Lógicas de Łukasiewicz y sus álgebras

Arnold Oostra

Profesor Universidad del Tolima

Becario 2003–2004 de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia

Ibagué, Colombia

oostra@telecom.com.co

Resumen

Se estudian las MV-álgebras como semántica algebraica de la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores.

1. Acerca de las MV-álgebras

En la lógica clásica las proposiciones pueden tomar solo dos valores de verdad, *verdadero* y *falso*. Como bien lo indica Charles S. Peirce [13, vol4§250]:

> Were nothing at all supposed, mathematics would have no ground at all to go upon. Were the hypothesis merely that there was nothing but one unit, there would not be a possibility of a question, since only one answer would be possible. Consequently, the simplest possible hypothesis is that there are two objects, which we may denote by **v** and **f**.

El alcance y los resultados de la lógica clásica son gigantescos. Sin embargo, hay muchas situaciones —"hipótesis"— más complejas para cuya discusión se requieren otros valores de verdad. Un ejempo cotidiano lo constituyen los gustos: 'me gusta/no me gusta/me es indiferente' o bien 'me gusta mucho/me gusta/no me gusta mucho/no me gusta nada'. Un ejemplo de la matemática está dado por los subconjuntos de cualquier espacio topológico, en particular del plano real: 'abiertos/cerrados/ni abiertos ni cerrados'.

A lo largo del siglo XX la matemática ha propuesto muchas lógicas sin la dualidad 'verdadero/falso'. Una de ellas es la lógica *intuicionista* de Brouwer, capturada de manera parcial por el llamado cálculo proposicional intuicionista cuyos modelos algebraicos son las álgebras de Heyting [12]. Otra propuesta muy famosa consiste en sustituir el conjunto $\{0, 1\}$ por el segmento real $[0, 1]$, se trata de la lógica *borrosa* o *difusa* de Zadeh [7]. Por su parte uno de los miembros de la escuela polaca de lógica, Jan Łukasiewicz, introdujo diversas lógicas *multivaluadas* o *polivalentes*.

En este trabajo se presentarán algunas de las lógicas multivaluadas de Łukasiewicz y se estudiarán sus modelos algebraicos.

1.1. Lógicas multivaluadas a partir de tablas de verdad

Como es bien conocido, una de las maneras de introducir el cálculo proposicional clásico es definiendo los conectivos mediante 'tablas de verdad'. Asimismo, una de las vías para aproximar las lógicas multivaluadas es tratando de elaborar tablas de verdad para sus conectivos, para lo cual es claro que deben suponerse finitos valores de verdad. El primer conectivo que se estudia, por sencillo e importante, es la negación.

La negación intuicionista puede apreciarse en cualquier álgebra de Heyting, en particular en la de tres elementos —denotados 0, $\frac{1}{2}$, 1—. La tabla de verdad es la siguiente.

x	$\neg_H x$
1	0
$\frac{1}{2}$	0
0	1

Para la negación en $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ las asignaciones $0 \mapsto 1$ y $1 \mapsto 0$ no se discuten, el meollo del asunto está en el valor asignado a $\frac{1}{2}$. Si el conjunto se mira como un álgebra de Heyting resulta $\frac{1}{2} \mapsto 0$ con lo cual *la doble negación no es la función idéntica*. La propuesta de Łukasiewicz, que puede justificarse en ejemplos como los citados arriba, consiste en escoger $\frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{2}$, obteniendo la tabla siguiente.

x	$\neg x$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

Si hay cuatro valores de verdad —denotados 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1— la asignación escogida es $\frac{1}{3} \mapsto \frac{2}{3}$ y $\frac{2}{3} \mapsto \frac{1}{3}$. En general, si los valores de verdad se distribuyen de manera uniforme sobre el segmento real $[0,1]$ entonces la negación está dada por

$$\neg x = 1 - x.$$

¿Cómo definir ahora los demás conectivos 'usuales' como la conjunción, la disyunción y la implicación? Por ejemplo para la disyunción, una primera posibilidad es considerar el orden natural. Una alternativa consiste en emplear la misma operación usada arriba para expresar la negación, por supuesto truncándola en 1. Siguiendo esta idea, se define el conectivo $\oplus$ como

$$x \oplus y = min\{1, x + y\}.$$

Ahora se definen la conjunción y la implicación en términos de $\neg$ y $\oplus$ siguiendo identidades del cálculo proposicional clásico, a saber

$$\begin{aligned} x \odot y &= \neg(\neg x \oplus \neg y), \\ x \to y &= \neg x \oplus y = min\{1, 1 - x + y\}. \end{aligned}$$

Obsérvese que estas cuatro operaciones tienen sentido en cualquier subconjunto del segmento real $[0,1]$ que sea cerrado para $x \mapsto 1 - x$ y $x, y \mapsto min\{1, x+y\}$. Ejemplos de tales subconjuntos son $\{0,1\}$, $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, en general $\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ y, por supuesto, $[0,1]$.
De inmediato pueden derivarse algunas consecuencias de las definiciones, por ejemplo

$$1 \to x = x \qquad\qquad 0 \to x = 1$$

$$x \to 1 = 1 \qquad\qquad x \to 0 = \neg x$$

$$x \to x = 1$$

A partir de estas identidades es fácil llenar la tabla de verdad para la implicación en $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, es la tabla derecha de las que siguen — la izquierda es la implicación en este conjunto como álgebra de Heyting. Se nota que la única diferencia entre estas tablas es el valor de $\frac{1}{2} \to 0 = \neg\frac{1}{2}$.

x	y	$x \to_H y$
1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	0
0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1

x	y	$x \to y$
1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1

Las siguientes son otras propiedades que también se coligen de las definiciones de manera inmediata.

- $\neg\neg x = x$, la doble negación es la función idéntica
- $x \oplus y = y \oplus x$, la operación binaria es conmutativa
- $x \oplus 0 = x$, la operación binaria tiene elemento neutro
- $x \oplus 1 = 1$, la operación binaria tiene elemento absorbente

Aunque no es difícil, resulta un poco más laborioso probar la igualdad

$$x \oplus (y \oplus z) = min\{1, x + (y + z)\}$$

que entraña el carácter asociativo de la operación binaria y la expresión

$$max\{x, y\} = (x \to y) \to y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y$$

de donde se sigue, entre otras, la identidad $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

1.2. MV-álgebras

La discusión de arriba viene encaminada a la convención siguiente.

Definición. Una *MV-álgebra* es una estructura $\mathbf{A} = \langle A; \oplus, \neg, 0\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, $\oplus$ es una operación binaria en A, $\neg$ una operación unaria y 0 una constante, que además satisfacen los axiomas siguientes.

1. $x \oplus (y \oplus z) \approx (x \oplus y) \oplus z$
2. $x \oplus y \approx y \oplus x$
3. $x \oplus 0 \approx x$
4. $\neg\neg x \approx x$
5. $x \oplus \neg 0 \approx \neg 0$
6. $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$

Los primeros tres axiomas indican que toda MV-álgebra es un monoide conmutativo, de hecho una MV-álgebra podría definirse como un monoide conmutativo enriquecido con cierta operación unaria.

