Cálculo gráfico para categorías ribbon y álgebras de Hopf

César Galindo Martínez
Estudiante Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
cesarneyit@yahoo.com.ar

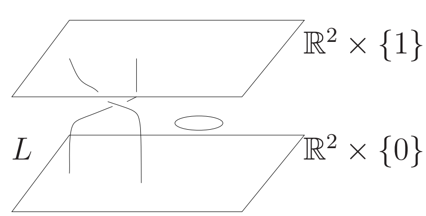
Stella Huérfano
Profesora Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
rshuerfanob@unal.edu.co

Resumen

En este escrito se categorizará a los entrelazados, estudiando algunas de sus propiedades. En la primera parte se definen los entrelazados, se les asigna una composición y se muestran algunos ejemplos, en la segunda parte se define el concepto de categoría tensorial, en la tercera parte se muestra que los entrelazados forman una categoría tensorial libre, y por último se establecerán las reglas de un cálculo gráfico para las categorías tensoriales. También consideramos una extensión de las categorías tensoriales llamadas las categorías trenzadas, a las cuales se le asocian gráficos, análogos a los entrelazados. Se considera un nuevo tipo de entrelazados: los entrelazados enmarcados. Algunas propiedades de los entrelazados enmarcados son tomadas para formar el concepto de categoría de cintas (ribbon). Finalmente se mostrará como las categorías de cintas producen invariantes de nudos, llamados invariantes de Reshetikhin Turaev.

1. Los Entrelazados

Definición 1.1. *Un entrelazado L es un encajamiento propio de 1-variedades en $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ como se muestra en la figura:*



La frontera de un entrelazado L será un conjunto vacío o un conjunto finito de puntos en $(\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup (\mathbb{R}^2 \times \{1\})$.

Los entrelazados que no poseen puntos frontera, son llamados enlaces, estos son uniones disjuntas de 1-variedades, isomorfas a la circunferencia S^1. Un enlace con un única componente conexa será llamado un nudo (knot).

Un entrelazado L se dice orientado cuando sus componentes conexas están orientadas, es decir las componentes son encajamientos de 1-variedades orientadas en $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.2. *Los entrelazados se pueden relacionar de la siguiente forma:*

Dos entrelazados L_1 y L_2 se dicen equivalentes si existe un homeomorfismo lineal $h : (\mathbb{R}^2 \times [0,1]) \to (\mathbb{R}^2 \times [0,1])$ *que preserva la orientación y tal que* $h(L_1) = h(L_2)$.

Dos entrelazados L_1 y L_2 son isotópicos si existe $h_t : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ *para cada $t \in [0,1]$ tal que $h_0 = identidad$ y $h_1 = h$ y donde $(x,t) \to (h_t x, t)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ en sí mismo.*

Una isotopía es una deformación continua de un entrelazado en otro que preserva los puntos frontera y no presenta auto intersecciones. La relación ser isotópicos es una relación de equivalencia.

Nos interesa estudiar las clases de equivalencia determinadas por la relación anterior, supondremos sin perdida de generalidad, que podemos alinear los m puntos finales inferiores y los n puntos finales superiores de un entrelazados L sobre cada uno de los planos $(\mathbb{R}^2 \times \{0\})$ y $(\mathbb{R}^2 \times \{1\})$ respectivamente, es decir los puntos frontera inferiores serán de la forma $\{(1,0,0),\ldots,(m,0,0)\}$ y los puntos frontera superiores serán de la forma $\{(1,0,1),\ldots,(n,0,1)\}$. Denotaremos para todo entero $n > 0$, $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$. Cuando $n = 0$, acordaremos que $[0]$ es el conjunto vacío. Denotaremos por I el intervalo $[0,1]$.

Definición 1.3. *Sean k y l enteros no negativos. Un entrelazado L de tipo (k,l) es un entrelazado tal que sus puntos frontera satisfacen la condición*

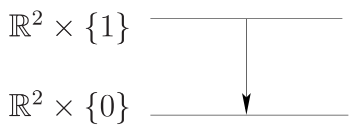
$$\partial L = L \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0,1\}) = ([k] \times \{0\} \times \{0\}) \cup ([l] \times \{0\} \times \{1\}).$$

Dado un entrelazado de tipo (k,l), definimos dos sucesiones finitas $s(L)$ y $b(L)$ que consisten de signos más '+' o menos '-'. La sucesión $s(L)$ es de longitud k, mientras que $b(L)$ es de longitud l. Si $k = 0$, entonces $s(L)$ es el conjunto vacío, si $l = 0$, $b(L) = \emptyset$. En el caso general, se define

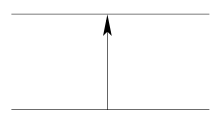
$$s(L) = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \quad y \quad b(L) = (\eta_1, \ldots, \eta_l)$$

donde '$\varepsilon_i = +$' [resp. '$\eta = +$'] si el punto $(i, 0, 0)$ [resp. el punto $(i, 0, 1)$] es un punto final [resp. inicial] de L. Tenemos '$\varepsilon_i = -$' y '$\eta_i = -$' en el otro caso, ejemplos de entrelazados importantes son:

1. El segmento de recta que une los puntos $[1, 0, 0] \in \mathbb{R}^3$ y $[1, 0, 1] \in \mathbb{R}^3$; este entrelazado lo denotaremos como $\uparrow$. Análogamente el entrelazado que une los puntos $[1, 0, 1] \in \mathbb{R}^3$ y $[1, 0, 0] \in \mathbb{R}^3$ lo denotaremos por $\downarrow$. Para estos entrelazados tenemos que $s(\downarrow) = (+)$, $b(\downarrow) = (+)$, $s(\uparrow) = (-)$, y $b(\uparrow) = (-)$.

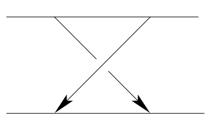


denotado por '$\downarrow$'

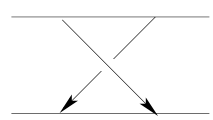


denotado por '$\uparrow$'

2. Los entrelazados de la figura siguiente



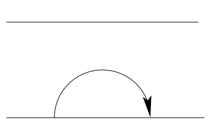
denotado por X_+



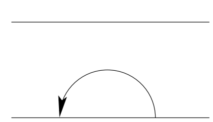
denotado por X_-

son tales que $s(X_+) = b(X_+) = s(X_-) = b(X_-) = (+, +)$.

3. Los entrelazados de la siguiente figura, son de tipo $(2, 0)$



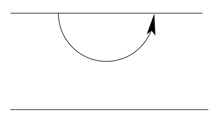
denotado por $\cap$



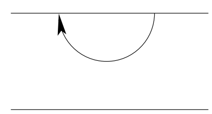
denotado por $\overleftarrow{\cap}$

Tenemos que $s(\cap) = (-, +)$, $b(\cap) = \emptyset$, $s(\overleftarrow{\cap}) = (+, -)$ y $b(\overleftarrow{\cap}) = \emptyset$.

4. Los entrelazados de la siguiente figura, son de tipo $(0, 2)$



denotado por $\cup$

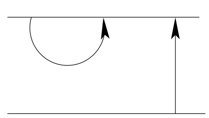


denotado por $\overleftarrow{\cup}$

Tenemos que $s(\cup) = \emptyset$, $b(\cup) = (+, -)$, $s(\overleftarrow{\cup}) = \emptyset$, $b(\overleftarrow{\cap}) = (-, +)$.

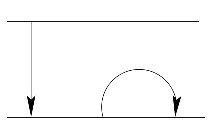
1.1. Composición de entrelazados

Para el entrelazado L



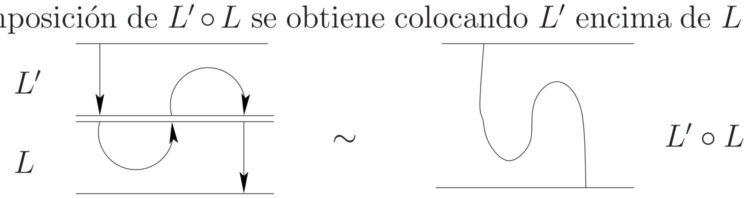
L

y el entrelazado L':



L'

La composición de $L' \circ L$ se obtiene colocando L' encima de L del siguiente modo



En general si tengo entrelazados L y L' tales que $b(L) = s(L')$ podemos definirla composición $L' \circ L$ análogo al ejemplo anterior.

