos de tal manera que podamos hablar de abiertos y cerrados formales, es decir, sin hacer referencia directa a los puntos.
Decíamos que,

$$x \in \mathbf{int}\, D \text{ si y solo si } \exists a(x \Vdash a \wedge \mathbf{ext}\, a \subseteq D);$$
$$x \in \mathbf{cl}\, D \text{ si y solo si } \forall a(x \Vdash a \rightarrow \mathbf{ext}\, a \between D).$$

Analicemos primero el interior. Por definición sabemos que $\mathbf{ext}\, a \subseteq D$ significa que $a \in \Box D$, luego el interior de un conjunto D es $\mathbf{int}\, D = \{x : \exists a(x \Vdash a \wedge a \in \Box D)\}$. También sabemos que $x \Vdash a$ es un sinónimo de $a \in \Diamond x$, luego nuestra definición se puede ahora escribir $\mathbf{int}\, D = \{x : \exists a(a \in \Diamond x \wedge a \in \Box D)\}$. Pero $\exists a(a \in \Diamond x \wedge a \in \Box D)$ es equivalente a decir $\Diamond x \between \Box D$, luego el interior es $\mathbf{int}\, D = \{x : \Diamond x \between \Box D\}$, pero decir $\Diamond x \between \Box D$ es lo mismo que decir $x \in \mathbf{ext}\, \Box D$, por lo tanto,

$$\mathbf{int}\, D = \mathbf{ext}\, \Box D.$$

Luitzen: *Podemos hacer lo mismo para la clausura, una forma rápida sería diciendo: el interior y la clausura son duales, luego debemos cambiar los operadores por sus duales, o sea que la clausura es,*

$$\mathbf{cl}\, D = \mathbf{rest}\, \Diamond D.$$

¡Muy bien! pero hagámoslo igual a como lo hicimos para el interior para ver que su anterior afirmación es válida.

Tenemos que $\mathbf{ext}\ a \between D$ es lo mismo que decir $a \in \Diamond D$, luego tenemos que la clausura de un conjunto es, simplemente $\mathbf{cl}\, D = \{x : \forall a(a \in \Diamond x \rightarrow a \in \Diamond D)\}$ lo cual significa que la clausura es $\mathbf{cl}\, D = \{x : \Diamond x \subset \Diamond D\}$. Pero $\Diamond x \subseteq \Diamond D$ es lo mismo que decir $x \in \mathbf{rest}\, \Diamond D$ luego, como había dicho antes el señor Luitzen $\mathbf{cl}\, D = \mathbf{rest}\, \Diamond D$.

Gracias a lo anterior nos damos cuenta que la clausura y el interior de un conjunto se pueden expresar como combinaciones por pares de los operadores

$\Diamond$, $\Box$, $\mathbf{ext}$, $\mathbf{rest}$. Luego dada la figura que teníamos para estos operadores, la definición de los simétricos del interior y la clausura se vuelve completamente natural.

Definición 12. *Dada una pareja básica $\langle X, \Vdash S\rangle$ definimos,*

$$\begin{aligned} \mathbf{int} &= \mathbf{ext}\,\Box \quad & \mathbf{cl} &= \mathbf{rest}\,\Diamond\,; \\ \mathfrak{A} &= \Box\,\mathbf{ext} \quad & \mathfrak{J} &= \Diamond\,\mathbf{rest}\,. \end{aligned}$$

Karla: *¿Qué significado tienen estos dos nuevos operadores?*

Por definición, si tenemos $a \in \mathfrak{A}\,U$ significa que $a \in \Box\,\mathbf{ext}\,U$ lo cual es igual a decir $\mathbf{ext}\,a \subseteq \mathbf{ext}\,U$, que con la notación de $\Vdash$, se transforma en $\forall x(x \Vdash a \to x \Vdash U)$, o sea todo punto en a es un punto en algún $b \in U$. Esto es una noción muy conocida en topología. Es la noción de cubrimiento, o sea $a \in \mathfrak{A}\,U$ si y solo si a *es* cubierto *por* U.

Ejemplo 13. *Sea $X = \{F\}$ donde F es un cuerpo, sea S el conjunto de polinomios sobre F, definimos $F \Vdash p(x)$ si y solo si $p(x)$ tiene una raíz en F. Entonces tenemos,*

$$\mathfrak{A}\,p(x) = \{q(x) : \forall F(F \Vdash q(x) \to F \Vdash p(x)),$$

es decir $\mathfrak{A}\,p(x)$ es el conjunto de factores de $p(x)$ en F. En otras palabras cubrir un polinomio significa factorizarlo.

Miremos el otro operador: Por definición decir $a \in \mathfrak{J}\,U$ es decir que $a \in \Diamond\,\mathbf{rest}\,U$, un existencial $\exists x(x \Vdash a \wedge x \in \mathbf{rest}\,U)$, el cual nos dice, primero, que $\mathbf{ext}\,a$ es inhabitado, y, segundo, que para dicho x tenemos $\Diamond\,x \subseteq U$. Este operador no es para nada intuitivo, lo vamos a relacionar con la idea de positividad, la cual informalmente dice que los elementos de S que interesan para hacer topología son los no vacíos. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 14. *Consideremos la pareja básica del ejemplo 12, sea $\overline{\varphi}$ el conjunto de sentencias deducibles desde φ sin más hipótesis. Tenemos entonces que,*

$$\mathfrak{J}\,\overline{\varphi} = \{\psi : \exists M(M \Vdash \psi \wedge \Diamond\,M \subseteq \overline{\varphi})$$

Literalmente estas son las sentencias para las cuales existe un modelo para el cual la teoría del modelo se deduce de φ. Si existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tales que $\mathfrak{J}\,(\overline{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n})$ es habitado, la teoría es finitamente axiomatizable.