Ejemplos.
Como se indicó en la sección anterior, todo subconjunto del segmento real $[0, 1]$ cerrado para las funciones $x \mapsto 1 - x$ y $x, y \mapsto min\{1, x + y\}$ y que contiene a 0 es una MV-álgebra con las operaciones $x \oplus y = min\{1, x + y\}$, $\neg x = 1 - x$ y la constante 0.
Toda álgebra booleana es una MV-álgebra definiendo $x \oplus y = x \vee y$, $\neg x = x'$, $0 = \perp$. Respecto a la sexta condición, en este caso particular se tiene $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx x \oplus y$.

En cualquier MV-álgebra se definen las operaciones siguientes.

$$1 = \neg 0$$

$$x \odot y = \neg(\neg x \oplus \neg y)$$

$$x \to y = \neg x \oplus y$$

$$x \vee y = \neg(\neg x \oplus y) \oplus y$$

$$x \wedge y = \neg(\neg x \odot y) \odot y$$

Con esta simbología, pueden verificarse entre otras las propiedades siguientes.

- $1 \to x \approx x, \quad 0 \to x \approx 1$
- $x \to 1 \approx 1, \quad x \to 0 \approx \neg x$
- $x \oplus \neg x \approx x \to x \approx 1, \quad x \odot \neg x \approx 0$
- $\neg(x \wedge y) \approx \neg x \vee \neg y, \quad \neg(x \vee y) \approx \neg x \wedge \neg y$
- $x \to (y \to z) \approx y \to (x \to z)$
- $x \to (y \to x) \approx 1$
- $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx 1$
- $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$
- $\neg y \to \neg x \approx x \to y$

Pregunta. *¿Toda MV-álgebra es un álgebra implicativa*[1]*? Parece que no...*

[1]Un *álgebra implicativa* es una estructura $\mathbf{A} = \langle A; \to, 1\rangle$ que satisface para cada $x, y, z \in A$:

$$x \to (y \to x) \approx 1$$
$$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \approx 1$$
$$\text{si } x \to y \approx 1 \text{ y } y \to x \approx 1 \text{ entonces } x \approx y$$
$$x \to 1 \approx 1$$

Toda álgebra implicativa es un conjunto ordenado por la relación $x \leq y$ si y sólo si $x \to y = 1$, y 1 es el máximo para este orden.

Un conjunto ordenado *lineal* con máximo 1 es un álgebra implicativa definiendo

$$x \to y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y; \\ y & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Todo retículo con exponenciales es un álgebra implicativa; en particular, toda álgebra de Heyting (= retículo con exponenciales y mínimo) es un álgebra implicativa.

De todas formas, al igual que en las álgebras implicativas, en cualquier MV-álgebra la relación $\leq$ definida como

$$x \leq y \quad \text{si y sólo si} \quad x \to y = 1$$

es una relación de orden que, además, satisface las propiedades siguientes.

- $0 \leq x \leq 1$
- $x \leq y$ implica $x \oplus z \leq y \oplus z$, $x \odot z \leq y \odot z$
- $x \leq y$ si y sólo si $\neg y \leq \neg x$
- $x \vee y = sup\{x, y\}, \quad x \wedge y = inf\{x, y\}$
- $w \leq x \to y$ si y sólo si $w \odot x \leq y$
- $x \odot (y \vee z) \approx (x \odot y) \vee (x \odot z), \quad x \oplus (y \wedge z) \approx (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$
- $x \to (y \wedge z) \approx (x \to y) \wedge (x \to z), \quad (x \vee y) \to z \approx (x \to z) \wedge (y \to z)$

1.3. MV-álgebras y grupos ordenados

Un *grupo abeliano ordenado* es una estructura $\mathbf{G} = \langle G; +, -, \leq, 0\rangle$ tal que $\langle G; +, -, 0\rangle$ es un grupo abeliano, $\langle G; \leq\rangle$ es un conjunto ordenado y además es válida la siguiente relación de compatibilidad.

$$x \leq y \quad \text{implica} \quad x + z \leq y + z$$

Un grupo abeliano ordenado es *lineal* si la relación de orden es lineal o total.

Dado un grupo abeliano ordenado $\mathbf{G}$ sea u un elemento con $0 \leq u$. En el segmento $[0, u] = \{x \in G \mid 0 \leq x \leq u\}$ se definen las operaciones $\neg$, $\oplus$ como sigue.

$$\neg x = u - x, \qquad x \oplus y = min\{u, x + y\}$$

Se verifica de inmediato que estas operaciones satisfacen las condiciones (2), (3), (4) y (5) de la definición de MV-álgebra. Respecto a las condiciones restantes, asumiendo que el orden es lineal un cálculo sencillo indica

$$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \begin{cases} y & \text{si } x \leq y \\ x & \text{si } x \geq y \end{cases}$$

luego $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = max\{x, y\}$ y se satisface la condición (6). De igual manera, cuando el orden es lineal otro cálculo conduce a

$$x \oplus (y \oplus z) = min\{u, x + (y + z)\}$$

de donde se desprende la propiedad asociativa. En conclusión:

Afirmación. *Sea* $\mathbf{G}$ *un grupo abeliano ordenado lineal. Para cada elemento* $u \geq 0$ *el segmento* $[0, u]$ *es una MV-álgebra con las operaciones indicadas arriba.*

Un *l-grupo abeliano* es una estructura algebraica $\mathbf{G} = \langle G; +, -, \vee, \wedge, 0\rangle$ tal que $\langle G; +, -, 0\rangle$ es un grupo abeliano, $\langle G; \vee, \wedge\rangle$ es un *retículo* y además es válida la siguiente relación de compatibilidad.

$$(x \vee y) + z \approx (x + z) \vee (y + z)$$

Se nota que todo l-grupo abeliano, respecto al orden del retículo, es un grupo abeliano ordenado. También se puede verificar que la relación de compatibilidad es equivalente a

$$(x \wedge y) + z \approx (x + z) \wedge (y + z)$$

y que todo l-grupo abeliano valida las ecuaciones de De Morgan

$$-(x \vee y) \approx -x \wedge -y, \qquad -(x \wedge y) \approx -x \vee -y.$$

Dado un l-grupo abeliano $\mathbf{G}$ sea u un elemento con $0 \leq u$. En el segmento $[0, u]$ se definen las operaciones $\neg$, $\oplus$ como sigue.

$$\neg x = u - x, \qquad x \oplus y = u \wedge (x + y)$$

De nuevo, se verifica sin dificultad que estas operaciones satisfacen las condiciones (2), (3), (4) y (5) de la definición de MV-álgebra. Respecto a la propiedad asociativa,

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &\approx u \wedge \big(x + (u \wedge (y + z))\big) \\ &\approx u \wedge \big((x + u) \wedge (x + (y + z))\big) \\ &\approx \big(u \wedge (x + u)\big) \wedge (x + (y + z)) \\ &\approx u \wedge (x + (y + z)). \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que $0 \leq x$ luego $u \approx 0 + u \leq x + u$ de suerte que $u \wedge (x + u) \approx u$. De la misma manera $(x \oplus y) \oplus z \approx u \wedge ((x + y) + z)$ luego $x \oplus (y \oplus z) \approx (x \oplus y) \oplus z$. Por otro lado

$$\begin{aligned}
\neg(\neg x \oplus y) \oplus y &\approx u \wedge \big(u - (u \wedge (u - x + y)) + y\big) \\
&\approx u \wedge \big(u + ((-u) \vee (-u + x - y)) + y\big) \\
&\approx u \wedge \big((u - u + y) \vee (u - u + x - y + y)\big) \\
&\approx u \wedge (y \vee x) \\
&\approx y \vee x
\end{aligned}$$

puesto que $y \leq u$, $x \leq u$ luego también $y \vee x \leq u$. De la misma manera $\neg(\neg y \oplus x) \oplus x \approx x \vee y$ luego $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$.