2. Categorías tensoriales

Las categorías tensoriales también son llamadas categorías monoidales, puesto que copian las propiedades de los monoides. Un monoide es un conjunto con un *producto* el cual es asociativo y posee elemento unidad. Un ejemplo de categoría monoidal es la categoría de los espacios vectoriales con un producto el cual puede ser, la suma directa '$\oplus$' de espacios vectoriales, o el producto tensorial '$\otimes$', de los espacios vectoriales. Primero consideraremos categorías con un producto estrictamente asociativo y un objeto unidad a derecha e izquierda.

Definición 2.1. *Una categoría tensorial estricta* $(\mathcal{C}, \otimes, e)$ *es una categoría* $\mathcal{C}$ *equipada con un bifuntor* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *tal que*

$$\otimes \circ (\otimes \times id) = \otimes \circ (id \times \otimes) : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \tag{1}$$

y con un objeto unidad 'e' el cual es identidad por derecha e izquierda, para $\otimes$, *es decir*

$$\otimes \circ (e \times id) = id_{\mathcal{C}} = \otimes \circ (id \times e) \tag{2}$$

La condición (1) sobre la asocociatividad nos dice que $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ para todo
$a, b, c \in Obj(\mathcal{C})$. La condición (2) nos dice que $a \otimes e = a$ para todo $a \in Obj(\mathcal{C})$. Para comprender mejor el concepto de categoría tensorial recordaremos el concepto de bifuntor. El producto $\square$ es un bifuntor $\square : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ sí:

(a) Para todo par (V, W) de objetos de la categoría, existe un objeto
$V \square W \in Obj(\mathcal{C})$ asociado.

(b) Existe un morfismo $f \square g$, asociado a todo par (f, g) de morfismos de $\mathcal{C}$, tal que para $f : A \to B$ y $g; A' \to B'$

$$f \square g : A \square A' \to B \square B'$$

(c) Si f' y g' son morfismo tales que las composiciones $f' \circ f$ y $g' \circ g$ están definidas entonces:

$$(f' \square g') \circ (f \square g) = (f' \circ f) \square (g' \circ g).$$

(d) También se cumple que

$$\mathrm{id}_{V \square W} = \mathrm{id}_V \square \mathrm{id}_W.$$

Un ejemplo de bifuntor es el producto tensorial en la categoría $Vect(k)$ de los espacios vectoriales sobre un cuerpo k. Entonces el producto tensorial de espacios vectoriales define un bifuntor de $Vect(k) \times Vect(k)$ a $Vect(k)$.

De aquí en adelante denotaremos el bifuntor de una categoría tensorial como $\otimes$ en lugar de $\square$.

Una categoría tensorial (relajada o simplemente tensorial) es una categoría $\mathcal{C}$ con un bifuntor $\otimes$, el cual es asociativo (salvo un isomorfismo natural α), y un objeto e unidad el cual es una unidad a derecha e izquierda (salvo isomorfismos naturales r y l). Formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2. *Una categoría tensorial* $(\mathcal{C}, \otimes, e, \alpha, l, r)$ *es una categoría* $\mathcal{C}$ *equipada con un bifuntor* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$*, con un objeto unidad* e*, llamado la unidad de la categoría tensorial y tres isomorfismos naturales* α, l, r*, tales que*

$$\alpha : \alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \cong (a \otimes b) \otimes c$$

es un isomorfismo natural para todo $a, b, c \in \mathcal{C}$ *y el pentágono*

$$\begin{tikzcd}
 & (a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \arrow[dr, "\alpha"] & \\
a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] & & ((a \otimes b) \otimes c) \otimes d \\
a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[rr, "\alpha"'] & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \arrow[u, "\alpha\otimes\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para todo $a, b, c \in \mathcal{C}$.

Los isomorfismos naturales l y r son tales que $l : l_a : e \otimes a \cong a$, $\;r : r_a : a \otimes e \cong a$ y satisfacen el siguiente diagrama triangular, para todo $a, c \in \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} a \otimes (e \otimes c) \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes l"] & \\ & a \otimes c \\ (a \otimes e) \otimes c \arrow[ur, "r\otimes \mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

En la siguiente sección se muestra como los entrelazados forman una categoría tensorial estricta.

3. La categoría de los entrelazados

Procederemos a ver el conjunto de los entrelazados orientados, como una categoría tensorial estricta a la que denotaremos por $\mathcal{T}$. Por definición los objetos de $\mathcal{T}$ son las sucesiones finitas de signos más '+' o menos '-', incluyendo la sucesión vacía, y los morfismos de $\mathcal{T}$ son las clases de isotopía de los entrelazados orientados. Para todo entrelazado orientado L, las sucesiones $s(L)$ y $b(L)$ definidas anteriormente, corresponden al dominio y rango, respectivamente, del morfismo que L define. Por otra parte la identidad $id : Ob(\mathcal{T}) \to Hom(\mathcal{T})$ esta definida por la siguiente regla: $id_\emptyset$ es el conjunto vacío $\emptyset$, si ε es una sucesión finita de longitud n en $Ob(\mathcal{T})$, definimos id_ε como la clase de isotopía de los entrelazados L formados por la unión de los intervalos $(\{1\} \times \{0\} \times [0,1]) \cup (\{2\} \times \{0\} \times [0,1]) \cup \cdots \cup (\{n\} \times \{0\} \times [0,1])$ del espacio $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, la orientación de estos intervalos esta determinada por la regla $s(id_\varepsilon) = b(id_\varepsilon) = \varepsilon$. La composición de entrelazados definida anteriormente es la composición en $\mathcal{T}$.

Equipamos a $\mathcal{T}$ con un producto tensorial. Este esta definido como la concatenación de sucesiones, es decir, si $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ y $\varepsilon' = (\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_l)$ son objetos de $\mathcal{T}$, entonces su producto tensorial esta dado por

$$\varepsilon \otimes \varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_l).$$

Además $\emptyset \otimes \varepsilon = \varepsilon = \varepsilon \otimes \emptyset$. Esta operación es asociativa. El producto tensorial para los morfismos se define como sigue, si L y L' son clases de isotopía para entrelazados, $L \otimes L'$ es la clase de isotopía del entrelazado orientado obtenido colocando L' a la derecha de L. Esta operación esta bien definida (con respecto a la relación de equivalencia isotópica), es asociativa y define un bifuntor de $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ en $\mathcal{T}$.

Proposición 3.1. *La categoría de los entrelazados $\mathcal{T}$ equipada con el producto tensorial definido anteriormente es una categoría tensorial estricta, en la cual la unidad I es el conjunto vacío $\emptyset$.*

La demostración se sigue naturalmente de la definición de producto tensorial de entrelazados y de la definición de categoría tensorial estricta.