Luitzen: *Usando la regla de dos contra uno podemos hacer las siguientes afirmaciones:*

- $\mathbf{ext} = \mathbf{ext}\,\Box\,\mathbf{ext} = \mathbf{int}\ \mathbf{ext} = \mathbf{ext}\,\mathfrak{A}$;
- $\Diamond = \mathfrak{I}\,\Diamond = \Diamond\,\mathbf{rest}\,\Diamond = \Diamond\,\mathbf{cl}$;
- $\Box = \mathfrak{A}\,\Box = \Box\,\mathbf{ext}\,\Box = \Box\,\mathbf{int}$;
- $\mathbf{rest} = \mathbf{rest}\,\mathfrak{I} = \mathbf{rest}\,\Diamond\,\mathbf{rest} = \mathbf{cl}\ \mathbf{rest}$.

Karla: *La idempotencia de los operadores también es inmediata,*

- $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A} = \Box\,\mathbf{ext}\,\Box\,\mathbf{ext} = \mathfrak{A}$;
- $\mathfrak{I}\,\mathfrak{I} = \Diamond\,\mathbf{rest}\,\Diamond\,\mathbf{rest} = \mathfrak{I}$;
- $\mathbf{cl}\,\mathbf{cl} = \mathbf{rest}\,\Diamond\,\mathbf{rest}\,\Diamond = \mathbf{cl}$;
- $\mathbf{int}\,\mathbf{int} = \mathbf{ext}\,\Box\,\mathbf{ext}\,\Box = \mathbf{int}$.

Buenas observaciones. Después las necesitaremos.

De nuevo podemos hacer un diagrama, similar al que teníamos para $\Diamond$, $\Box$, $\mathbf{ext}$, $\mathbf{rest}$, pero ahora para $\mathbf{int}$, $\mathbf{cl}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{I}$:

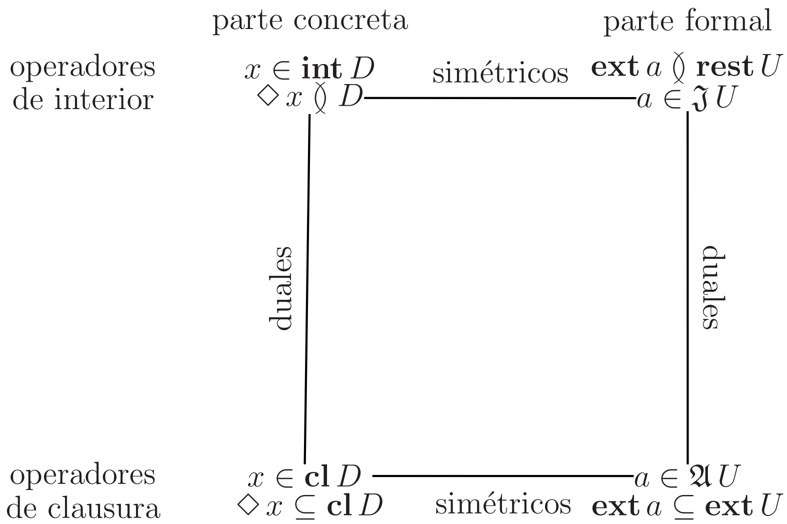

Figura: 3

1.5. Abiertos Formales, Cerrados Formales

Volvamos a la definición de abierto, si tomamos un abierto concreto D, por definición tenemos que $\mathbf{int}\, D = D$. Por lo dicho, anteriormente tenemos $D = \mathbf{ext}\, \Box\, D$, tomando $U = \Box\, D$ podemos decir $D = \mathbf{ext}\, U$ es decir que D está en el rango de **ext** .
Recíprocamente, si tomamos $D = \mathbf{ext}\, U$ para algún $U \subseteq S$ tenemos,

$$D = \mathbf{ext}\, U = \mathbf{ext}\, \Box\, \mathbf{ext}\, U = \mathbf{int}\, \mathbf{ext}\, U = \mathbf{int}\, D,$$

luego los abiertos concretos coinciden con los elementos en el rango de **ext** .
Luitzen: *Por dualidad, podemos afirmar que los cerrados concretos coinciden con el rango de* **rest** *.*
¡Acertado!, de modo que tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4. *Dado $D \subseteq X$, tenemos que*

- *D es un abierto concreto si y solo si está en el rango de* **ext** *,*
  i.e $D = \mathbf{ext}\, U$ para algún $U \subseteq S$.

- *D es un cerrado concreto si y solo si está en el rango de* $\mathbf{rest}$ *,*
  i.e $D = \mathbf{rest}\, U$ para algún $U \subseteq S$.

Debido a que $\mathbf{ext} \dashv \Box$, y $\Diamond \dashv \mathbf{rest}$, una manera natural de hablar de abiertos y cerrados formales sería la siguiente:

Definición 13. *Dado $U \subseteq S$*

- *U es un abierto formal si y solo si está en el rango de $\Box$.*
- *U es un cerrado formal si y solo si está en el rango de $\Diamond$.*

Por definición teníamos que los abiertos concretos, y los cerrados concretos eran los puntos fijos de $\mathbf{int}$, $\mathbf{cl}$, respectivamente.
¿Qué pasa con los abiertos y cerrados formales a través de $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{A}$?