Afirmación. *Sea* $\mathbf{G}$ *un* l*-grupo abeliano. Para cada elemento* $u \geq 0$ *el segmento* $[0, u]$ *es una MV-álgebra con las operaciones indicadas arriba.*

La importancia de este ejemplo reside en que tiene un carácter *universal*. En [6, p188] se prueba el hecho siguiente.

Teorema. *Dada una MV-álgebra* $\mathbf{A}$*, existe algún* l*-grupo abeliano* $\mathbf{G}$ *con un elemento* $u \geq 0$ *tales que* $\mathbf{A}$ *es isomorfo a la MV-álgebra* $[0, u]$ *precisada en la afirmación anterior.*

De hecho, esta correspondencia establece una *equivalencia categórica* entre la categoría de las MV-álgebras y cierta categoría de l-grupos abelianos. De esta manera, las MV-álgebras pueden verse como *grupos ordenados truncados*.

2. Lógicas algebrizables

Otra forma muy conocida de presentar el cálculo proposicional clásico es mediante reglas de inferencia o, con más rigor como se hace en [4], mediante axiomas y reglas. Sin duda, el primer gran problema que se encuentra en el estudio de la lógica clásica es establecer la equivalencia entre estos dos enfoques del mismo tema [8, 10].

Puesto que el álgebra $\{0, 1\}$ *genera* en una manera muy precisa la clase de todas las álgebras booleanas [3], las asignaciones de verdad que se hacen en este conjunto en realidad son valuaciones en todas las álgebras booleanas. Así, el problema adquiere el aspecto de una correspondencia entre lógicas a un lado y estructuras algebraicas al otro.

Esta correspondencia ha sido estudiada a fondo durante el siglo XX. Inicialmente por Tarski y Lindenbaum, luego por Blok y Pigozzi [1, 2] y recientemente por Font y Jansana [9]. Este documento se ubica en el contexto de las lógicas algebrizables de Blok y Pigozzi.

2.1. Lógicas

Una lógica proposicional presupone un conjunto de fórmulas construido a su vez con determinado vocabulario a partir de variables. Los símbolos empleados son de tres clases: un conjunto infinito enumerable de *variables* $p, q, \ldots$; los paréntesis; un conjunto τ denominado *vocabulario funcional* a cada uno de cuyos elementos, llamados *conectivos primitivos*, se asigna un entero no negativo denominado *aridad*. El conjunto Fm_τ de las *fórmulas* —en el contexto de la lógica de primer orden se llamarían *términos*— se construye de manera recurrente como sigue:

- Las variables son fórmulas
- Los elementos de τ con aridad 0, llamados *constantes*, son fórmulas
- Si $f \in \tau$ tiene aridad positiva n y $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son fórmulas entonces $f(\varphi_1)(\varphi_2)\ldots(\varphi_n)$ también es una fórmula

En realidad, en la última cláusula a veces se utiliza notación infija y casi siempre se omiten algunos paréntesis.

Dado un vocabulario funcional τ, un *sistema deductivo* o *lógica proposicional* $\mathcal{S}$ consiste en una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas individuales. Para un conjunto de fórmulas $\Gamma \subseteq Fm_\tau$ y una fórmula individual $\varphi \in Fm_\tau$ la relación, cuando existe, se denota

$$\Gamma \underset{\mathcal{S}}{\vdash} \varphi$$

aunque casi siempre $\mathcal{S}$ está claro en el contexto y entonces se escribe $\Gamma \vdash \varphi$. Un sistema deductivo $\vdash$ debe satisfacer además las condiciones siguientes.

1. Si $\varphi \in \Gamma$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$
2. Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\Delta \vdash \varphi$
3. Si $\Delta \vdash \gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Delta \vdash \varphi$
4. Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma' \vdash \varphi$ para algún subconjunto finito $\Gamma' \subseteq \Gamma$
   —la relación $\vdash$ es *finitaria*—
5. Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\overline{\sigma}(\Gamma) \vdash \overline{\sigma}(\varphi)$ para cada sustitución $\sigma : \tau \to Fm_\tau$ donde $\overline{\sigma}$ es su extensión natural a todo Fm_τ
   —la relación $\vdash$ es *estructural*—

Los *teoremas* de la lógica son las fórmulas deducidas a partir del conjunto vacío, esto es, α es teorema si $\varnothing \vdash \alpha$.

Una manera de construir sistemas deductivos es especificando *axiomas* y *reglas*. Se escoge un conjunto de fórmulas $\mathcal{A} \subseteq Fm_\tau$ —los axiomas— y un conjunto de parejas $\langle R, \rho \rangle$ con $R \subseteq Fm_\tau$, $\rho \in Fm_\tau$ —las reglas— y luego se especifica que $\Gamma \vdash \varphi$ si existe una sucesión finita de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n = \varphi$ tales que cada paso φ_i:

- pertenece a Γ, o
- es una sustitución de un axioma, o
- se obtiene de fórmulas anteriores de la lista por sustitución de alguna regla.

De hecho, no es difícil convencerse que es posible indicar axiomas y reglas para cualquier sistema deductivo.

Ejemplo. La *lógica implicativa positiva* se construye en el vocabulario $\tau = \{\to\}$ eligiendo los axiomas

1. $p \to (q \to p)$

2. $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

y la única regla $\langle \{p, p \to q\}, q \rangle$, comúnmente llamada *Modus Ponens*. Como ilustración se detalla una deducción posible del teorema $p \to p$.

1. $p \to ((q \to p) \to p)$	Ax 1
2. $(p \to ((q \to p) \to p)) \to ((p \to (q \to p)) \to (p \to p))$	Ax 2
3. $(p \to (q \to p)) \to (p \to p)$	MP/1,2
4. $p \to (q \to p)$	Ax 1
5. $p \to p$	MP/3,4

Tanto el *cálculo proposicional intuicionista* como el *cálculo proposicional clásico* pueden obtenerse añadiendo conectivos y axiomas a esta lógica [4, 12].

2.2. Lógicas y álgebras

En el cálculo proposicional clásico presentado mediante tablas de verdad, una fórmula φ se denomina una *tautología* si para cualquier asignación de valores de verdad de las variables que intervienen se obtiene siempre $\varphi = 1$. En realidad, esto sucede si y solo si para toda función v del conjunto de variables τ en cualquier álgebra booleana $\mathbf{B}$ se tiene $\overline{v}(\varphi) = \top$, siendo $\overline{v}$ la extensión natural de v a Fm_τ y $\top$ el elemento máximo de $\mathbf{B}$, lo cual se expresa $\vDash \varphi \approx 1$.