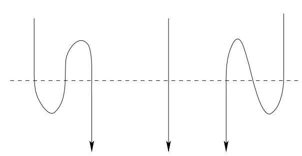
En lo que sigue, usaremos la siguiente notación: $\downarrow = id_{(+)}$ y $\uparrow = id_{(-)}$, además notaremos $X \otimes Y$ simplemente por XY. Con está notación estableceremos una de las propiedades más interesantes de esta categorías, que fue independientemente obtenida por Turaev [Tur89] y Yetter [Yet90]. Este resultado se establece en el siguiente Teorema:

Teorema 3.2. *[Yet88][Tur89] La categoría tensorial $\mathcal{T}$ es generada por los seis morfismos*

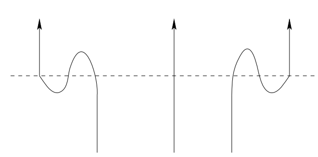
$$\cup, \overleftarrow{\cup}, \cap, \overleftarrow{\cap}, X_+, X_-,$$

y las relaciones (ver la definición de composición de entrelazados (1.1)*)*

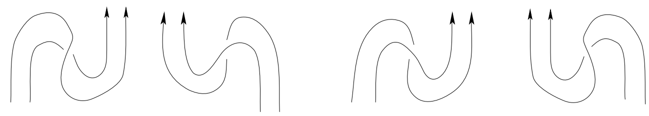
$$(\downarrow \cap) \circ (\cup \downarrow) = \downarrow = (\overleftarrow{\cap} \downarrow) \circ (\downarrow \overleftarrow{\cup}) \tag{3}$$



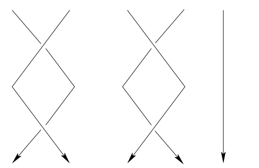
$$(\uparrow \overleftarrow{\cap})(\overleftarrow{\cup} \uparrow) = \uparrow = (\cap \uparrow) \circ (\uparrow \cup) \tag{4}$$



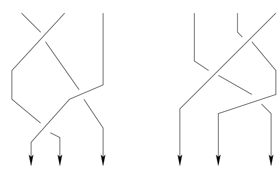
$$\begin{aligned} &(\cap \uparrow\uparrow) \circ (\uparrow \cap \downarrow\uparrow\uparrow) \circ (\uparrow\uparrow X_{+-} \uparrow\uparrow) \circ (\uparrow\uparrow\downarrow \cup \uparrow) \circ (\uparrow\uparrow \cup) \\ &= (\uparrow\uparrow \overleftarrow{\cap}) \circ (\uparrow\uparrow\downarrow \overleftarrow{\cap} \uparrow) \circ (\uparrow\uparrow X_{+-} \uparrow\uparrow) \circ (\uparrow \overleftarrow{\cup} \downarrow\uparrow\uparrow) \circ (\overleftarrow{\cup} \uparrow\uparrow) \end{aligned} \tag{5}$$



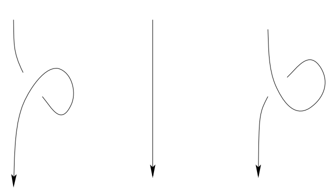
$$X_+ \circ X_- = X_- \circ X_+ = \downarrow\downarrow, \tag{6}$$



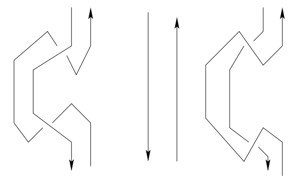
$$(X_+ \downarrow) \circ (\downarrow X_+) \circ (X_+ \downarrow) = (\downarrow X_+) \circ (X_+ \downarrow) \circ (\downarrow X_+) \tag{7}$$



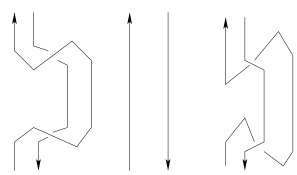
$$(\downarrow \overleftarrow{\cap}) \circ (X_{+-} \uparrow) \circ (\downarrow \cup) = \downarrow, \tag{8}$$



$$(\cap \downarrow\uparrow) \circ (\uparrow X_{-+} \uparrow) \circ (\uparrow\downarrow \cup) \circ (\uparrow\downarrow \overleftarrow{\cap}) \circ (\uparrow X_{+-} \uparrow) \circ (\overleftarrow{\cup} \downarrow\uparrow) = \downarrow\uparrow\,. \tag{9}$$



$$(\uparrow\downarrow \overleftarrow{\cap}) \circ (\uparrow X_{+-} \uparrow) \circ (\overleftarrow{\cup} \downarrow\uparrow) \circ (\cap \downarrow\uparrow) \circ (\uparrow X_{-+} \uparrow) \circ (\uparrow\downarrow \cup) = \uparrow\downarrow . \qquad (10)$$



Demostración. Ver [Kas95]. □

Siempre que se tiene una categoría tensorial $\mathcal{C}$ (no estricta) podemos construir una categoría tensorial estricta $\mathcal{C}^{str}$ la cual es tensorialmente equivalente a $\mathcal{C}$. La idea general para su construcción es la siguiente: Los objetos de $\mathcal{C}^{str}$ serán las sucesiones finitas de la forma $S = (V_1, \ldots, V_k)$ de objetos de $\mathcal{C}$ incluyendo la sucesión vacía. Si $S = (V_1, \ldots, V_k)$ y $S' = (V_{k+1}, \ldots, V_{k+n})$ son dos sucesiones no vacías, denotamos por $S \otimes S'$ a la secuencia,

$$S \otimes S' = (V_1, \ldots, V_k, \ldots, V_{k+n}),$$

obtenida agregando S' después de S. Además tenemos que $S \otimes \emptyset = S = \emptyset \otimes S$. A cada objeto V de $\mathcal{C}^{str}$ le asignamos un objeto $F(V)$ de $\mathcal{C}$ definido inductivamente del siguiente modo

$$F(\emptyset) = e, \quad F((V)) = V, \quad F(S \otimes (V)) = F(S) \otimes V.$$

Definimos los morfismos de $\mathcal{C}^{str}$ por

$$Hom_{C^{str}}(S, S') = Hom_C(F(S), F(S')).$$

esta nueva categoría es tensorial estricta y equivalente a $\mathcal{C}$, ver [Mac98].

La categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo k, $Vec_f(k)$, es un ejemplo de una categoría tensorial (usando el producto tensorial de los espacios vectoriales) la cual no es estricta y a la que le podemos aplicar la técnica anterior para generar una categoría tensorialmente equivalente que denotaremos por $\mathcal{V}$.

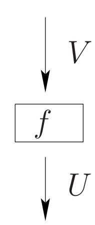
Podemos observar que existen algunas analogías entre las categorías $\mathcal{C}^{str}$ y la categoría de los entrelazados orientados $\mathcal{T}$; los objetos de $\mathcal{T}$ son sucesiones de la forma: ε tales que $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1) \otimes \cdots \otimes (\varepsilon_n)$ los objetos de $\mathcal{C}^{str}$ son sucesiones $(V_1, \ldots, V_n) = (V_1) \otimes \cdots \otimes (V_n)$. Si fijamos dos elementos V y W en $\mathcal{C}$ podemos obtener una biyección entre los objetos de $\mathcal{T}$ y el conjunto de todas las posibles sucesiones formadas con V y W. Si encontramos seis morfismos en $\mathcal{C}^{str}$ que cumplan con las relaciones del Teorema (3.2), obtenemos una representación de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{C}^{str}$.

Cuando encontramos una representación de $\mathcal{T}$ en una categoría tensorial $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, obtenemos un funtor tensorial $F : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$. Por el hecho de ser tensorial, la imagen de la unidad de $\mathcal{T}$ (la sucesión $\emptyset$) es enviada en la unidad I de la categoría $\mathcal{C}$, un enlace L es un morfismo $L : \emptyset \to \emptyset$, por lo tanto $F(L)$ es un endomorfismo de la unidad de $\mathcal{C}$. Como un morfismo L de la categoría $\mathcal{T}$ es precisamente la clases de isotopía de un entrelazado L, tenemos que si los entrelazados L y L' son isotópicos $F(L) = F(L')$. Estos invariantes son tan robustos que usando la técnica anterior es posible demostrar la existencia y unicidad del polinomio Homfly.

4. Cálculo gráfico para categorías tensoriales

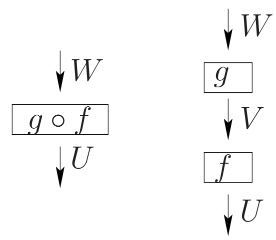
Se desea establecer un sistema para representar morfismos, de ciertas categorías que presenten propiedades análogas a los morfismos de la categoría de los entrelazados orientados $\mathcal{T}$.

Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial. Representaremos un morfismo $f : U \to V$ en $\mathcal{C}$ por una caja con dos flechas verticales orientadas hacia abajo como en la figura.

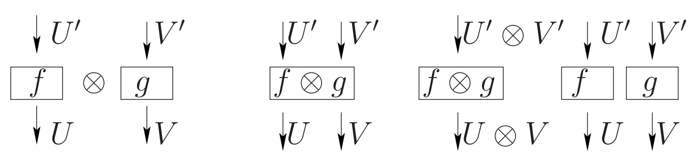


Aquí U y V son representados por las flechas y f es representada por la caja.