Karla: *Intuitivamente podríamos decir que son los puntos fijos de estos dos últimos operadores.*
Es cierto, ¿pero quién es punto fijo de quién? Tomemos U un abierto formal, tenemos $U = \Box D$, gracias a la adjunción tenemos

$$U = \Box D = \Box\, \mathbf{ext}\, \Box D = \mathfrak{A} \Box D = \mathfrak{A} U.$$

O sea que los abiertos formales son puntos fijos de $\mathfrak{A}$, recíprocamente , si U es un punto fijo a través de $\mathfrak{A}$, tenemos que $U = \mathfrak{A} U = \Box\, \mathbf{ext}\, U$, tomando $D = \mathbf{ext}\, U$ tenemos que $U = \Box D$, o sea U es un abierto formal.
Sin analizar los cerrados podemos decir:

Proposición 5. *Dado $U \subseteq S$*

- *U es un abierto formal si y solo si $\mathfrak{A} U = U$.*
- *U es un cerrado formal si y solo si $\mathfrak{J} U = U$.*

Diego: *¿Pero el simétrico de* $\mathbf{int}$ *es $\mathfrak{J}$, y el simétrico de* $\mathbf{cl}$ *es $\mathfrak{A}$, no debería ser al revés?.*
Es una muy buena pregunta, debido a la forma en que se ha presentado este trabajo. En un principio se habría podido llegar a pensar que los abiertos

formales serían los puntos fijos de $\mathfrak{J}$, y los cerrados formales los puntos fijos de $\mathfrak{A}$.

Recordando las adjunciones anteriormente mencionadas, lo más natural es la definición 13, por consiguiente la anterior proposición debe ser aceptada.

Recapitulando, tenemos que:

- Los abiertos concretos son puntos fijos de $\mathbf{int}$, los cerrados concretos son los puntos fijos de $\mathbf{cl}$.
- Los abiertos formales son los puntos fijos de $\mathfrak{A}$, los cerrados formales son los puntos fijos de $\mathfrak{J}$.

Tomando en cuenta que $\mathfrak{A} = \Box\,\mathbf{ext}$, $\mathfrak{J} = \Diamond\,\mathbf{rest}$, y recordando las adjunciones anteriormente mencionadas, surge la siguiente pregunta de manera natural.
¿Qué pasa si restringimos $\Box$, $\mathbf{ext}$, a los abiertos formales y abiertos concretos respectivamente? Tomemos D un abierto concreto, sabemos que $\mathbf{int}\,D = D$, reescribiendo tenemos que $\mathbf{ext}\,\Box\,D = D$, o sea que $\mathbf{ext}\,\Box$ es la identidad en los abiertos concretos. Análogamente tomando U un abierto formal, sabemos que $\mathfrak{A}U = U$, lo cual con una reescritura se ve $\Box\,\mathbf{ext}\,U = U$, es decir $\Box\,\mathbf{ext}$ es la identidad en los abiertos formales, es decir que restringiéndonos a los abiertos concretos y abiertos formales podemos concluir la siguiente proposición.

Proposición 6.

- *Los operadores* $\mathbf{ext}$, $\Box$ *restringidos a los abiertos concretos y a los abiertos formales, respectivamente, son inversos uno del otro.*
- *Los operadores* $\mathbf{rest}$, $\Diamond$ *restringidos a los cerrados concretos y a los cerrados formales, respectivamente, son inversos uno del otro.*

Si tomamos los abiertos concretos, estos forman un retículo completo, igualmente para los cerrados concretos, abiertos formales, y cerrados formales. La razón por la cual son completos no la trataremos aquí pues no la necesitamos. Llamemos a dichos retículos $Sat[\mathbf{int}], Sat[\mathbf{cl}], Sat[\mathfrak{A}], Sat[\mathfrak{I}]$ respectivamente.

Karla: *Por la proposición anterior, tenemos una biyección entre $Sat[\mathbf{int}]$ y $Sat[\mathfrak{A}]$, la pregunta natural sería acerca de la preservación de la estructura a través de dicha biyección, es decir, ¿es dicha biyección un isomorfismo?*
Muy bien, pero primero recordemos que si tomamos $U_i \in Sat[\mathfrak{A}], i \in I$ una familia, las operaciones del retículo están definidas por:

- $\bigvee_{i\in I} \mathfrak{A}\, U_i = \mathfrak{A}\left(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{A}\, U_i\right)$;
- $\bigwedge_{i\in I} \mathfrak{A}\, U_i = \mathfrak{A}\left(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{A}\, U_i\right)$;

Igualmente para $Sat[\mathbf{int}]$, tenemos que dados $D_i \in Sat[\mathbf{int}], i \in I$ definimos,

- $\bigvee_{i\in I} \mathbf{int}\, D_i = \mathbf{int}\left(\bigcup_{i\in I} \mathbf{int}\, D_i\right)$;
- $\bigwedge_{i\in I} \mathbf{int}\, D_i = \mathbf{int}\left(\bigcap_{i\in I} \mathbf{int}\, D_i\right)$;

Las definiciones para $Sat[\mathbf{cl}], Sat[\mathfrak{I}]$ son análogas.

Queremos ver que las biyecciones anteriormente encontradas son un isomorfismo entre retículos completos, esto es, ver que **ext** preserva las uniones e intersecciones entre retículos.

Tomemos $U_i, i \in I$ una familia contenida en $Sat[\mathfrak{A}]$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{ext}\left(\bigvee_{i\in I} U_i\right) &= \mathbf{ext}\left(\mathfrak{A}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}\,U_i\right)\right); \\
&= \mathbf{ext}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right), \qquad U_i \text{ son abiertos y } \mathbf{ext}\,\mathfrak{A} = \mathbf{ext}\,; \\
&= \bigcup_{i\in I}\mathbf{ext}\,U_i, \qquad \mathbf{ext} \text{ distribuye sobre uniones;} \\
&= \mathbf{int}\left(\bigcup_{i\in I}\mathbf{ext}\,U_i\right), \qquad \text{unión de abiertos es abierto;} \\
&= \bigvee_{i\in I}\mathbf{ext}\,U_i.
\end{aligned}
$$