De igual manera, una fórmula φ es *consecuencia tautológica* de $\psi_1, \ldots, \psi_n$ si para cada valuación v en cualquier álgebra booleana tal que $\overline{v}(\psi_i) = \top$ $(1 \leq i \leq n)$ se tiene también $\overline{v}(\varphi) = \top$. Esta *relación de consecuencia* se expresa

$$\psi_1 \approx 1, \psi_2 \approx 1, \ldots, \psi_n \approx 1 \vDash \varphi \approx 1.$$

Las álgebras booleanas y en general las estructuras algebraicas se estudian mediante *ecuaciones*. La correspondencia entre las diferentes presentaciones del cálculo proposicional clásico se logra haciendo corresponder la fórmula φ y la ecuación $\varphi \approx 1$. Para una generalización entre lógicas proposicionales y estructuras algebraicas es preciso hacer corresponder, de alguna manera, fórmulas y ecuaciones. Para ello se emplean ciertas fórmulas estructurales: por un lado, se

escogen fórmulas δ, ϵ de aridad 1 y a la fórmula arbitraria φ se asigna la ecuación $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$ –en el caso del cálculo proposicional clásico, es $\delta(p) = p$ y $\epsilon(p) = 1$–; por otro lado, se escoge una fórmula Δ de aridad 2 y a la ecuación $x \approx y$ se asigna la fórmula $\Delta(x, y)$ —en el caso booleano, es $\Delta(x, y) = x \leftrightarrow y$—.

Por supuesto, se espera que la correspondencia entre fórmulas y ecuaciones sea biyectiva y que 'coincidan' las relaciones de deducción —lógica— y de consecuencia —algebraica—. Estas ideas justifican un poco la noción de lógica algebrizable, introducida por Blok y Pigozzi [1, p19–20] y presentada a continuación.

Definición. El sistema deductivo $\mathcal{S}$ es *algebrizable* por la clase de álgebras K, via un conjunto finito de ecuaciones definitorias $\delta \approx \epsilon = \{\, \delta_i(p) \approx \epsilon_i(p) \,\}_i$ y un conjunto finito de fórmulas de equivalencia $\Delta = \{\, p \,\Delta_j\, q \,\}_j$, si se satisfacen las condiciones siguientes.

1. $\{\, \varphi_k \,\}_{k=1}^n \underset{\mathcal{S}}{\vdash} \varphi$ si y solo si $\{\, \delta(\varphi_k) \approx \epsilon(\varphi_k) \,\}_{k=1}^n \underset{\mathsf{K}}{\models} \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$
2. $p \approx q \underset{\mathsf{K}}{\dashv\models} \delta(p \,\Delta\, q) \approx \epsilon(p \,\Delta\, q)$
3. $\{\, \varphi_k \approx \psi_k \,\}_{k=1}^n \underset{\mathsf{K}}{\models} \varphi \approx \psi$ si y solo si $\{\, \varphi_k \,\Delta\, \psi_k \,\}_{k=1}^n \underset{\mathcal{S}}{\vdash} \varphi \,\Delta\, \psi$
4. $p \underset{\mathcal{S}}{\dashv\vdash} \delta(p) \,\Delta\, \epsilon(p)$

Nótense las abreviaciones, por ejemplo a la derecha de la cláusula (2) se trata de $|\delta \approx \epsilon| \times |\Delta|$ ecuaciones.

En el corolario 2.9 (p20) de [1] se establece que las cláusulas (1) y (2) —juntas— son equivalentes a (3) y (4) —juntas—, luego para efectos de definición o de verificación en casos específicos puede trabajarse con solo un par de condiciones. Por otro lado, del teorema 2.15 (p23) de [1] se siguen condiciones suficientes bajo las cuales la clase de álgebras K así como los sistemas $\delta \approx \epsilon$, Δ están determinados de manera única por $\mathcal{S}$.

Ejemplos.

La lógica implicativa positiva —con la constante 1 añadida— es algebrizable por la clase de las álgebras implicativas via la ecuación definitoria $\delta \approx \epsilon = \{p \approx 1\}$ y las fórmulas de equivalencia $\Delta = \{p \to q, q \to p\}$.

De la misma manera, el cálculo proposicional clásico y el cálculo proposicional intuicionista son algebrizables por las álgebras booleanas y las álgebras de Heyting respectivamente, en ambos casos via la ecuación definitoria $\delta \approx \epsilon = \{p \approx 1\}$ y la fórmula de equivalencia $\Delta = \{p \leftrightarrow q\}$.

2.3. Algunos criterios

Existen diversas condiciones suficientes y necesarias para estabecer si cierto sistema deductivo es algebrizable [1]. El siguiente es un criterio *sintáctico*. Obsérvese que aquí no se requiere conocer la clase de álgebras, aunque sí los conjuntos de fórmulas $\delta \approx \epsilon$ y Δ.

Afirmación. *El sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebrizable via las ecuaciones definitorias $\delta \approx \epsilon$ y las fórmulas de equivalencia Δ si y solo si se satisfacen las condiciones siguientes.*

1. $\vdash p \,\Delta\, p$
2. $p \,\Delta\, q \vdash q \,\Delta\, p$
3. $p \,\Delta\, q,\, q \,\Delta\, r \vdash p \,\Delta\, r$
4. $p \,\Delta\, q \vdash \omega(p_1, \ldots, p, \ldots, p_n) \,\Delta\, \omega(p_1, \ldots, q, \ldots, p_n)$ *para cada conectivo primitivo* $\omega \in \tau$
5. $p \dashv\vdash \delta(p) \,\Delta\, \epsilon(p)$

En vista de las otras cláusulas, la condición (4) puede sustituirse por

$$p_1 \,\Delta\, q_1, \ldots, p_n \,\Delta\, q_n \vdash \omega(p_1, \ldots, p_n) \,\Delta\, \omega(q_1, \ldots, q_n)$$

y además se extiende a todas las fórmulas. Puede probarse también una regla de corte:

$$p \,\Delta\, q,\, p \vdash q.$$

Si un sistema deductivo está expresado mediante axiomas y reglas y se sabe que es algebrizable, el resultado siguiente permite determinar las álgebras que constituyen su semántica.

Afirmación. *Sea $\mathcal{S}$ un sistema deductivo expresado mediante axiomas y reglas en cantidad finita. Si $\mathcal{S}$ es algebrizable via las ecuaciones definitorias $\delta \approx \epsilon$ y las fórmulas de equivalencia Δ entonces la correspondiente clase de álgebras está axiomatizada por las ecuaciones*

(i) $\delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$ *para cada* axioma φ

(ii) $\delta(p \,\Delta\, p) \approx \epsilon(p \,\Delta\, p)$

y las cuasiecuaciones

(iii) $\big(\delta(\psi_1) \approx \epsilon(\psi_1) \wedge \cdots \wedge \delta(\psi_n) \approx \epsilon(\psi_n)\big) \Rightarrow \delta(\varphi) \approx \epsilon(\varphi)$ *para cada* regla $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$

(iv) $\delta(p \,\Delta\, q) \approx \epsilon(p \,\Delta\, q) \Rightarrow p \approx q$

Nótese que las cláusulas (ii) y (iv) pueden sintetizarse en un solo conjunto de cuasiecuaciones, así:

$$p \approx q \Leftrightarrow \delta(p \,\Delta\, q) \approx \epsilon(p \,\Delta\, q).$$

3. Lógicas de Łukasiewicz

Hace unos 80 años el matemático polaco Jan Łukasiewicz estudió sistemas lógicos con múltiples valores de verdad, considerándolos desde el punto de vista semántico. Respecto a la sintaxis, propuso un sistema deductivo sencillo y conjeturó que de él podrían deducirse todos las tautologías de su lógica. A lo largo del siglo XX se establecieron varias pruebas de esta conjetura, algunas de las cuales emplean las MV-álgebras [7].

