Espacios métricos en conjuntos finitos

Octavio Montoya
Profesor Universidad del Tolima
Ibagué, Colombia
octaviomontoya1963@yahoo.es

Resumen

En este documento se presentan algunos conceptos y resultados estudiados en los espacios métricos desde el punto de vista de los conjuntos finitos.

1. Introducción

El propósito de este documento es la de estudiar desde el punto de vista de los conjuntos finitos, los conceptos y resultados más importantes en el contexto de los espacios métricos. Conceptos como bolas abiertas y cerradas, puntos de acumulación, puntos frontera, sucesiones de cauchy, espacios métricos completos y otros son analizados en este documento.

Queremos ante todo que el lector se familiarice con los conceptos antes mencionados de la forma más didáctica posible a través de los conjuntos finitos.

2. Ejemplos de espacios métricos

Definición 1. Sea E conjunto no vacío, una métrica en E es una aplicación

$$d : E \times E \to R$$

tal que

d1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

d2) Para x, y, $z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (*Desigualdad Triagular.*)

Al par (E, d) se le llama Espacio Métrico.

$$d(x, y) \leq d(y, x) \tag{1}$$

En esta sección daremos algunos ejemplos elementales de espacios métricos.

Ejemplo 1. Sea K número real positivo. Todo conjunto E no vacío con la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = y \\ k, & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

Prueba. Ejercicio para el lector.

Observación 1. El anterior ejemplo, nos indica que todo conjunto no vacío es un espacio métrico, dotado con la métrica anterior; es decir los conjuntos

{a,e,i,u,o}, {&,#,@, $\triangle$,∞},$\{f : f$ es función$\}$, $\{M : M$ es matriz$\}$,etc., son espacios métricos.

Nota: Cuando $k = 1$ esta métrica es regularmente llamada métrica discreta.

3. Conceptos importantes en espacios métricos

Definición 2. Sea (E, d) un epacio métrico $\quad x_0 \in E, \quad r > 0$; definimos:

a) Bola abierta (cerrada) de centro x_0 y radio r al conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) < r\}(\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq r\})$$

b) Dada $A \subseteq E$, $x \in E$, x se dice punto interior de A si existe $r > 0$ tal que:

$$B(x_0, r) \subset A$$

El conjunto de los puntos interiores de A los notaremos por A^o

c) $A \subset E$ se dice abierto en E si $A^o = A$

d) $x \in A \subset E$ se llama punto de acumulación ó punto límite de A si para cada $r > 0$

$$B(x, r) - \{x\} \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto de los puntos de acumulación los notaremos como $\acute{A}$

e) $A \subset E$ se llama cerrado si $\acute{A} \subset A$.

f) Sea $A \subset E$. La adherencia de A la notaremos como $\overline{A}$ y la definimos como:

$$\overline{A} = A \cup \acute{A}$$

g) Se dice que el conjunto $A \subset E$ es acotado, si existe una bola abierta(cerrada) $B(x,r)(\overline{B}(x,r))$, tal que

$$A \subset B(x,r)(A \subset \overline{B}(x,r))$$

h) La frontera de $A \subset E$ la notaremos por $\partial(A)$ y la definimos como

$$\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$$

4. Ejemplos con conjuntos finitos

Ejemplo 2. Sea $E = \{a,b,c,d,e\}$, y d métrica discreta. Es evidente que (E,d) un epacio métrico. Sea $A = \{a,b,c\}$, mostremos diferentes tipos de bolas en (E,d)

a) La bola abierta de centro a y radio $\frac{1}{2}$ es:

$$B(a,\frac{1}{2}) = \{x \in E \mid d(x,a) < \frac{1}{2}\} = \{a\}$$

Además podemos calcular las siguientes bolas:

$$\overline{B}(a,\frac{1}{2}) = \{x \in E : d(x,a) \leq \frac{1}{2}\} = \{a\}$$

$$B(b,2) = \{x \in E : d(x,a) < 2\} = E$$

$$B(c,3) = \{x \in E : d(x,a) < 3\} = E$$

Podemos notar las siguientes curiosidades:

i) Las bolas $B(a,\frac{1}{2})$ y $\overline{B}(a,\frac{1}{2})$ son abiertas y cerradas respectivamente y a la vez son iguales.

ii) Las bolas $B(b,2)$ y $B(c,3)$ tienen centros diferentes y radios diferentes, sin embargo las bolas son iguales.

iii) Todo el espacio E es la bola $B(b, 2)$

b) Los puntos interiores de A son :

$$\mathring{A} = \{a, b, c\}$$

Luego A es un conjunto abierto de E.

c) $a \notin A'$; ya que existe $r = 1$ tal que,

$$B(a, 1) - \{a\} \cap A = \emptyset$$

Análogamente se puede mostrar que b, c, d, e no son puntos de acumulación de A.

Luego

$$A' = \emptyset$$

d) A es cerrado. Esto es evidente ya que

$$\emptyset \subset A$$

e) La adherencia de A es $\overline{A} = A \cup A' = \{a, b, c\}$

De b) y d) tenemos que A es abierto y cerrado.

Nota. Las curiosidades en este ejemplo, no se pueden generalizar a otros espacios métricos. En general todo espacio métrico puede tener algunas peculiaridades que lo distinguen de otros espacios métricos.

f) La frontera de A es $\partial(A) = \emptyset$ ya que:

$$\overline{A} = A \cup A' = \{a, b, c\} \qquad \text{y} \qquad \overline{A^c} = A^c \cup (A^c)' = \{d, e\}$$

de donde $\partial(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c} = \emptyset$

Ejemplo 3. Sea $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $d(x, y) = |x - y|$ métrica en E.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$.

a) $B(1, 1) = \{x \in E : d(x, 1) < 1\} = \{1\}$

b) $B(2, 5) = \{x \in E : d(x, 2) < 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $\mathring{A} = A$. Esto indica que A es abierto.

d) $A' = \emptyset$. Esto indica que A es cerrado

e) $\overline{B} = B$.