O sea que **ext** conserva las uniones entre los dos retículos.
Veamos que además **ext** preserva las intersecciones,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{ext}\left(\bigwedge_{i\in I} U_i\right) &= \mathbf{ext}\left(\mathfrak{A}\left(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}\,U_i\right)\right); \\
&= \mathbf{ext}\left(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}\,U_i\right), \qquad \mathbf{ext}\,\mathfrak{A} = \mathbf{ext}\,; \\
&= \mathbf{ext}\left(\bigcap_{i\in I}\Box\,\mathbf{ext}\,U_i\right), \qquad \text{definición de } \mathfrak{A}\,; \\
&= \mathbf{ext}\,\Box\left(\bigcap_{i\in I}\mathbf{ext}\,U_i\right), \qquad \Box \text{ distribuye sobre interseciones;} \\
&= \mathbf{int}\left(\bigcap_{i\in I}\mathbf{ext}\,U_i\right), \qquad \text{definición de } \mathbf{int}\,; \\
&= \bigwedge_{i\in I}\mathbf{ext}\,U_i.
\end{aligned}
$$

En conclusión **ext** preserva la estructura. Similarmente se puede ver que $\Box$ también preserva la estructura. Tanto **ext** como su inversa preservan la estructura, por lo tanto tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2 (Teorema de isomorfismo). *En toda pareja básica* $\langle X, \Vdash, S\rangle$ *el retículo* $Sat[\mathfrak{A}\,]$ *(los abiertos formales) es isomorfo al retículo* $Sat[\mathbf{int}\,]$ *(los abiertos concretos).*
Simétricamente el retículo $Sat[\mathfrak{J}\,]$ *(los cerrados formales) es isomorfo a* $Sat[\mathbf{cl}\,]$ *(los cerrados concretos).*

Hasta aquí, todo lo dicho se puede resumir en el siguiente diagrama,

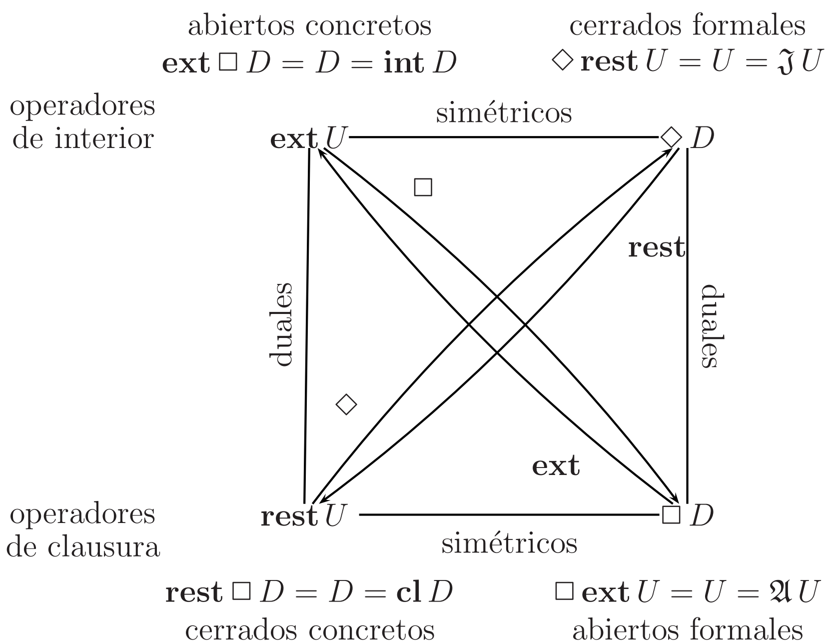

Figura: 4

1.6. De las Parejas Básicas a los Espacios Concretos

Nuestro trabajo hasta este punto ha estado enfocado en traducir lo hecho en la parte concreta a la parte formal. Esto queda en gran medida terminado con el teorema de isomorfismo. Ahora queremos ver que lo hecho en la parte concreta es equivalente a lo hecho clásicamente.

Tomemos $\tau = \{\mathbf{ext}\, U : U \subseteq S\}$, éste es un conjunto cerrado para uniones arbitrarias, pero en principio la intersección de dos elementos de τ no es un elemento de τ.

Karla: *¿Pero* $\mathbf{ext}$ *preserva las intersecciones entre* $Sat[\mathfrak{A}]$ *y* $Sat[\mathbf{int}]$*?* No es cierto, aún cuando $\mathbf{ext}$ preserve las intersecciones entre $Sat[\mathfrak{A}]$ y $Sat[\mathbf{int}]$, debemos recordar que la definición de intersección en estos retículos no es la intersección entre conjuntos.

Por otra parte, demostramos que $\mathbf{ext}\,\emptyset = \emptyset$, luego $\emptyset \in \tau$, pero no podemos afirmar $X \in \tau$, pues decir esto es lo mismo que decir $X = \mathbf{ext}\, U$ para algún $U \subseteq S$, para lo cual necesitaríamos que para todo elemento $x \in X$, se tuviera $x \in \mathbf{ext}\, U \leftrightarrow \Diamond x \between U$. Pero nada en la definición de pareja básica nos dice que $\Diamond x$ sea habitado en todos los casos. En conclusión, para que τ sea una topología le falta ser cerrado para intersecciones y tener a X como elemento.

El segundo problema es fácilmente solucionable. Si queremos que $X = \mathbf{ext}\, U$ para algún $U \subseteq S$, lo más sencillo es pedir $X = \mathbf{ext}\, S$, o sea

Axioma 1. *B1* $\quad (\forall x \in X)(x \Vdash S)$.