En esta sección se presenta la lógica de Łukasiewicz y se precisa su relación con las MV-álgebras.

3.1. La lógica de Łukasiewicz con infinitos valores

La *lógica de Łukasiewicz con infinitos valores* tiene como vocabulario $\{\rightarrow, \neg\}$, su única regla es Modus Ponens —de p y $p \rightarrow q$ puede pasarse a q— y sus axiomas son

1. $p \to (q \to p)$

2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$

4. $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

Puesto que estos axiomas son teoremas del cálculo proposicional clásico, la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores es una sublógica de la clásica. A continuación se listan algunos teoremas de este sistema deductivo.

T1. $p \to ((p \to q) \to q)$

T2. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

T3. $p \to p$

T4. $((p \to p) \to p) \to p$

T5. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

T6. $\neg\neg p \to (q \to p)$

T7. $\neg\neg p \to p$

T8. $(p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$

T9. $p \to \neg\neg p$

T10. $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

T11. $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

T12. $\neg(p \to q) \to p$

T13. $\neg(p \to q) \to \neg q$

A manera de ejemplo se presenta una deducción formal del teorema T1.

1. $p \to ((q \to p) \to p)$	Ax 1
2. $(p \to ((q \to p) \to p)) \to$ $((((q \to p) \to p) \to ((p \to q) \to q)) \to (p \to ((p \to q) \to q)))$	Ax 2
3. $(((q \to p) \to p) \to ((p \to q) \to q)) \to (p \to ((p \to q) \to q))$	MP/1,2
4. $((q \to p) \to p) \to ((p \to q) \to q)$	Ax 3
5. $p \to ((p \to q) \to q)$	MP/3,4

En la deducción siguiente del teorema T3 la fórmula α es cualquier axioma de la lógica de Łukasiewicz.

1. $p \to (\alpha \to p)$	Ax 1
2. $(p \to (\alpha \to p)) \to (\alpha \to (p \to p))$	T2
3. $\alpha \to (p \to p)$	MP/1,2
4. α	Ax
5. $p \to p$	MP/3,4

Escogiendo la ecuación definitoria $\delta \approx \epsilon$ con $\delta(p) = p$, $\epsilon(p) = p \to p$ y las fórmulas de equivalencia $\Delta(p, q) = \{p \to q, q \to p\}$, las condiciones suficientes indicadas en la sección 2.3 para que un sistema deductivo $\vdash$ con vocabulario $\{\to, \neg\}$ sea algebrizable se expresan como sigue.

L1. $\vdash p \to p$

L2. $p \to q,\ q \to p \vdash p \to q,\ q \to p$

L3. $p \to q,\ q \to p,\ q \to r,\ r \to q \vdash p \to r, r \to p$

L4. $p \to q,\ q \to p,\ r \to s,\ s \to r \vdash (p \to r) \to (q \to s),\ (q \to s) \to (p \to r)$

$p \to q,\ q \to p \vdash \neg p \to \neg q,\ \neg q \to \neg p$

L5. $p \dashv\vdash p \to (p \to p),\ (p \to p) \to p$

En la lógica de Łukasiewicz, L1 es un teorema (T3). La condición L2 es evidente en cualquier lógica. En el sistema de Łukasiewicz, L3 se sigue del axioma 2 y la aplicación repetida de la regla Modus Ponens. Respecto a la primera cláusula de L4, por el axioma 2 y Modus Ponens se tiene

$$q \to p \vdash (p \to r) \to (q \to r) \vdash ((q \to r) \to (q \to s)) \to ((p \to r) \to (q \to s))$$

mientras por el teorema T5 y Modus Ponens es

$$r \to s \vdash (q \to r) \to (q \to s)$$

así que, aplicando de nuevo Modus Ponens,

$$q \to p,\ r \to s \vdash (p \to r) \to (q \to s).$$

La segunda cláusula de L4 es consecuencia del teorema T10. Puesto que $p \to (p \to p)$ es un teorema en la lógica de Łukasiewicz —consecuencia del axioma 1 y del teorema T1— la condición L5 se reduce a

$$p \dashv\vdash (p \to p) \to p$$

que se deduce inmediatamente de los teoremas T1 y T4. De esta manera está probado el resultado siguiente.

Teorema. *La lógica de Łukasiewicz con infinitos valores es algebrizable via la ecuación definitoria y las fórmulas de equivalencia indicadas arriba.*

3.2. La lógica de Łukasiewicz y las MV-álgebras

Siendo algebrizable la lógica de Łukasiewicz, ¿cuáles son las álgebras correspondientes? Siguiendo el resultado general indicado en la sección 2.3, introduciendo la constante 1 para designar a $x \to x$ —pues $p \to p \ \Delta\ q \to q$ se traduce en $x \to x \approx y \to y$, luego este elemento es constante— y simplificando un poco, resulta la siguiente axiomatización para las álgebras buscadas.

Ecuaciones

1. $x \to (y \to x) \approx 1$

2. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx 1$

3. $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$

4. $(\neg y \to \neg x) \to (x \to y) \approx 1$

Cuasiecuaciones

5. $(1 \to x \approx 1) \Rightarrow (x \approx 1)$

6. $((x \to y \approx 1) \wedge (y \to x \approx 1)) \Rightarrow (x \approx y)$

No es difícil aceptar la equivalencia de todas estas condiciones con las siguientes cuatro.

Definición. Un *álgebra de Wajsberg* es una estructura $\mathbf{A} = \langle A; \to, \neg, 1\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, $\to$ es una operación binaria en A, $\neg$ una operación unaria y 1 una constante, que además satisfacen los axiomas siguientes.

W1. $1 \to x \approx x$

W2. $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx 1$

W3. $(x \to y) \to y \approx (y \to x) \to x$

W4. $(\neg y \to \neg x) \to (x \to y) \approx 1$

Puesto que las cláusulas (2), (3) y (4) coinciden con W2, W3 y W4, se trata de probar la equivalencia de (1), (5), (6) —juntas— con W1, empleando las otras tres si es necesario. En una dirección es fácil: por (1) se tiene $1 \to (y \to 1) \approx 1$ luego por (5) se concluye $y \to 1 \approx 1$. En particular $(x \to 1) \to 1 \approx 1$, de donde por (3) es $(1 \to x) \to x \approx 1$; de otro lado por (1) es $x \to (1 \to x) \approx 1$. De estas dos últimas ecuaciones, por (6) se sigue $1 \to x \approx x$, es decir, W1.

La otra dirección es consecuencia del siguiente resultado.