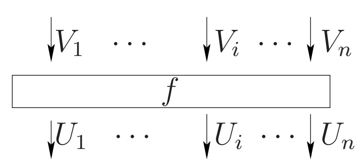
El gráfico para la composición de $f : U \to V$ y $g : V \to W$ es obtenido, de modo análogo a como se obtiene la composición de dos entrelazados, es decir, colocando el gráfico de g encima del gráfico de f, como en la figura.



La identidad de V se representa como una flecha vertical hacia abajo $\downarrow V$. El producto tensorial de dos morfismos f y g es representado por cajas puestas una al lado de la otra como en la figura.



Un morfismo $f : U_1 \otimes \cdots \otimes U_m \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ es representado por la figura



5. Dualidad

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y V^* su dual, con bases $\{v_i\}$ y $\{v^i\}$ respectivamente, podemos definir la función evaluación ev_V, $ev_V : V^* \otimes V \to k$ mediante la formula:

$$ev_V(v^i \otimes v_j) =< v^i, v_j >= \delta_{i,j}.$$

También definimos la función coevaluación δ_V, $\delta_V : k \to V \otimes V^*$ como:

$$\delta_V(1) = \sum_i v_i \otimes v^i.$$

Las funciones ev_V y δ_V son independientes de la escogencia de la base.

Recordemos que si tenemos una función lineal en espacios de dimensión finita $f : U \to V$, dada por $f(u_j) = \sum_i f_j^i v_i$ definimos su transpuesta $f^* : V^* \to U^*$ por $f^*(v^j) = \sum_i f_i^j u^i$. Un ejercicio sencillo que el lector puede realizar en este punto es verificar que ev_V y δ_V satisfacen: $(id_V \otimes ev_V)(\delta_V \otimes id_V) = id_V$ y $(ev_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes \delta_V) = id_{V^*}$. Una propiedad interesante de la transpuesta de una función f, es que se puede escribir en términos de las funciones evaluación y coevaluación del siguiente modo:

Proposición 5.1. *Sea $f : U \to V$ una función lineal, entonces la transpuesta de f, f^* es igual a la composición de las funciones*

$$V^* \xrightarrow{id_{V^*} \otimes \delta_U} V^* \otimes U \otimes U^* \xrightarrow{id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*}} V^* \otimes V \otimes U^* \xrightarrow{ev_v \otimes id_{U^*}} U^*$$

Demostración. Se sigue directamente de la definición de ev_V y δ_V en términos de una base. $\square$

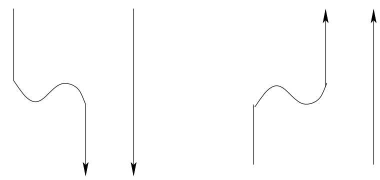
Corolario 5.2. *Toda categoría tensorial $\mathcal{C}, \otimes$, donde los objetos de $\mathcal{C}$ y los morfismo de $\mathcal{C}$, satisfagan las relaciones* (3)- (10), *del teorema* (3.2), *es isomorfa a $\mathcal{T}$*

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema (3.2). $\square$

Si en la categoría tensorial estricta $\mathcal{V}$, asociada a la categoría de los espacios vectoriales de dimension finita $Vec_f(k)$, fijamos un objeto $W \in Vec_f(k)$, podemos relacionar a $(W) \in \mathcal{V}$ [respectivamente $(W^*) \in \mathcal{V}$] con el objeto $(+)$ [respectivamente $(-)$] de la categoría $\mathcal{T}$ de los entrelazados orientados. Al morfismo $\cup \in Hom(\mathcal{T})$, $\cup : \emptyset \to (+,-)$ [respectivamente, al morfismo $\cap \in Hom(\mathcal{T})$, $\cap : (-,+) \to \emptyset$] le asignamos la función coevaluación $\delta_V \in Hom(\mathcal{V})$[1], $\delta_V : k \to V \otimes V^*$ [respectivamente ev_V]. Esta asignación se hace de este modo dado que ev_V y δ_V

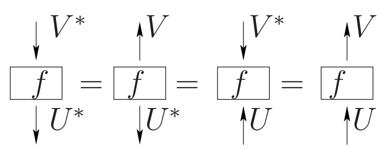
[1]En realidad si $\delta_V \in \mathcal{V}$ debería notarse como $\delta_V : (k) \to (V, V^*)$, pero esperamos que no creará confusiones.

satisfacen que $(id_V \otimes ev_V)(\delta_V \otimes id_V) = id_V$, la cual corresponde para los morfismos $\cup, \cap \in Hom(\mathcal{T})$ a $(\downarrow \cap) \circ (\cup \downarrow) = \downarrow$ que corresponde al lado izquierdo de la relación (3) del Teorema (3.2); además ev_V y δ_V también satisfacen que $(ev_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes \delta_V) = id_{V^*}$, que para $\cup, \cap \in Hom(\mathcal{T})$ corresponde a $\uparrow = (\cap \uparrow) \circ (\uparrow \cup)$, el cual es el lado derecho da la relación (4) del Teorema (3.2), gráficamente:

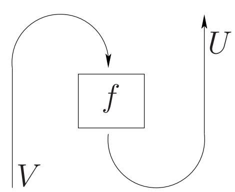


$$(id_V \otimes ev_V)(\delta_V \otimes id_V) = id_V \quad \text{y} \quad (ev_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes \delta_V) = id_{V^*} \tag{11}$$

Dado que tratamos de adoptar un cálculo gráfico, el cual se parezca a los entrelazados, tenemos que la identidad de W^* se graficará como una flecha vertical hacia arriba denotada: $\uparrow W$. En términos generales tenemos que un morfismo $f : U^* \to V^*$ puede ser representado por varios gráficos entre ellos:



Usando la proposición (5.1) podemos representar la transpuesta f^* de un morfismo $f : U \to V$ con el siguiente diagrama:



$$f^* = (ev_V \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes \delta_V).$$

En una categoría tensorial estricta, podemos abstraer la noción de dualidad de la siguiente forma:

Definición 5.3. *Sea $(\mathcal{C}, \otimes, e)$ una categoría tensorial estricta. Una categoría tensorial posee dualidad a izquierda si para cada objeto V, $V \in \mathcal{C}$ existe un objeto*

$V^* \in \mathcal{C}$ y morfismos b_V y d_V de $\mathcal{C}$ tales que:

$$b_V : e \to V \otimes V^* \quad y \quad d_V : V^* \otimes V \to e,$$

tal que:

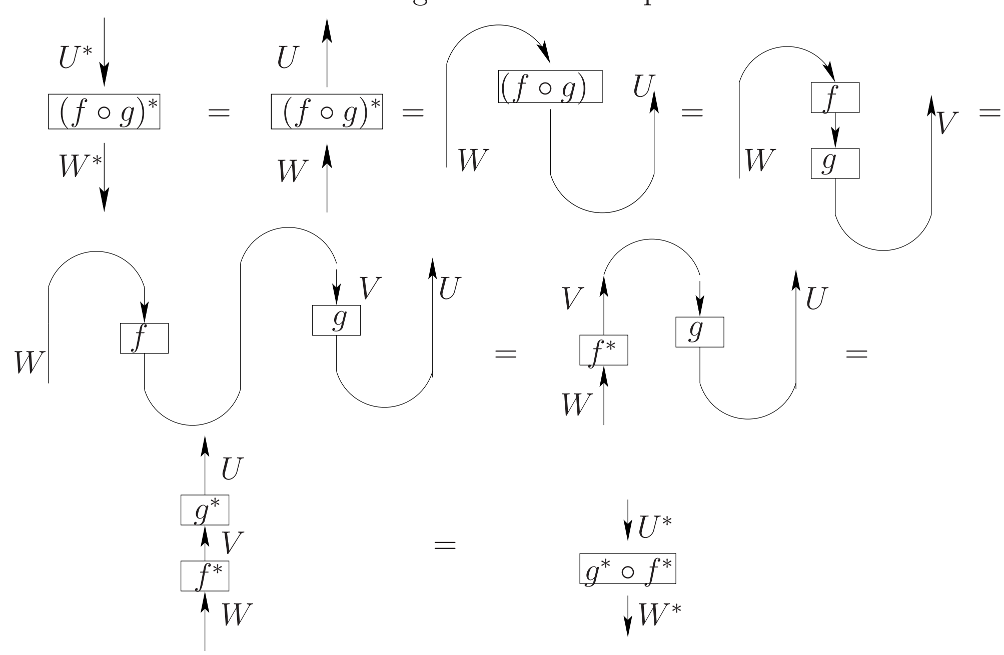
$$(id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = id_V \quad y \quad (d_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes b_V) = id_{V^*}.$$

Los morfismos $b_V : e \to V \otimes V^*$ y $d_V : V^* \otimes V \to e$ son representados por los gráficos:

Las anteriores definiciones generalizan las propiedades usuales de dualidad en la categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita. Esto se verifica en la siguiente proposición.