Pedir que τ sea cerrado para intersecciones finitas es un poco más complicado. Escribamos en símbolos la propiedad de intersecciones finitas:

$$(\forall U, V \subseteq S)(\exists W \subseteq S)(\mathbf{ext}\, U \cap \mathbf{ext}\, V = \mathbf{ext}\, W).$$

Luego lo que necesitamos hacer es describir un método que a cada par de conjuntos U, V les asigne un conjunto W tal que $\mathbf{ext}\, U \cap \mathbf{ext}\, V = \mathbf{ext}\, W$. Para ello lo mas natural sería tomar el conjunto de los abiertos concretos contenidos en $\mathbf{ext}\, U \cap \mathbf{ext}\, V$, o sea tomar

$$W = \{Y \subseteq S : \mathbf{ext}\, Y \subseteq \mathbf{ext}\, U \cap \mathbf{ext}\, V\}$$

Ampliando esta idea hasta los elementos de S, no es tan descabellado pedir lo siguiente:

Axioma 2. *B2* $\quad \mathbf{ext}\, a \cap \mathbf{ext}\, b = \mathbf{ext}\,(a \downarrow b)$;

donde $a \downarrow b = \{c \in S : \mathbf{ext}\, c \subseteq \mathbf{ext}\, a \cap \mathbf{ext}\, b\}$.
Tomemos $U, V \subseteq S$, gracias a las propiedades de **ext** tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{ext}\, U \cap \mathbf{ext}\, V &= \bigcup_{a \in U} \mathbf{ext}\, a \cap \bigcup_{b \in V} \mathbf{ext}\, b;\\
&= \bigcup_{a \in U} \bigcup_{b \in V} \mathbf{ext}\, a \cap \mathbf{ext}\, b;\\
&= \bigcup_{a \in U} \bigcup_{b \in V} \mathbf{ext}\, (a \downarrow b);\\
&= \mathbf{ext}\, \left(\bigcup_{a \in U} \bigcup_{b \in V} (a \downarrow b) \right),
\end{aligned}$$

Por consiguiente lo más natural es definir

$$U \downarrow V = \bigcup_{a \in U} \bigcup_{b \in V} a \downarrow b.$$

Por definición $a \downarrow b$ es abierto por ser la unión de abiertos, igualmente lo es $U \downarrow V$, es decir que pidiendo los axiomas $B2$ y $B1$ podemos decir que τ es una topología para X. En resumen, podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema 3. *Una pareja básica $\langle X, \Vdash, S \rangle$ define un espacio topológico, si y solo si cumple,*

B1: $(\forall x \in X)(x \Vdash S)$;

B2: $\dfrac{x \Vdash a \quad x \Vdash b}{x \Vdash a \downarrow b}$,

donde $a \downarrow b = \{c : \mathbf{ext}\, c \subseteq \mathbf{ext}\, a \cap \mathbf{ext}\, b\}$.

A las parejas básicas que cumplen $B1$ y $B2$ las llamaremos *espacios concretos*. Para terminar esta sección, recalcamos que pedir $B1$ y $B2$ es pedir que el conjunto $\{\mathbf{ext}\, a : a \in S\}$ sea una base para una topología.

1.7. Topología Formal

Peter Johnstone, en su artículo *The Point of Pointless Topology* [12] decía algo como esto.

> "Un topólogo clásico no se preocuparía si las demostraciones de sus teoremas son o no constructivas. Esto es válido para un hombre que no ve problema en utilizar el Axioma de Elección, siempre que lo necesite. No es para nada obvio que la topología sin puntos es para topólogos, y no más bien para lógicos; sin embargo, aún el más pragmático de los topólogos podría llegar a ganar algo aprendiendo a hacer topología constructivamente. El punto es que hay contextos, en el universo de las matemáticas clásicas, en los cuales uno quisiera hacer topología, pero no tenemos la ley del Tercio Excluso o el Axioma de Elección. Dichos contextos, se llaman *Topoi*. Para nuestros propósitos no es necesario saber exactamente qué es un topos basta con saber que un topos es una categoría, lo suficientemente parecida a la categoría de los conjuntos, como para tratar de hacer las construcciones conjuntistas en estas categorías usando lógica intuicionista. Ejemplos de Topos abundan en matemáticas, y es curioso que las matemáticas hechas *internamente* en un topos, tienen en general una interesante interpretación *externa*.
> Entonces la pregunta que surge es: ¿cual es la formulación del concepto "topología"para poder hacer topología en estos contextos? "

Intentar dar una respuesta a tal pregunta es el objetivo de esta sección. El problema de los espacios concretos consiste, como dice Johnstone, en que ciertos espacios en contextos no clásicos no se pueden acomodar a dicha definición, por hechos tales como la referencia directa a sus puntos en el momento de hacer las definiciones.

Gracias al trabajo que hemos hecho en este texto, podemos dar una definición de topología sin referirnos a los puntos. Gran parte de este trabajo fue hecho con el Teorema de Isomorfismo. En la sección anterior regresamos a los espacios topológicos clásicos. Luego la idea es pasar el concepto de espacio concreto al contexto formal y hablar de espacios formales, a los cuales llamaremos *topologías formales balanceadas*.

En S tenemos dos operadores $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{J}$ y, como ya hemos dicho, los abiertos y cerrados formales son los puntos fijos de estos operadores. En teoría de tipos, el operador $\mathfrak{A}$ es llamado un operador de clausura, y el operador $\mathfrak{J}$ es llamado un operador de interior. Formalmente tenemos:

Definición 14.

- *Un operador* $\mathfrak{C} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ *es llamado un operador de clausura si y solo si para todo* $D, E \subseteq X$ *se cumple lo siguiente:*

  Reflexividad $D \subseteq \mathfrak{C}D$;

  Monotonía $\dfrac{D \subseteq E}{\mathfrak{C}D \subseteq \mathfrak{C}E}$;

  Idempotencia $\mathfrak{C}\mathfrak{C}D \subseteq \mathfrak{C}D$.

- *Un operador* $\mathfrak{C} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, *es llamado un operador de interior si y solo si para todo* $D, E \subseteq X$ *se cumple lo siguiente:*

  co-Reflexividad $\mathfrak{C}D \subseteq D$;

  Monotonía $\dfrac{D \subseteq E}{\mathfrak{C}D \subseteq \mathfrak{C}E}$;

  co-Idempotencia $\mathfrak{C}D \subseteq \mathfrak{C}\mathfrak{C}D$.

Es fácil ver que $\mathfrak{A}$ es un operador de clausura, y que $\mathfrak{J}$ es un operador de interior.