Afirmación. *En cualquier estructura algebraica con una operación binaria* $\to$ *y una constante* 1 *que satisfacen las condiciones W1, W2, W3 son válidas las propiedades siguientes.*

a) $x \to x \approx 1$

b) $(x \to 1) \to 1 \approx 1$

c) $x \to 1 \approx 1$

d) $x \to (y \to x) \approx 1$ —*esta es la condición (1) de arriba*—

e) $(1 \to x \approx 1) \Rightarrow (x \approx 1)$ —*condición (5)*—

f) $((x \to y \approx 1) \wedge (y \to x \approx 1)) \Rightarrow (x \approx y)$ —*condición (6)*—

Demostración.

$$\begin{aligned} x \to x &\approx 1 \to (x \to x) && \text{W1} \\ &\approx (1 \to 1) \to ((1 \to x) \to (1 \to x)) && \text{W1} \\ &\approx 1 && \text{W2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \to 1) \to 1 &\approx (1 \to x) \to x && \text{W3} \\ &\approx x \to x && \text{W1} \\ &\approx 1 && \text{(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \to 1 &\approx x \to ((x \to 1) \to 1) && \text{(b)} \\ &\approx (1 \to x) \to ((x \to 1) \to (1 \to 1)) && \text{W1} \\ &\approx 1 && \text{W2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \to (y \to x) &\approx 1 \to ((1 \to x) \to (y \to x)) && \text{W1} \\ &\approx (y \to 1) \to ((1 \to x) \to (y \to x)) && \text{(c)} \\ &\approx 1 && \text{W2} \end{aligned}$$

Si $1 \to x \approx 1$ entonces por W1 es $x \approx 1$.
Si $x \to y \approx 1$ y $y \to x \approx 1$ entonces por W1 y W3 se tiene

$$x \approx 1 \to x \approx (y \to x) \to x \approx (x \to y) \to y \approx 1 \to y \approx y. \qquad \square$$

Como *ejemplos* de las álgebras de Wajsberg pueden citarse las MV-álgebras. En efecto, con las convenciones adoptadas en la sección 1.2 las operaciones $\rightarrow$, $\neg$ y la constante 1 de cualquier MV-álgebra satisfacen W1, W2, W3 y W4, como de hecho se indicó allí. Más aún, estos son los únicos ejemplos porque, como se argumenta a continuación, toda álgebra de Wajsberg es a su vez una MV-álgebra.

Puesto que las álgebras de Wajsberg son las álgebras de la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores, si α es un teorema de esta lógica entonces $\alpha \approx 1$ es una ecuación válida en todas las álgebras de Wajsberg; si $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \alpha$ son teoremas de la lógica de Łukasiewicz entonces —por la condición (6)— la ecuación $\alpha \approx \beta$ es válida en las álgebras de Wajsberg. En particular, de la sección 3.1 se concluye que las siguientes son ecuaciones válidas en todas las álgebras de Wajsberg.

$$x \rightarrow (y \rightarrow z) \approx y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

$$\neg\neg x \approx x$$

$$\neg y \rightarrow \neg x \approx x \rightarrow y$$

En un álgebra de Wajsberg arbitraria $\mathbf{A} = \langle A; \rightarrow, \neg, 1\rangle$ se definen la operación binaria $\oplus$ y la constante 0 como sigue.

$$x \oplus y = \neg x \rightarrow y$$
$$0 = \neg 1$$

Afirmación. *En estas condiciones, el álgebra de Wajsberg* $\mathbf{A}$ *es una MV-álgebra.*

Demostración. La condición (4) de MV-álgebra (sección 1.2) es una de las ecuaciones indicadas arriba. La condición (5) se sigue de esta, pues

$$x \oplus \neg 0 \approx \neg x \rightarrow \neg\neg 1 \approx \neg x \rightarrow 1 \approx 1$$

y de la misma manera para la condición (6) se tiene

$$\neg(\neg x \oplus y) \oplus y \approx \neg\neg(\neg\neg x \rightarrow y) \rightarrow y \approx (x \rightarrow y) \rightarrow y \approx$$
$$(y \rightarrow x) \rightarrow x \approx \neg(\neg y \oplus x) \oplus x.$$

La condición (3) se verifica como sigue

$$x \oplus 0 \approx \neg x \to \neg 1 \approx 1 \to x \approx x$$

y la condición (2) así

$$x \oplus y \approx \neg x \to y \approx \neg x \to \neg\neg y \approx \neg y \to x \approx y \oplus x.$$

Finalmente la condición (1) es

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) \approx \neg x \to (\neg y \to z) \approx \neg x \to (\neg z \to y) \approx \\ \neg z \to (\neg x \to y) \approx \neg(\neg x \to y) \to \neg\neg z \approx \\ \neg(\neg x \to y) \to z \approx (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

donde se empleó en dos ocasiones la condición (2). □

En conclusión, *las MV-álgebras constituyen precisamente la semántica algebraica de la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores.*

3.3. Lógicas de Łukasiewicz con finitos valores

Para el estudio de las lógicas con finitos valores de verdad, en las fórmulas proposicionales se introduce de manera recurrente la notación $n.p$ —donde n es un entero positivo y p es una variable— como sigue.

$$1.p = p$$
$$(n+1).p = \neg p \to n.p$$

Así $2.p = \neg p \to p$, $3.p = \neg p \to (\neg p \to p)$, etcétera.
La *lógica de Łukasiewicz con n valores* tiene como vocabulario $\{\to, \neg\}$, su única regla es Modus Ponens y sus axiomas son

1. $p \to (q \to p)$
2. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$
3. $((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p)$

4. $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

5. $n.p \to (n-1).p$

6. $(n-1).(j.p \to \neg(\neg p \to \neg(j-1).p))$ para cada j con $1 < j < n$, j no divisor de $n-1$

Así por ejemplo para $n = 3$ solo se añade el axioma

$$(\neg p \to (\neg p \to p)) \to (\neg p \to p)$$

a los de la lógica con infinitos valores.

Por el axioma (1) siempre se tiene $(n-1).p \to n.p$, de suerte que el axioma (5) significa la *equivalencia* de $n.p$ y $(n-1).p$. No es difícil verificar que este axioma entraña la equivalencia de $(n-1).p$ con $k.p$ para cada $k \geq n-1$, de suerte que para cada variable p la cadena $1.p, 2.p, 3.p, \ldots$ tiene a lo más $n-1$ fórmulas no equivalentes.

Puesto que se obtiene de una lógica algebrizable añadiendo algunos axiomas, cada una de estas nuevas lógicas es algebrizable y la correspondiente clase de álgebras está contenida en la de MV-álgebras [1, p21]. Con más precisión, puede verse que es la clase de álgebras *generada* [3] por la MV-álgebra —llamada *álgebra de Łukasiewicz*—

$$Ł_n = \left\langle \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}; \oplus, \neg \right\rangle$$

donde las operaciones están definidas como $x \oplus y = min\{1, x+y\}$, $\neg x = 1 - x$.

Con lo cual se ha vuelto a la discusión inicial de esta monografía.

Bibliografía

[1] W. J. Blok and Don Pigozzi, *Algebraizable Logics*. Memoirs of the American Mathematical Society 396. AMS, Providence (Rhode Island), 1989.

[2] W. J. Blok and Don Pigozzi, *Abstract Algebraic Logic*. Preprint. X Simposio Latinoamericano de Lógica Matemática, Bogotá, 1995.

[3] Stanley Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 78. Springer-Verlag, New York, 1981. Disponible en varios sitios de Internet:
http://www.thoralf.uwaterloo.ca/htdocs/ualg.html
http://www.math.sc.edu/∼mcnulty/alglatvar/burrissanka.pdf

[4] Xavier Caicedo, *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Una Empresa Docente, Bogotá, 1990.

[5] Xavier Caicedo, *Implicit connectives of algebraizable logics*. Preprint. 2003.