Proposición 5.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tensorial estricta con dualidad a izquierda. Entonces si $f : V \to W$ y $g : U \to V$ son morfismos de $\mathcal{C}$ tenemos $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ y $(id_V)^* = id_{V^*}$ para todo objeto V.*

Demostración. Usando el cálculo gráfico tenemos que



Para ver que $(id_V)^* = id_{V^*}$, se usan las definiciones de la transpuesta de id_V y la definición de categoría con dualidad a izquierda tenemos, así tenemos:

$$\begin{aligned}(id_V)^* &= (d_V \otimes id_{V^*}) \circ (id_{V^*} \otimes id_V \otimes id_{V^*}) \circ (id_{V_*} \otimes b_V)\\ &= (d_V \otimes id_{V^*}) \circ (id_{V^*} \otimes b_V)\\ &= id_{V^*}\end{aligned}$$

□

La noción de dualidad a derecha, se obtiene del siguiente modo: una categoría tensorial estricta $(\mathcal{C}, \otimes, e)$ se dice que es una categoría con *dualidad a derecha* si para cada objeto V de $\mathcal{C}$ existe un objeto ${}^*V$ y morfismos

$$b'_V : e \to^* V \otimes V \quad \text{y} \quad d'_V : V \otimes^* V \to e,$$

en la categoría, tal que:

$$(d'_V \otimes id_V)(id_V \otimes b'_V) = id_V \quad \text{y} \quad (id_{*V} \otimes d'_V)(b'_V \otimes id_{*V}) = id_{*V}.$$

Podemos definir la transpuesta a derecha de f, '${}^*f$' análogo a f^*:

$${}^*f = (id_{*V} \otimes d'_W)(id_{*V} \otimes f \otimes id_{*W})(b'_V \otimes id_{*W}).$$

En categorías generales la dualidad por derecha es distinta al dualidad izquierda, sin embargo cuando en una categoría $\mathcal{C}$ se tiene dualidad a derecha e izquierda se dice que $\mathcal{C}$ es *autónoma*. En este caso, existen isomorfismos tales que:

$${}^*(V^*) \cong V \cong ({}^*V)^*,$$

para todo objeto V en $\mathcal{C}$. Ver [BJ01].

6. Categorías trenzadas

Consideraremos algunas extensiones de las categorías tensoriales. La primera de ellas, es la de categoría tensorial simétrica. Una categoría tensorial simétrica es una categoría donde el producto tensorial no solo es asociativo (salvo isomorfismos), sino que además es simétrico, salvo un isomorfismo natural c, $c_{a,b} : a \otimes b \cong b \otimes a$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
a \otimes b \arrow[d, "c_{a,b}"'] \arrow[dr, "id"] & \\
& a \otimes b \\
b \otimes a \arrow[ur, "c_{b,a}"'] &
\end{tikzcd}$$

Así como se generalizó la idea de asociatividad se desea generalizar la noción de simetría para ello definimos la noción de trenza.

Definición 6.1. *Una trenza para una categoría tensorial $(\mathcal{B}, \otimes, e, \alpha, l, r)$ consiste de una familia de isomorfismos naturales:*

$$c_{a,b} : a \otimes b \cong b \otimes a, \quad \textit{para } a, b \in \mathcal{B}.$$

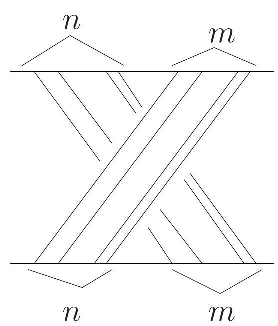
tales que los siguientes diagramas hexagonales conmuten para todo objeto U, W, V en $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}
& U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "c_{U,V\otimes W}"] & (V \otimes W) \otimes U \arrow[dr, "\alpha_{V,W,U}"] & \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, "\alpha_{U,V,W}"'] \arrow[dr, "c_{U,V}\otimes id_W"'] & & & V \otimes (W \otimes U) \\
& (V \otimes U) \otimes W \arrow[r, "\alpha_{V,U,W}"] & V \otimes (U \otimes W) \arrow[ur, "id_V \otimes c_{U,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

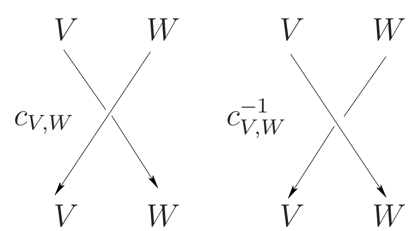
$$\begin{tikzcd}
& (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "c_{U\otimes V,W}"] & W \otimes (U \otimes V) \arrow[dr, "\alpha^{-1}_{W,U,V}"] & \\
U \otimes (V \otimes W) \arrow[ur, "\alpha^{-1}_{U,V,W}"'] \arrow[dr, "id_U \otimes c_{V,W}"'] & & & (W \otimes U) \otimes V \\
& U \otimes (W \otimes V) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{U,W,V}"] & (U \otimes W) \otimes V \arrow[ur, "c_{U,W}\otimes id_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Definición 6.2. *Una categoría tensorial trenzada $(\mathcal{B}, \otimes, e, \alpha, l, r, c)$ es una categoría tensorial, con una trenza c.*

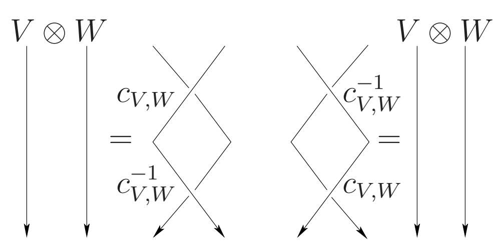
Ejemplos de categorías trenzadas son $Vec(k)$ con el producto tensorial de los espacios vectoriales, y el isomorfismo natural $A \otimes B \cong B \otimes A$ como trenza, otro ejemplo es la categoría $\mathcal{T}$ con la trenza $c_{n,m} : [n] \otimes [m] \cong [m] \otimes [n] \in Obj(\mathcal{T})$ para objetos en $Obj(\mathcal{T})$, dada por:



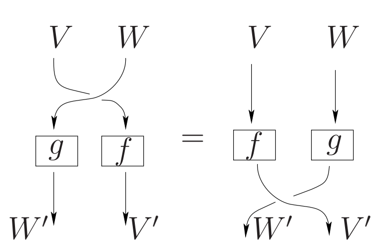
Si nos basamos en el último ejemplo tenemos que para una categoría tensorial trenzada, con una trenza c, podemos representar a $c_{V,W}$ y a $c^{-1}_{V,W}$, respectivamente, con los siguientes diagramas:



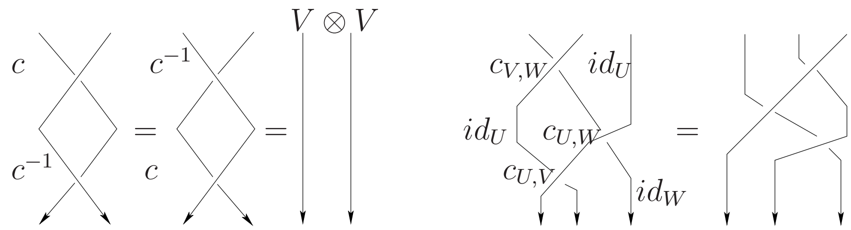
De la definición de trenza tenemos las siguientes relaciones:



El hecho de que c sea isomorfismo natural se expresa como



Si aplicamos este cálculo gráfico a la categoría $Vec_f(k)$, podemos relacionar los morfismo X_+ y X_- con morfismos $c_{V,W}$ y $c_{V,W}^{-1}$ tales que $c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ y $c_{V,W}^{-1} : W \otimes V \to V \otimes W$. Pero para poder identificar X_+ y X_- con $c_{V,W}$ y $c_{V,W}^{-1}$, respectivamente, sin temor a generar inconsistencias se necesita que $c_{V,W}$ y $c_{V,W}^{-1}$ cumplan las condiciones análogas a la de entrelazados, ver Teorema (3.2).