Luitzen: *¿O sea que* **int** *es un operador de clausura y* **cl** *un operador de interior?.*
Al contrario de lo que se podría llegar a pensar por lo que hemos hecho, **int**

no es un operador de clausura, ni **cl** es un operador de interior, sino al revés: **int** es un operador de interior y **cl** es un operador de clausura, como sus nombres lo preveían. En nuestro caso, debido a que $\mathfrak{A}\,, \mathfrak{J}$ provienen de la misma relación $\Vdash$, dados $U, V \subseteq S, a \in S$, para los cuales tenemos $a \in \mathfrak{A}\,U, a \in \mathfrak{J}\,U$, por definición concluimos $\mathbf{ext}\,a \subseteq \mathbf{ext}\,U$, y $\mathbf{ext}\,a \between \mathbf{rest}\,V$, luego podemos afirmar $\mathbf{ext}\,U \between \mathbf{rest}\,V$, lo cual en símbolos es $\exists b(b \in U \wedge b \in \mathfrak{J}\,V)$. Es decir que tenemos $U \between \mathfrak{J}\,V$. A esta propiedad la llamaremos compatibilidad de los operadores.

Karla: *¿No debería ser* $\exists b(b \in \mathbf{ext}\,U \wedge b \in \mathfrak{J}\,V)$ *?*
No, pues $b \in extU$ no tiene sentido, recuerde que **ext** es un abierto concreto.

Definición 15. *Dados dos operadores $O_1, O_2 : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, donde O_1 es de clausura y O_2 es de interior, decimos que son compatibles si y solo si dados $U, V \subseteq \mathcal{P}(X)$, tenemos*

$$\textit{Compatibilidad} \quad \frac{O_1U \between O_2V}{U \between O_2V}.$$

Gracias a esto, podemos decir que una topología formal básica es una tripla $\langle S, \mathfrak{A}\,, \mathfrak{J}\,\rangle$, donde S es un conjunto, $\mathfrak{A}$ un operador de clausura, $\mathfrak{J}$ es un operador de interior, los cuales son compatibles.
Para ayudar a nuestra intuición usaremos la siguientes notación,

$$a \lhd U \text{ si y solo si } a \in \mathfrak{A}\,U; \qquad a \ltimes U \text{ si y solo si } a \in \mathfrak{J}\,U.$$

Usando esta notación podemos escribir nuestra definición de la siguiente manera:

Definición 16 (Topología formal básica). *Una topología formal básica es una tripla $\langle S, \lhd, \ltimes\rangle$, donde $\lhd, \ltimes$ son relaciones entre elementos de S y subconjuntos de S tales que dados $a, b \in S, U,$ y $V \subseteq S$ se cumple lo siguiente:*

Reflexividad $\dfrac{a \in U}{a \lhd U}$;

co-Reflexividad $\dfrac{a \ltimes U}{a \in U}$;

Transitividad $\dfrac{a \in U \quad U \lhd V}{a \lhd V}$;

co-Transitividad $\dfrac{a \ltimes U \quad (\forall b)(b \ltimes U \to b \in V)}{a \ltimes V}$;

Compatibilidad $\dfrac{a \ltimes V \quad a \lhd U}{U \ltimes V}$,

donde $U \ltimes V$ *significa* $(\exists b)\ (b \in U \wedge b \ \ltimes V)$, *y* $U \lhd V$ *significa* $(\forall b)(b \in U \to b \lhd V)$.

Fácilmente se ve que de una relación $\lhd$ entre elementos de S y subconjuntos de S, la cual es reflexiva y transitiva se puede definir un operador de clausura.

Tomando en cuenta lo hecho en la sección anterior, en la cual concluimos que debíamos pedir $B2$ sobre la pareja básica, de tal manera que recuperábamos un espacio topológico, lo natural es hacer una transcripción formal de $B2$ para tener en el lado formal el análogo a la definición de espacio concreto. La traducción es plenamente natural, pues tomando $a, b \in S$ teníamos, $a \downarrow b = \{c : \mathbf{ext}\, c \subseteq \mathbf{ext}\, a \cap \mathbf{ext}\, b\}$, lo cual en términos de cubrimientos se puede expresar,

$$a \downarrow b = \{c : c \lhd \{a\} \wedge c \lhd \{b\}\};$$

de lo cual se sigue que la generalización para $U, V \subseteq S$ es simplemente,

$$U \downarrow V = \{d : (\exists b \in U)(d \lhd \{b\}) \wedge (\exists c \in V)(d \lhd \{c\})\}.$$

Como en las topologías básicas formales no hemos hablado de ninguna relación $\Vdash$ nuestra traducción de $B2$ estará dada por,

$$\downarrow -Derecha \quad \frac{a \lhd U \quad a \lhd V}{a \lhd U \downarrow V};$$

Luitzen: *¿ Qué pasa con B1 ?*
Podemos pedir un elemento maximal para $\lhd$, pero en general no aporta mucho así que lo omitiremos.

Resumiendo tenemos la siguiente definición,

Definición 17 (Topología formal balanceada). *Una topología formal balanceada es una estructura* $\langle S, \lhd, \ltimes \rangle$*, donde* $\lhd, \ltimes$ *son relaciones compatibles entre elementos de* S *y subconjuntos de* S*;* $\ltimes$ *es co-reflexiva y co-transitiva,* $\lhd$ *es reflexiva, transitiva y cumple,*

$$\downarrow -Derecha \quad \frac{a \lhd U \quad a \lhd V}{a \lhd U \downarrow V}.$$

Esta última es una de las mejores definiciones de topología formal (balanceada) que se encuentra en la literatura, debido a que nos permite una caracterización clara y precisa de los abiertos y cerrados formales, y es la ideal para hacer caracterizaciones formales que se refieran a cerrados.