[6] Roberto Cignoli, Itala M. L. D'Ottaviano e Daniele Mundici, *Álgebras das Lógicas de Łukasiewicz*. Coleção CLE 12. Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, UNICAMP, Campinas, 1994.

[7] Roberto Cignoli, *Verdad y consecuencia en el segmento real: una formalización de la lógica borrosa*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales **52** (2000) 9–23.

[8] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum and W. Thomas, *Mathematical Logic* (Second Edition). Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994.

[9] Josep Maria Font and Ramon Jansana, *A General Algebraic Semantics for Sentential Logics*. Lecture Notes in Logic 7. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[10] P. T. Johnstone, *Notes on Logic and Set Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[11] Renato Lewin, *Lógica algebraica abstracta*. Preprint. 2003.

[12] Arnold Oostra, *Álgebras de Heyting*. XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1997.

[13] Charles S. Peirce, *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*. Charles Hartshorne and Paul Weiss (Eds.), vols. 1–6. Harvard University Press, 1931–1934. Electronic edition: InteLex Corporation, 1992.

Apéndice: MV-álgebras implicativas

Durante la exposición del cursillo y poco después, se encontraron varios caminos para responder la cuestión planteada en la sección 1.2. En este apéndice se consignan esos resultados con las pruebas detalladas.

Pregunta. *¿Toda MV-álgebra es un álgebra implicativa [con la operación $\to$ definida como se indica en la sección 1.2]? Parece que no...*

Primero se presenta un argumento *lógico* que confirma la respuesta negativa.

Demostración. Si toda MV-álgebra es un álgebra implicativa entonces en la lógica con infinitos valores de Łukasiewicz vale el teorema

$$(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$$

con lo cual en ese sistema deductivo valen los axiomas del segmento implicativo del cálculo proposicional clásico [4]. Como estas dos lógicas son algebrizables, su interdeducibilidad implica que las clases de álgebras correspondientes son iguales, con lo cual toda MV-álgebra es un álgebra booleana. Esto es absurdo pues, por ejemplo, no hay ninguna álgebra booleana con solo tres elementos. □

Esta prueba sugiere que en la MV-álgebra de tres elementos no vale la ecuación indicada, lo cual sería un argumento *puntual* concluyente. En la discusión que sigue, d es la fórmula

$$d(x, y, z) = (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$$

en el vocabulario $\{\to\}$.

Afirmación. *Una MV-álgebra* $\mathbf{A}$ *es un álgebra implicativa —con la operación* $\to$ *definida como se indica en la sección 1.2— si y solo si*

$$\underset{\mathbf{A}}{\models} d(x, y, z) \approx 1.$$

Demostración. Las condiciones primera y cuarta de álgebra implicativa están en el listado de propiedades de la sección 1.2 mientras la tercera se concluye de otras dos del mismo listado como sigue: si $x \to y \approx 1$ y $y \to x \approx 1$ entonces

$$x \approx 1 \to x \approx (y \to x) \to x \approx (x \to y) \to y \approx 1 \to y \approx y. \qquad \square$$

El hecho siguiente responde de manera negativa la pregunta estudiada.

Afirmación. *En el álgebra de Łukasiewicz $Ł_3$ con 3 valores existen elementos a, b, c tales que $d(a, b, c) \neq 1$.*

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} d(1/2, 1/2, 0) &= (1/2 \to (1/2 \to 0)) \to ((1/2 \to 1/2) \to (1/2 \to 0)) \\ &= (1/2 \to 1/2) \to (1 \to 1/2) \\ &= 1 \to 1/2 \\ &= 1/2. \end{aligned} \qquad \square$$

En realidad, este ejemplo puntual puede generalizarse bastante.

Afirmación. *En cualquier MV-álgebra* $\mathbf{A}$ *se tiene*

$$\models_{\mathbf{A}} d(x, x, 0) \approx d(x, \neg x, 0) \approx x \vee \neg x$$

Demostración.

$$\begin{aligned} d(x, x, 0) &\approx (x \to (x \to 0)) \to ((x \to x) \to (x \to 0)) \\ &\approx (x \to \neg x) \to (1 \to \neg x) \\ &\approx (x \to \neg x) \to \neg x \\ &\approx x \vee \neg x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x, \neg x, 0) &\approx (x \to (\neg x \to 0)) \to ((x \to \neg x) \to (x \to 0)) \\ &\approx (x \to x) \to ((x \to \neg x) \to \neg x) \\ &\approx 1 \to (x \vee \neg x) \\ &\approx x \vee \neg x \end{aligned} \qquad \square$$

En cada álgebra de Łukasiewicz $Ł_n$ se tiene entonces $d(a,a,0) = d(a,1-a,0) = max\{a,1-a\}$ lo cual para $0 < a < 1$ provee múltiples contraejemplos a la ecuación $d(x,y,z) \approx 1$. Así queda probado que para $n > 2$ ninguna de estas estructuras es un álgebra implicativa, pero puede decirse un poco más.

Corolario. *Ninguna MV-álgebra* lineal *con más de dos elementos es un álgebra implicativa.*

Con ayuda de las tablas de verdad puede verificarse que en $Ł_3$ la *única* terna (a,b,c) de elementos de $\{0,1/2,1\}$ para la cual $d(a,b,c) \neq 1$ es $(1/2,1/2,0) = (1/2,1-1/2,0)$. Acerca de esta unicidad y de la cantidad de contraejemplos en $Ł_n$ pueden hacerse las observaciones siguientes.

Afirmación. *En cualquier MV-álgebra* $\mathbf{A}$ *se tiene*

1. $\underset{\mathbf{A}}{\models} d(0,y,z) \approx d(1,y,z) \approx 1$
2. $\underset{\mathbf{A}}{\models} d(x,0,z) \approx d(x,1,z) \approx 1$
3. $x \to z \approx 1 \underset{\mathbf{A}}{\models} d(x,y,z) \approx 1$
4. $y \to z \approx 1 \underset{\mathbf{A}}{\models} d(x,y,z) \approx 1$
5. $\underset{\mathbf{A}}{\models} d(x,y,1) \approx 1$

Nota. En la prueba se emplea de manera repetida el hecho de que en cualquier MV-álgebra $\mathbf{A}$ se tiene

$$y \to z \approx 1 \underset{\mathbf{A}}{\models} (x \to y) \to (x \to z) \approx 1$$

o, en otras palabras, $y \leq z$ implica $x \to y \leq x \to z$. Esto se desprende de inmediato de las ecuaciones

$$(y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \approx (x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) \approx 1$$

(véanse las propiedades listadas en la sección 1.2).

Demostración.

$$\begin{aligned}
d(0,y,z) &\approx (0 \to (y \to z)) \to ((0 \to y) \to (0 \to z)) \\
&\approx 1 \to (1 \to 1) \approx 1 \\
d(1,y,z) &\approx (1 \to (y \to z)) \to ((1 \to y) \to (1 \to z)) \\
&\approx (y \to z) \to (y \to z) \approx 1 \\
d(x,0,z) &\approx (x \to (0 \to z)) \to ((x \to 0) \to (x \to z)) \\
&\approx (x \to 1) \to 1 \quad \text{(pues } 0 \to z \approx 1\text{, ver nota)} \\
&\approx 1 \\
d(x,1,z) &\approx (x \to (1 \to z)) \to ((x \to 1) \to (x \to z)) \\
&\approx (x \to z) \to (1 \to (x \to z)) \\
&\approx (x \to z) \to (x \to z) \approx 1
\end{aligned}$$

Si $x \to z \approx 1$ entonces

$$\begin{aligned}
d(x,y,z) &\approx (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \\
&\approx (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to 1) \\
&\approx (x \to (y \to z)) \to 1 \approx 1
\end{aligned}$$

Si $y \to z \approx 1$ entonces

$$\begin{aligned}
d(x,y,z) &\approx (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \\
&\approx (x \to 1) \to 1 \quad \text{(ver nota)} \\
&\approx 1
\end{aligned}$$

La ecuación (5) es consecuencia de cualquiera de las dos cuasiecuaciones anteriores. □

Corolario.