Observación. El conjunto A es abierto en (E, d) , pero no es abierto en (R, d) (Los números reales con la métrica valor absoluto)

4.1. Sucesiones en espacios métricos

En esta sección definiremos los conceptos de convergencia de sucesiones en espacios métricos, sucesiones de cauchy y espacios métricos completos y continuaremos con la presentación de estos en conjuntos finitos.

Definición 3. Sea (E, d) un espacio métrico y x_n una sucesión de elementos en E.

1) La sucesión x_n se dice que converge a $x \in E$, cuando

$$d(x_n, x) \to 0 \qquad \text{siempre que} \qquad n \to +\infty$$

Esto significa que dado un número cualquiera $\varepsilon > 0$, existe N número natural tal que

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad n \geq N$$

Se puede verificar que x es único.

El punto x se llama límite de la sucesión x_n.

2) Una sucesión x_n es de cauchy, si

$$d(x_n, x_m) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad m, n \to +\infty$$

Esto significa que dado un número cualquiera $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad m, n \geq N$$

Se puede notar fácilmente, que toda sucesión convergente es de cauchy y que toda sucesión de cauchy es acotada.

Definición 4. Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de cauchy en (E, d) es convergente en (E, d).

En caso contrario se dice que (E, d) es incompleto.

Algunos ejemplos de espacios métricos completos finitos son:

Ejemplo 4. ({*}, d), donde $d(*, *) = 0$, es completo.

En efecto, la única sucesión de cauchy en este conjunto es $x_n = *$. Esta sucesión evidentemente es convergente.

Ejemplo 5. ({*, #, $}, d), donde d, es la métrica discreta, es completo.

Ejemplo 6. ({1, 2, 3, 4, 5}, d), donde $d(x, y) = |x - y|$, es la métrica, es completo.

Observación.

a) En los ejemplos anteriores todas las sucesiones de cauchy posibles son convergentes, ya que necesariamente a partir de un termino n-ésimo es constante, lo cual evidencia la convergencia de la sucesión.

b) Todo conjunto no vacío dotado con la métrica discreta es completo.

c) Todo subespacio finito de un espacio métrico, es completo.

d) Sea $\{x_n\} \subset (E, d)$ y $x_n \to x$. El conjunto $\{x, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots\}$ es completo.

4.2. Continuidad

En el lenguaje coloquial la palabra ***"continuo"*** es sinónimo de no interrupción ó no cambios abruptos. En matemáticas esta idea puede distorsionarse un poco, sobre todo en contextos tan amplios como la topología.

En esta sección presentaremos algunos ejemplos de continuidad utilizando conjuntos finitos.

Definición 5. Sea (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos (diferentes ó iguales), $A \subset E_1, \quad A \neq \emptyset, \quad a \in A \quad$ y $\quad f : A \to E_2$.

f es continua en a si para cada entorno T en E_1 de $f(a)$ le corresponde un entorno S en E_1 de a tal que $f(S \cap A) \subseteq T$; es decir, si para cada $x \in S \cap A$ implica que $f(x) \in T$.

Ejemplo 7. Sea $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, con métrica $d(x, y) = |x - y|$ y $E_2 = \{*, \&, @, \aleph, \oplus, ç\}$, con métrica discreta, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \to E_2$, definida como:

$f(1) = *, \quad f(2) = \&, \quad f(3) = @, \quad f(4) = \aleph.$

Esta función así definida es continua en todo A .

En efecto, para cada entorno T de $f(1)$ existe el entorno $S = (1)$ tal que $F(S \cap A) = f(\{1\}) = \{f(1)\} \subseteq T$

Lo anterior indica que f es continua en 1. El razonamiento es análogo para $2, 3, 4$.

Por tanto f es continua en todo A.

Ejemplo 8. Sea (R, d), d métrica usual, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

La función $f : A \to R$ definida como $f(x) = 0, \quad \forall x \in A$ es continua en todo A.

La verificación es análoga al ejemplo anterior.

Definición 6. Sea $A \subset (E, d), \quad a \in A$ se llama punto aislado de A si existe un entorno S de a tal que $S - \{a\} \cap A = \emptyset$.

En el ejemplo anterior se puede notar que todos los puntos de A son aislados lo cual se constituye en una ventaja para la continuidad, como se puede observar en el siguiente teorema.

Teorema 1. Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos (diferentes ó iguales), $A \subset E_1, \quad A \neq \emptyset, \quad a \in A \quad$ y $\quad f : A \to E_2$.

Si a es punto aislado de A entonces f es continua en a.

Demostración. Si a es punto aislado de A entonces existe un entorno S de a tal que $S - \{a\} \cap A = \emptyset$, lo cual indica que $S \cap A = \{a\}$.

Sea T un entorno cualquiera de $f(a)$; y le hacemos corresponder el entorno S de a anterior.

Tenemos que : $f(S \cap A) = \{f(a)\} \subseteq T$.

Por tanto f es continua en a.

Bibliografía

[1] Apostol, Tom. *Mathematical Analysis*. Addinson-Wesley. P. C., 1957.

[2] Muñoz M. J. *Introducción a la Topología*, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia., 1983.

[3] Rudin, W. *Principles of Mathematical Análisis*. Mc. Graw-Hill, 1964.

[4] Rubiano N. Gustavo., *Topología General*, Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia., 1997.