Con respecto al operador $\mathfrak{J}$, podríamos tener $\mathfrak{J}$ impropio, es decir $\mathfrak{J}U = \emptyset$ para todo subconjunto $U \subseteq S$, pero este caso no lo trataremos aquí.
Podríamos tener que los únicos cerrados fueran $\mathfrak{J}(S), \emptyset$, en tal caso diremos que $\mathfrak{J}$ es trivial. Cuando $\mathfrak{J}$ es trivial, tomando $H = \{a : a \ltimes S\}$, para cualquier cerrado U tenemos que,

$$a \in \mathfrak{J}U \to a \in H \wedge H \subseteq U,$$

pues $U = S$. H es llamado un conjunto monótono.

Karla: *¿Qué es un conjunto monótono?*
Un conjunto monótono es un conjunto tal que,

$$a \in H \wedge a \lhd U \to H \between U.$$

Recíprocamente, si para algún conjunto monótono H se tiene,

$$a \in \mathfrak{J}U \to a \in H \wedge H \subseteq U,$$

entonces tenemos que $\mathfrak{J}$ es trivial. Pues tomando U cerrado tendríamos $\mathfrak{J}U = U$, luego si U es habitado, tendríamos $U = H$, luego necesariamente tenemos $U = \mathfrak{J}S$, de donde concluimos que $\mathfrak{J}$ es trivial.

Fácilmente se ve que H cumple las siguientes dos propiedades:

Monotonía $\dfrac{a \in H \quad a \lhd U}{(\exists b \in U)(b \in H)}$;

Positividad $\dfrac{a \in H \to a \lhd U}{a \lhd U}$.

La idea de la positividad es la de considerar únicamente los a tales que $\mathbf{ext}\, a$ es habitado. Podemos debilitar un poco la definición de topología formal balanceada, diciendo que el operador de interior es trivial, es decir definiendo lo siguiente:

Definición 18 (Topología formal positiva). *Una topología formal positiva es una tripla $\langle S, \lhd, \mathcal{POS} \rangle$, donde $\lhd$ es una relación entre elementos de S y subconjuntos de S, la cual es reflexiva, transitiva y cumple $\downarrow$-Derecha. $\mathcal{POS}$ es un predicado sobre elementos de S tal que para $a \in S$, y $U \subseteq S$ se tiene,*

Monotonía $\dfrac{\mathcal{POS}(a) \quad a \lhd U}{(\exists b \in U)\mathcal{POS}(b)}$;

Positividad $\dfrac{\mathcal{POS}(a) \to a \lhd U}{a \lhd U}$.

Para ayudar a nuestra intuición y a las concepciones preestablecidas, podemos pedir que S tenga asociada una operación de monoide conmutativo, con la idea de simular las intersecciones, debido a que con $\downarrow$ no se ven claramente. Haciendo esto, podemos dar una nueva definición como sigue.

Definición 19 (Topología Formal). *Una topología formal es una estructura $\langle S, *, \lhd, \mathcal{POS} \rangle$ donde $\langle S, * \rangle$ es un monoide conmutativo, $\lhd$ es una relación, llamada cubrimiento, entre elementos y subconjuntos de S tal que, para todo $a, b \in S$ y $U, V \subseteq S$ se cumple:*

Reflexividad $\dfrac{a \in U}{a \lhd U}$;

Transitividad $\dfrac{a \lhd U \quad U \lhd V}{a \lhd V}$ *donde* $U \lhd V \equiv (\forall u \in U)(u \lhd V)$;

***-Izquierda** $\dfrac{a \lhd U}{a * b \lhd U}$;

***-Derecha** $\dfrac{a \lhd U \quad a \lhd V}{a \lhd U * V}$ *donde* $U * V \equiv \{u * v : u \in U, v \in V\}$;

Y $\mathcal{POS}$*, es un predicado para elementos de* S*, llamado positividad, tal que:*

Monotonía $\dfrac{\mathcal{POS}(a) \quad a \lhd U}{(\exists b \in U)\,(\mathcal{POS}(b))}$;

Positividad $\dfrac{\mathcal{POS}(a) \to a \lhd U}{a \lhd U}$.

Nuestras herramientas de trabajo van a ser las topologías formales, aunque menos agradables que las topologías formales balanceadas, considero que para lo que haremos aquí, el trabajo con las topologías formales es más claro y natural que con las topologías formales balanceadas. Una proposición que ayuda a ver que dicho cambio no es tan radical y arbitrario es,

Proposición 7. *En una topología formal* S*,* $U * V$ *es equivalente a* $U \downarrow V$*, esto es* $U * V \lhd U \downarrow V, U \downarrow V \lhd U * V$.

O sea que, a los ojos del cubrimiento de la topología, $\downarrow$ y $*$ son iguales.

1.7.1. Puntos Formales

Para terminar esta sección, recordemos que en una pareja básica tomando $x \in X$, teníamos que $\Diamond x$ eran los abiertos en los cuales x era un punto, y ya que $\Diamond$ es una función, cada x define un único $\Diamond x \subseteq S$. Debido a esto, podemos recuperar los puntos en nuestra parte formal. Dados $a, b \in \Diamond x$ tenemos que $a \downarrow b \in \Diamond x$.
Si $x \Vdash a, \Diamond x \subseteq U$, por definición tenemos $a \ltimes U$.

O sea que podemos dar la siguiente definición.

Definición 20 (Puntos formales). *En una topología formal balanceada* S*, un subconjunto* $\alpha \subseteq S$ *es un punto formal de* S *si y solo si dados* $a, b \in S$*, y* $U \subseteq S$ *tenemos que,*

α **es habitado** $\alpha \between S$;

α **es convergente** $\dfrac{a \in \alpha \quad b \in \alpha}{a \downarrow b \in \alpha}$;

α **elimina** $\lhd$ $\dfrac{a \in \alpha \quad a \lhd U}{\alpha \between U}$;

α **introduce** $\ltimes$ $\dfrac{a \in \alpha \quad \alpha \subseteq U}{a \ltimes U}$.