1. *En cualquier MV-álgebra, si* $d(a,b,c) \neq 1$ *entonces* $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $a \not\leq c$, $b \not\leq c$.

2. *En una MV-álgebra* lineal*, si* $d(a,b,c) \neq 1$ *entonces* $0 < a < 1$, $0 < b < 1$, $c \leq min\{a,b\}$.

Esto indica el contraejemplo a la ecuación $d(x, y, z) \approx 1$ en $Ł_3$ y, a la vez, prueba que es único. Más general, un conteo muestra que en el álgebra de Łukasiewicz $Ł_n$ con $n > 2$ el número máximo posible de contraejemplos es

$$1(2n-5) + 2(2n-7) + 3(2n-9) + \cdots + (n-4)5 + (n-3)3 + (n-2)1.$$

Por ejemplo en $Ł_4$ no hay más de 4 y en $Ł_5$ no más de 14. En el primer caso se ha verificado que en efecto hay 4 contraejemplos, lo cual permite dejar unas inquietudes menores.

Preguntas. *¿En todas las álgebras de Łukasiewicz $Ł_n$ con $n > 2$ vale la recíproca de (2) del corolario anterior? Más general, ¿en todas las MV-álgebras lineales vale la recíproca de (2) del corolario anterior?*

El primer argumento general planteado como respuesta negativa a la pregunta inicial puede resumirse así: si *todas* las MV-álgebras son álgebras implicativas entonces —por argumentos lógicos— *todas* las MV-álgebras son álgebras booleanas. ¿Esta implicación será válida para álgebras en particular? Eso daría un argumento *local*.

En [6] se prueba que en cualquier MV-álgebra $\mathbf{A}$ las operaciones $\wedge$, $\vee$ son los extremos inferior y superior para el orden $\leq$ introducido, de manera que $\langle A; \wedge, \vee\rangle$ es un retículo. Este retículo no siempre es complementado y, en principio, tampoco es distributivo. ¿Bajo qué condiciones $\langle A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ es un álgebra booleana?

Teorema. *Sea $\mathbf{A}$ una MV-álgebra. Respecto a las operaciones definidas en la sección 1.2, si $\langle A; \rightarrow, 1\rangle$ es un álgebra implicativa entonces $\langle A; \wedge, \vee, \neg, 0, 1\rangle$ es un álgebra booleana.*

En particular, de nuevo, ninguna álgebra de Łukasiewicz $Ł_n$ con $n > 2$ es un álgebra implicativa.

Demostración. Por la adjunción de $\odot$ y $\rightarrow$, de $y \leq x \rightarrow x \approx 1$ se sigue $x \odot y \leq x$ y de igual manera $x \odot y \leq y$, luego en toda MV-álgebra se tiene $x \odot y \leq x \wedge y$. Por otro lado

$$\neg y \rightarrow \neg(\neg y \rightarrow \neg x) \approx (\neg y \rightarrow \neg x) \rightarrow y \approx (x \rightarrow y) \rightarrow y \approx x \vee y$$

y como $x \leq x \vee y$ se tiene $x \to (\neg y \to \neg(\neg y \to \neg x)) \approx 1$. Si la MV-álgebra es un álgebra implicativa, de la primera afirmación de este apéndice se sigue

$$(x \to \neg y) \to (x \to \neg(\neg y \to \neg x)) \approx 1,$$

es decir,

$$x \to \neg y \leq x \to \neg(\neg y \to \neg x) \approx (\neg y \to \neg x) \to \neg x \approx (\neg x \to \neg y) \to \neg y.$$

Esto es $\neg x \oplus \neg y \leq \neg x \vee \neg y$, de donde $\neg(\neg x \vee \neg y) \leq \neg(\neg x \oplus \neg y)$, es decir, $x \wedge y \leq x \odot y$. En resumen, $x \wedge y = x \odot y$.

Ahora se tiene de inmediato que el retículo es distributivo

$$\begin{aligned} x \wedge (y \vee z) &\approx x \odot (y \vee z) \\ &\approx (x \odot y) \vee (x \odot z) \\ &\approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{aligned}$$

y complementado

$$\begin{aligned} &x \wedge \neg x \approx x \odot \neg x \approx 0 \\ &x \vee \neg x \approx \neg(\neg x \wedge x) \approx \neg 0 \approx 1. \end{aligned}$$

□

Las álgebras de Łukasiewicz $Ł_n$, en tanto retículos, son distributivos pero no complementados. El hecho de que el retículo sea complementado puede caracterizarse de manera independiente.

Afirmación. *Una MV-álgebra* **A** *es un retículo complementado —con el orden definido como se indica en la sección 1.2— si y solo si*

$$\models_{\mathbf{A}} d(x, x, 0) \approx 1.$$

Demostración. Por las leyes de De Morgan —válidas tanto para la pareja de conectivos $\wedge, \vee$ como para la pareja $\odot, \oplus$— en cualquier MV-álgebra **A** se tiene

$$x \wedge \neg x \approx 0 \dashv\models_{\mathbf{A}} x \vee \neg x \approx 1$$

luego el retículo es complementado si y solo si se satisface cualquiera de estas ecuaciones. Ahora el resultado es consecuencia del hecho, probado arriba, de que siempre $d(x, x, 0) \approx x \vee \neg x$. □

Esta observación sugiere el siguiente par de inquietudes marginales.

Preguntas.

1. *¿Pueden caracterizarse de manera similar las MV-álgebras cuyo retículo es distributivo?*

2. *¿Existen MV-álgebras con retículo complementado y no distributivo? ¿Con retículo ni complementado ni distributivo?*

La respuesta negativa a la pregunta inicial de este apéndice —¿toda MV-álgebra es implicativa?— permite contestar también el interrogante planteado por una persona asistente al cursillo acerca de la validez del teorema de la deducción en la lógica de Łukasiewicz.

Afirmación. *En la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores no vale el teorema de la deducción.*

Demostración. Puesto que en la lógica de Łukasiewicz vale Modus Ponens, con una deducción de seis pasos se tiene

$$x \to (y \to z),\ (x \to y),\ x \vdash z.$$

Si valiera el teorema de la deducción, aplicándolo tres veces se recibiría

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$$

con lo se tendría $d(x, y, z) \approx 1$ en todas las MV-álgebras. □

En la lógica de Łukasiewicz con infinitos valores tampoco vale el teorema de reducción al absurdo. Pues si $\Sigma, p \vdash q$ entonces de los teoremas T12 y T13 se tiene $\Sigma, \neg(p \to q) \vdash q, \neg q$. Si valiera el teorema de reducción al absurdo se seguiría $\Sigma \vdash p \to q$, es decir, se deduciría el teorema de la deducción.