La primera gráfica nos dice que $c \circ c^{-1} = c^{-1} \circ c = id_{V \otimes V}$. La segunda gráfica afirma que

$$(c_{V,W} \otimes id_U)(id_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes id_W) = (id_W \otimes c_{U,V})(c_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c_{V,W}). \quad (12)$$

En el caso $c = c_{V,V}$ esta relación es llamada la ecuación de Yang-Baxter. Un automorfismo c, $c : V \otimes V \to V \otimes V$ es una solución de la ecuación de Yang-Baxter si satisface la siguiente ecuación:

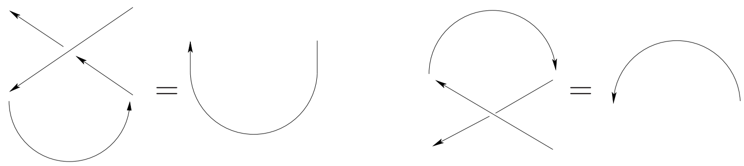
$$(c \otimes id_V)(id_V \otimes c)(c \otimes id_V) = (id_V \otimes c)(c \otimes id_V)(id_V \otimes) \quad (13)$$

7. Categorías de cintas

Las categorías simétricas tienen la propiedad que $c_{V,W} \circ c_{W,V} = id_{V,W}$, esto nos permite definir dualidad a derecha con ayuda de la trenza y la dualidad a izquierda de la siguiente forma:

$$b'_V = c_{V,V^*} \circ b_V \qquad d'_V = d_V \circ c_{V,V^*}. \quad (14)$$

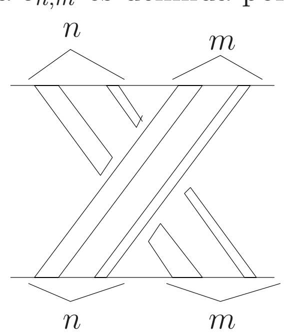
Es decir, una categoría tensorial simétrica con dualidad a izquierda [respectivamente a derecha] inmediatamente tengo dualidad a derecha, [respectivamente a izquierda] con lo cual la categoría es autónoma. Esta propiedad se puede ver gráficamente como:



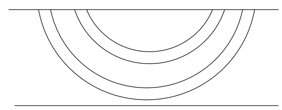
En categorías trenzadas, no simétricas, tenemos que $c^2 \neq id$; es decir, no necesariamente las ecuaciones (14) nos garantizan una dualidad. Para poder extender estas ideas de dualidad introduciremos los **entrelazados enmarcados** (framed tangles) también llamados **entrelazados de cintas** (ribbon tangles). Una *cinta* es la imagen homeomorfica de un rectángulo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ con dos bordes en $\partial(\mathbb{R}^2 \times [0,1]) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cup (\mathbb{R}^2 \times \{1\})$, a estos bordes los llamaremos las bases de la cinta. En una cinta, cuando sea necesario, se distinguirá cada una de las dos caras, se dibujara una cara con blanco y la otra con negro. También se considerarán imágenes homeomorficas de anillos, (en lugar de rectángulos) que llamaremos enlaces enmarcados, los cuales también tienen caras que se pueden distinguir una de la otra, dibujándolas en blanco y negro.

Definición 7.1. *Un entrelazado enmarcado, es la clase de isotopía de una unión de cintas y enlaces enmarcados en* $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$, *los cuales no se interceptan.*

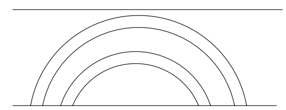
Los entrelazados enmarcados forman una categoría tensorial estricta con dualidad a izquierda, que denotaremos por $\mathcal{M}$. La categoría $\mathcal{M}$ se define como se definió la categoría $\mathcal{T}$ de los entrelazados orientados. Los objetos de $\mathcal{M}$ son los objetos de $\mathcal{T}$, los morfismos de $\mathcal{M}$ son las clases de isotopía de los entrelazados enmarcados orientados. La composición, la unidad, el producto tensorial son análogos a como se definió en $\mathcal{T}$. La trenza $c_{n,m}$ es definida por:



Para describir la dualidad a izquierda, sea ε un objeto de $\mathcal{M}$ explícitamente $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ una sucesión de signos '+' mas o '-' menos. Definimos el objeto dual por la sucesión $\varepsilon^* = (-\varepsilon_n, \ldots, -\varepsilon_1)$. Las funciones $b_\varepsilon : \emptyset \to (\varepsilon \otimes \varepsilon^*)$ y $d_\varepsilon : (\varepsilon^* \otimes \varepsilon) \to \emptyset$ son entrelazados enmarcados representados por las siguientes figuras:

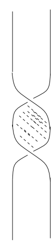


b_ε

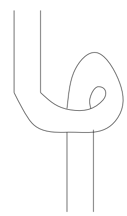


d_ε

Para cada elemento $\varepsilon \in Obj(\mathcal{M})$ definiremos el twist de ε que denotaremos por θ_ε, $\theta_\varepsilon : \varepsilon \to \varepsilon$ así: si $\varepsilon = (+)$, $\theta_{(+)}$ es la cinta orientada hacia abajo representada por:

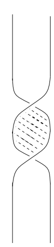


$\theta_{(+)}$

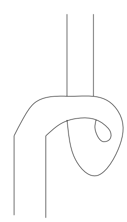


$\theta_{(+)}$

El inverso de $\theta_{(+)}$, $\theta^{-1}_{(+)}$ esta dado por la cinta con dirección hacia abajo

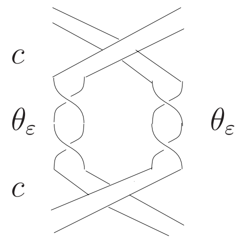


$\theta^{-1}_{(+)}$

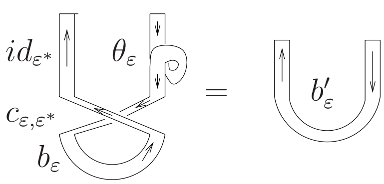


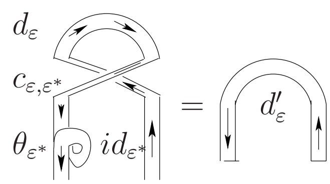
$\theta^{-1}_{(+)}$

Para definir el twist, en general, sea ε una sucesión de longitud n entonces θ_ε es obtenido *torciendo* el plano, que contiene las n cintas, un ángulo de 2π, la dirección de cada una de las cintas resultantes está dada por los signos de la sucesión ε. Más formalmente usando el hecho que ε también se puede escribir como $\varepsilon = \varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_n$, donde ε_i, $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 2$ son signos más [+] o menos [-]. Si $n = 2$ definimos $\theta_{\varepsilon_a \otimes \varepsilon_b} = c_{\varepsilon_a, \varepsilon_b} \circ \theta_{\varepsilon_a} \otimes \theta_{\varepsilon_b} \circ c_{\varepsilon_a, \varepsilon_b}$, inductivamente se define el twist de cualquier sucesión ε de longitud $n \geq 2$. Como un ejemplo del twist para un elemento $\varepsilon \in \mathcal{M}$ de longitud 2, θ_ε es de la forma:



Usando la trenza y el twist, podemos definir morfismos $b'_\varepsilon : \emptyset \to \varepsilon^* \otimes \varepsilon$ y $d'_\varepsilon : \varepsilon \otimes \varepsilon^* \to \emptyset$ para todo objeto ε de $\mathcal{M}$ por:





$b'_\varepsilon = (id_{\varepsilon^*} \otimes \theta_\varepsilon)c_{\varepsilon,\varepsilon^*}b_\varepsilon$ $\qquad$ $d'_\varepsilon = d_\varepsilon c_{\varepsilon,\varepsilon^*}(\theta_\varepsilon \otimes id_{\varepsilon^*})$

Definición 7.2. *Sea $(\mathcal{R}, \otimes, c, e)$ una categoría tensorial trenzada con dualidad a izquierda.*

(a) Un twist es una familia $\{\theta_V : V \to V\}_{V \in Ob(\mathcal{R})}$ de isomorfismos naturales tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} V \otimes W & \xrightarrow{c_{V,W}} & W \otimes V \\ {\scriptstyle \theta_{V\otimes W}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \theta_W \otimes \theta_V} \\ V \otimes W & \xleftarrow{c_{W,V}} & W \otimes V \end{array}$$

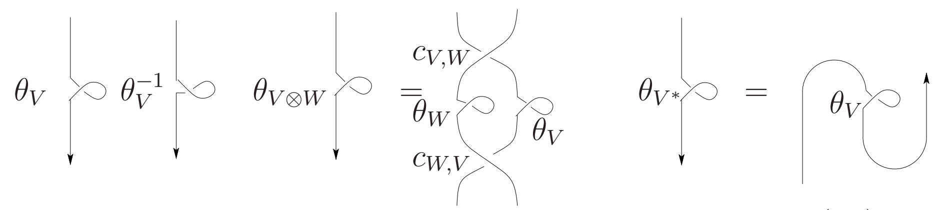
para todo V, W en $\mathcal{R}$. Además

(b)

$$\theta_{V^*} = (\theta_V)^*$$

para todo V en $\mathcal{R}$.

Como el twist es un isomorfismo natural tenemos para todo morfismo $f \in Hom_{\mathcal{R}}(V, W)$ la propiedad $\theta_W f = f\theta_V$. Usando el cálculo gráfico podemos representar las relaciones de esta definición como



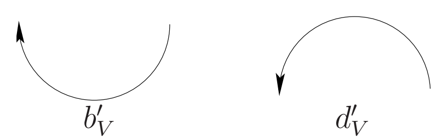
$\theta_{V\otimes W} = c_{V,W}\theta_W \otimes \theta_V c_{W,V}$ $\qquad$ $\theta_{V^*} = (\theta_V)^*$

Definición 7.3. *Una categoría cinta* $(\mathcal{R}, \otimes, c, \theta, e)$ *es una categoría tensorial estricta trenzada con dualidad izquierda y con un twist* θ*.*

Al igual que en la categoría de los entrelazados enmarcados, para una categoría cinta podemos definir morfismos $b'_V : e \to V^* \otimes V$ y $d'_V : V \otimes V^* \to e$ para cada objeto $V \in \mathcal{R}$ mediante:

$$b'_V = (id_{v^*} \otimes \theta_V)c_{V,V^*}b_V \qquad d'_V = d_V c_{V,V^*}(\theta_V \otimes id_{V^*}).$$

Como es de esperarse, estos morfismos serán representados por:



Proposición 7.4. *Los morfismo* b'_V *y* d'_V*, nos proporcionan una dualidad a derecha; es decir*

$$(d'_V \otimes id_V)(id_V \otimes b'_V) = id_V$$

y

$$(id_{V^*} \otimes d'_V)(b'_V \otimes id_{v^*}) = id_{V^*}.$$

Para una demostración vea en [Kas95].

8. Traza y dimensión

En los espacios vectoriales de dimensión finita las funciones evaluación y coevaluación, permiten definir el concepto de traza y de dimensión, los cuales se generalizarán a otras categorías del siguiente modo:

Proposición 8.1. *Sea $f : V \to V$ una función lineal. Entonces la traza de f es igual a la composición de las funciones*

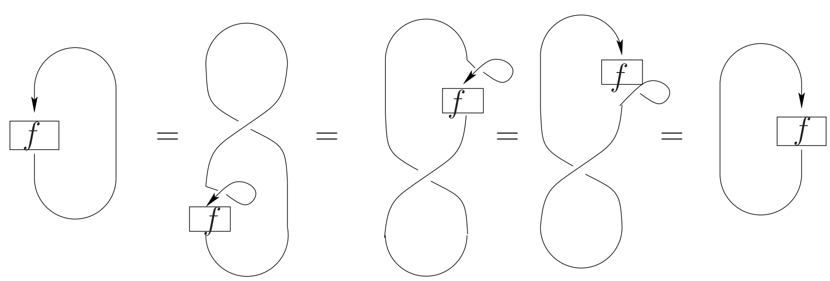
$$k \xrightarrow{\delta_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes id_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{\tau_{V,V^*}} V^* \otimes V \xrightarrow{ev_V} k$$

Generalizando el concepto de traza de la categoría de los espacios vectoriales, tenemos la siguiente definición.

Definición 8.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría de cintas con unidad e. Para todo objeto V de $\mathcal{C}$ y todo endomorfismo f de $\mathcal{C}$, denotamos por $tr_q(f)$ la traza cuántica de f, como al elemento, $tr_q(f) = d'_V(f \otimes id_{V^*})b_V = d_V c_{V,V^*}(\theta_V f \otimes id_{V^*})b_V \in End(e)$, donde $End(e)$, es el conjunto de los endomorfismos del elemento unidad e de $\mathcal{R}$. El conjunto $End(e)$ es un monoide. La traza cuántica la podemos ver también como:*

$$I \xrightarrow{b_V} V \otimes V^* \xrightarrow{\theta_V f \otimes id_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{c_{V,V^*}} V^* \otimes V \xrightarrow{d_V} I$$

Que es análogo a la ecuación de la proposición (8.1). Usando cálculo gráfico podemos representar la traza cuántica como:



La dimensión de un objeto se puede definir usando la traza cuántica así: sea $\mathcal{C}$ una categoría de cintas. Para todo objeto V de $\mathcal{C}$ la dimensión cuántica que denotamos como $dim_q(V)$ como el elemento $dim_q(V) = tr_q(id_V) = d'_V b_V$, del monoide $End(e)$.

Esta definición y la anterior coinciden con las definiciones usuales de traza y de dimensión, en la categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita, como era de esperarse.

9. Invariantes de Reshetikhin y Turaev

Todo lo anteriormente expuesto en este trabajo nos permite trasladar funtorialmente es decir via un funtor $F : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ morfismos f de una categoría de cinta $\mathcal{R}$ a morfismos $F(f)$ en la categoría de los entrelazados enmarcados orientados $\mathcal{M}$.

Una pregunta natural es, si los conjuntos de morfismos (en una categoría de cinta $\mathcal{R}$) correspondientes a entrelazados isotópicos (de la categoría $\mathcal{M}$) son iguales. Este problema fue resuelto por Reshetikhin y Turaev en [RT90], también puede verse en,[Tur94].

Para establecer los resultados de Reshetikhin Turaev se necesitan las siguientes consideraciones. Sea $\mathcal{C}$ una categoría de cintas con unidad e, fijemos objetos $V_1, \ldots, V_n$ en $\mathcal{C}$ y consideremos todas las posibles expresiones de la forma

$$X = V_1 \otimes ((V_3^{**} \otimes (V_1 \otimes V_3^{*}) \otimes V_4) \otimes ((V_2^{***} \otimes I) \otimes^{*} V_2) \otimes \cdots) \tag{15}$$

donde tomamos el producto tensorial de $V_1, \ldots, V_n$, un numero arbitrario de veces, también se permiten repeticiones.