Con esta definición, podemos retornar a las parejas básicas, pues si tenemos S una topología formal balanceada podemos definir una pareja básica que coincide con la topología tomando

$$S = S, \quad X = \{\alpha \subseteq S : \alpha \text{ es punto formal }\}, \quad \Vdash = \in$$

Como trabajaremos en topologías formales, explicitaremos la definición de punto en éstas:

Definición 21. *Sea $\langle S, *, \lhd, \mathcal{POS}\rangle$ una topología formal. Un subconjunto α de S se dice un punto formal si y solo si para todo $a, b \in S$, y $U \subseteq S$ se cumple:*

- $(\exists a \in S)\,(a \in \alpha)$;
- $\dfrac{a \in \alpha \quad b \in \alpha}{a * b \in \alpha}$;
- $\dfrac{a \in \alpha \quad a \lhd U}{(\exists b \in U)\,(b \in \alpha)}$;
- $\dfrac{a \in \alpha}{\mathcal{POS}(a)}$;

Como veremos más adelante, no toda topología formal tiene puntos. Este hecho marca una diferencia importante con el tratamiento clásico: dado que lo fundamental en nuestro tratamiento son los abiertos, no hay ningún problema en trabajar con topologías sin puntos.

1.8. Notas y Referencias

El trabajo acerca de las parejas básicas fue principalmente hecho por Giovanni Sambin. Las secciones 2.2 - 2.5 son esencialmente tomadas de [25], una presentación rápida pero demasiado técnica se encuentra en [27]. Uno de los primeros artículos sobre los espacios formales es [29]. En el se hace una primera presentación de la topología formal, una presentación más accsequible y completa esta en [28]. Del mismo [28] se toma los axiomas necesarios para que una pareja básica defina un espacio topológico.

En la sección 2.7 se copian algunas definiciones dadas en [28] y se hacen más detalladamente los argumentos para llegar a la definición final de topología formal incluyendo algunas definiciones intermedias que son dadas por nosotros como elementos didácticos, la definición de topología formal es tomada de los artículos mencionados. Los ejemplos presentados en este capitulo son de nuestra propia autoría.

Para entender más a fondo el trabajo en teoría de tipos se puede consultar directamente [**?**] o para una presentación más pragmática en [24].

El por que de la notación usada en este capitulo se ve más claramente en el momento de trabajar continuidad formal [26].

Bibliografía

[1] Hans Andersen, *Cuentos*, Edilux Ediciones, 1990.

[2] René Avilés, *Fantasías en carrusel*, Fondo de Cultura Economica, 1995.

[3] __________, *Toposes and local set theories, an introduction*, Calrendon Press, 1988.

[4] Paul Bencerraf, &, Hilary Putnam, *Philosophy of mathematics, selected readings*, Cambridge University Press, 1985.

[5] Erret Bishop,*The crisis in contemporary mathematics*, Historia Mathematica **2** (1975), 507-517.

[6] ____________, &, Bridge Duglas, *Constructive analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[7] Thierry Coquand,*A direct proof of the localic Hahn-Banach theorem*, prepublicación (2000).

[8] ________________, *Formal Topology with posets*, prepublicación (1996).

[9] Bonnie Gold, *What is the philosophy of mathematics, and what should it be?*, The Mathematical Intelligencer **vol 16 N° 3** (1994), 20-24.

[10] Robert Goldblatt, *Topoi, the categorical analysis of logic*, North Holland Publishing Company, 1979.

[11] Arend Heyting, *Introducción al intuicionismo*, Editorial Tecnos, 1976.

[12] Peter Johnston, *The point of pointless topology*, Bulletin of the American Mathematical Society **vol 8 N° 1** (1983), 41-53.

[13] ________________, *Topos theory*, Academic Press, 1977.

[14] Stefan Kahrs, *A formalist perspective of mathematics*, prepublicación (1999).

[15] W Tait, *Beyond the axioms: The question of objectivity in mathematics*, prepublicación (1999).

[16] Raúl Leal, & Hernando Pérez, *Introducción a la topología formal*, XIX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística (2003).

[17] löf, per Martin, *Intuitionistic type theory, notes by Giovanni Sambin*, Bibliopolis, 1984.

[18] ________________, & ,Joan Pelletier, *A globalization of the Hahn-Banach theorem*, Advances in Mathematics **vol 89 N° 1** (1991), 1-59.

[19] Sara Negri, *Constructive analysis via formal topology*, prepublicación (1997).

[20] ____________, & Thierry Coquand, & ,Jan Cedersquist, *The Hahn-Banach theorem in type theory*, prepublicación (1997).

[21] Edward Nelson, *Mathehmatics and faith*, prepublicación (1999).

[22] Hernando Pérez, & Raul Leal, *Geometría y grupos paradójicos*, XII Encuentro de Geometria y sus Aplicaciones, 2001.

[23] Giovanni Sambin, *Steps towards a dynamic constructivism*, prepublicación (2001).

[24] ____________, &,Silvio Valentini, *Bulding up a toolbox for Martin-lö f's type theory. Part I Subset Theory*, prepublicación (2000).

[25] ____________, *The basic picture, a structure for topology. The basic picture, I*, prepublicación (2001).

[26] ____________. & ,Silvia Gebellato, *The esence of continuity. The basic picture, II*, prepublicación (2001).

[27] ____________, & ,Silvia Gebellato, *A preview of the basic picture*, prepublicación (1999).

[28] ____________, *Some points in formal topology*, prepublicación (2002).

[29] ____________, *Intuitionistic formal spaces*, prepublicación (1987).

[30] Agustín Sánchez, *Dalí*, Sociedad Editorial Electa, 1999.

[31] Ernst Snapper, *What do we do When we do mathematics?*, The Mathematical Intelligencer **vol 10 N°4** (1988), 53-58.