A cada expresión X se le asignara una sucesión $F(X)$ de flechas con nombres propios, por la siguiente regla: al objeto ${}^{*\cdots*}V^{*\cdots*}$ se le asigna $\uparrow V$ si el total de numero de estrellas es impar, y $\downarrow V$ si este es par. Todos los I son ignorados. Por ejemplo para el elemento (15) le asignamos

$$\downarrow V_1 \downarrow V_3 \downarrow V_1 \uparrow V_3 \downarrow V_4 \uparrow V_2 \uparrow V_2$$

Para dos expresiones X_1 y X_2 considere todos los morfismos $\varphi : X_1 \to X_2$ que se pueden obtener como composición de los morfismos elementales $\alpha^{\pm 1}, l^{\pm 1}, r^{\pm 1}$ y $c^{\pm 1}, b, d, b', d', \theta$ (para cada uno de los cuales se tiene un entrelazado enmarcado ya asignado) con un numero finito de otros morfismos de $\mathcal{C}$. A cada composición de morfismos $\varphi : X_1 \to X_2$ le asignaremos un entrelazado enmarcado $G = F(\varphi) \in \mathcal{M}$ así: tanto la base inferior y superior de G son sucesiones de signos '$+_{V_i}$' o '$-_{V_i}$' $i = 1, \ldots, n$, es decir, signos más o menos etiquetados por los V_i, estos signos están dados por la sucesión de flechas asignadas anteriormente (Vea definición (1.3)). Los morfismos $f : V_i \to V_j$ corresponden a cintas planas, etiquetadas (cada etiqueta la consideraremos un color) con la letra f, cuyas bases están dadas como en el caso anterior. Como la categoría $\mathcal{R}$ la podemos considerar tensorial estricta, es natural asignar a los morfismos α, l, r el entrelazado enmarcado vació, y aplicando las reglas del cálculo gráfico desarrollado se puede enunciar el siguiente resultado, que es la relación más importante que estableceremos en este capítulo y que es debida a Turaev y Reshetikhin.

Teorema 9.1. *(Reshetikhin-Turaev [RT90]). Los morfismos φ (definidos arriba) dependen únicamente de la clase de isotopía del entrelazado enmarcado $F(\varphi)$, es decir, si $F(\varphi_1)$ y $F(\varphi_2)$ son isotópicos como entrelazados enmarcados en $\mathcal{M}$ entonces $\varphi_1 = \varphi_2$.*

El Teorema anterior es usado en su forma contrarecíproca, para generar invariantes de enlaces, es decir, si los morfismos de la categoría de cintas, asociados a ciertos entrelazados, son distintos, entonces los entrelazados no son equivalentemente isotópicos. Estos invariantes son llamados los invariantes de Reshetikhin-Turaev. Algunos ejemplos de categorías de cintas, con las que se generan invariantes de este tipo son: la categoría de representaciones finitas de los grupos cuánticos, los invariantes para este caso son funciones racionales, en cierta indeterminada. La categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo k también es una categoría tensorial, los invariantes son elementos del cuerpo k.

Del Teorema anterior se desprende un Corolario que nos indica explícitamente como encontrar invariantes de nudos de una categoría de cintas.

Corolario 9.2. *Sea $\mathcal{R}$ una categoría de cintas y V un objeto de $\mathcal{R}$. Entonces existe un único funtor tensorial estricto F_V de la categoría de los entrelazados enmarcados $\mathcal{M}$ a la categoría $\mathcal{R}$ que preserva el elemento trenza, la dualidad izquierda y el twist, tal que $F(+) = V$, $F_{(-)} = V^*$.*

Este Teorema produce invariantes isotópicos de enlaces enmarcados con valores en el conjunto de endomorfismos de la unidad $F_V(\emptyset)$ de la categoría $\mathcal{R}$, dado que los enlaces enmarcados son endomorfismos de la unidad (la unidad de $\mathcal{M}$ es $\emptyset$) en la categoría $\mathcal{M}$. El invariante puede calcularse usando el siguiente algoritmo: Tome un diagrama plano D del enlace enmarcado L, D es obtenido por la composición y el producto tensorial de $\downarrow\uparrow, X_+, \cup, \cap$ y el twist. Para obtener $F_V(L)$ se reemplaza (de acuerdo con el diagrama D de L) $\downarrow\uparrow, X_+, \cup, \cap$ y el twist, por $id_V, id_{V^*}, C_{V,V}, b_V, d_V$ y θ, respectivamente.

La categoría de los entrelazados orientados $\mathcal{T}$, también es una categoría de cintas. La diferencia entre $\mathcal{T}$ y la categoría de los entrelazados enmarcados $\mathcal{M}$ es que $\theta_{(\pm)} \in Hom(\mathcal{T})$ corresponde a $id_{(\pm)}$ en $\mathcal{T}$. El twist en la categoría $\mathcal{T}$ en general puede obtenerse usando la definición (7.2). Podemos obtener un Corolario como el anterior para $\mathcal{T}$ agregando la hipótesis $\theta_V = id_V$ a la categoría $\mathcal{R}$.

Bibliografía

[Arb75] Michael A. Arbib. *Arrows Structures and Functors*. 1975.

[BJ01] Bojko Bakalov and Alexander Kirillov Jr. *Lectures on Tensor Categories and Functors*, volume 21. University Lectures series, 2001.

[BZ85] G. Burde and H. Zieschang. *Knots*. W. de Gruyter, Berlin, 1985.

[Dri85] V.G. Drinfeld. Hopf algebras and yang-baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1985.

[Dri87] V.G. Drinfeld. Quantum groups. *In Proc. Int Cong. Math. (Berkeley, 1986)*, 1987.

[Gra03] Matías Graña. Nudos e invariantes cuánticos. *Notas de un curso en Vaquerias*, 2003.

[HY85] Millett Freyd Lickorish Hoste, Ocneanu and Yetter. A new polynomial invariant of knot and links. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1985.

[Jon85] V.F.R. Jones. A polinomial invariant for links via von neumman algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1985.

[JS91] A. Joyal and R. Street. The geometry of tensor calculus, 1. *Adh. Math.*, 1991.

[JS93] A Joyal and R Street. Braid tensor categories. *Adh. Math.*, 102:20–78, 1993.

[Kas95] Christian Kassel. *Quantum groups*, volume 155. Graduate Text in Mathematics, 1995.

[Kau87] L. H. Kauffman. *On knot*. Princeton University Press, 1987.

[KR81] P.P. Kulish and N. Yu. Reshetikhin. Quantum linear problem for the sine-gordon equation and higher representations. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov*, 1981.

[KR90] A.N. Kiriliov and N. Yu. Rshetikhin. q-wely group and a multiplicative formula for universal r-matrices. *Comm. Math. Phys,*, 1990.

[KR93] L. H. Kauffman and D. E. Radford. A necessary and sufficient condition for a finite dimensional drinfeld double to be a ribbon hopf algebra. *J. Algebra,*, 1993.

[Kup91] Greg Kuperberg. Involutory hopf algebras and 3-manifold invariants. *International Journal of Mathematics,*, 1991.

[Lic93] W. B. Lickorish. *Knot Theory*. The Mahematical Association of America, 1993.

[Lic97] W. B. Lickorish. *An Introduction to knot theory*. Springer,, 1997.

[Lus93] G Lusztig. *Introduction to quantum groups*. 1993.

[Mac98] MacLane. *categories for the working mathematician (segunda ediciòn)*, volume 5. Graduate Text in Mathematics, 1998.

[Man04] Vassily Manturov. *Knot Theory*. Chapman and Hall/CRC,, 2004.

[Mar36] A. Markoff. Uber die freie aquivalenz der geschlossenen zopfe. *Recueil Mathématique, Mat.*, 1936.

[PT87] J Przytycki and P Traczyk. Conway algebras and eskein equivalence of links. *Proc. Amer. Soc.*, 1987.

[RT90] Reshetikhin and Turaev. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 127:1–26, 1990.

[Swe66] Moss E. Sweedler. *Hopf Algebras.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,, 1966.

[Taf71] E. J. Taft. The order of the antipode of finite dimensional hopf algebras. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 1971.

[Tur88] V. G. Turaev. The yang baxter equation and invariant of link. *Inventiones mathematicae,*, 1988.

[Tur89] V. Turaev. Operator invariants of tangles and r-matrices. *Izvestia Ac. Sci. USSR*, 1989.

[Tur94] Turaev. *quantum invariant of knots and 3-manifolds*. 1994.

[Yet88] D.Ñ. Yetter. Markov algebras in braids. *AMS Contemp. Math.*, 1988.

[Yet90] David Yetter. Quantum groups and representations of monoidal categories. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1990.