Transporte paralelo, geodésicas y derivada covariante

Francisco Meneses Perdomo
Estudiante Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
pacho6686@yahoo.com.mx

Stella Huérfano
Profesora Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
rshuerfanob@unal.edu.co

Resumen

En un espacio euclídeo dos vectores de diferente origen son comparados por traslación paralela de uno o de ambos vectores a un mismo origen, por lo tanto podemos tratar encontrar cual es la taza de cambio de un campo vectorial Y sobre alguna variedad M a lo largo de una curva $p(t)$.[1]

1. Conceptos previos

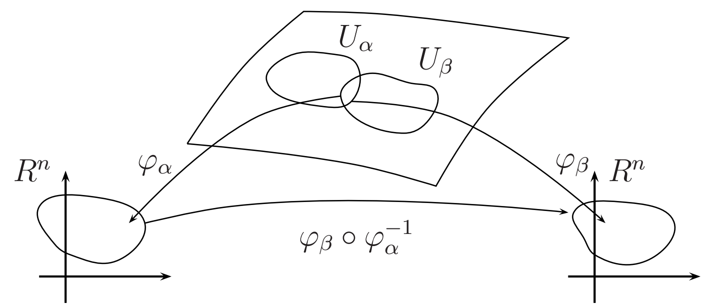
Una **variedad topológica** M de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff en el que todo punto tiene una vecindad abierta homeomorfa a una bola abierta en R^n. Esto significa que M es localmente como R^n.

Una **carta** (U, φ) de una variedad M es un conjunto abierto U de M, llamado el dominio de la carta junto con un homeomorfismo $\varphi : U \to V$ de U sobre un conjunto abierto V de R^n. Un **atlas** de clase C^∞ sobre una variedad M es un conjunto $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartas tal que los dominios $\{U_\alpha\}$ cubren todo M y los homeomorfismos satisfacen la siguiente condición de compatibilidad:

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta),$$

donde las funciones $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, son funciones de conjuntos abiertos de R^n en R^n de clase C^∞.

[1]Este escrito hace parte del proyecto 1101-05-11-445 para colciencias del grupo de Teoría de Representaciones del Departamento de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia



Gráfica 1

Una variedad topológica M junto con un atlas de clase C^∞ es una C^∞ estructura, se dice que M es una **variedad diferenciable** de clase C^∞.

Dado un punto p en M definimos $C^\infty(p)$, como el algebra de todas las funciones C^∞, cuyo dominio contiene alguna vecindad de p.

El **espacio tangente** $T_p(M)$ a M en p es el conjunto de todas las funciones $X_p : C^\infty(p) \to R$, tal que para todo $\alpha,\ \beta \in R$ y $f,\ g \in C^\infty(p)$ se satisface

(i) $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_p f) + \beta(X_p g)$ (linealidad)
(ii) $X_p(fg) = (X_p f)g(p) + f(p)(X_p g)$ (regla de leibniz)

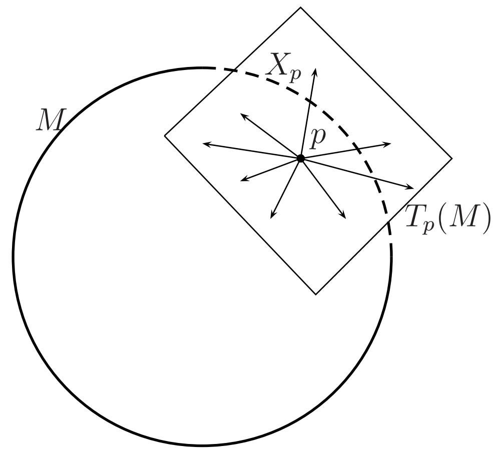
Con las operaciones en $T_p(M)$ definidas por

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f,$$
$$(\alpha X_p)f = \alpha(X_p f).$$

Un **vector tangente** a M en p es cualquier $X_p \in T_p(M)$. Ver(Gráfica 2).

Un operador que satisface las propiedades (i) y (ii) se denomina una **derivación**.

Un **campo vectorial** es una función la cual asigna a cada punto $p \in M$ un vector tangente $X_p \in T_p(M)$.



Gráfica 2

2. Diferenciación de campos vectoriales a lo largo de curvas en R^n.

Consideremos una situación especial en la variedad de Riemann orientada, R^n. Se hará uso total del paralelismo natural in R^n, esto es, se hará uso de la identificación natural del espacio tangente de R^n en puntos p distintos.

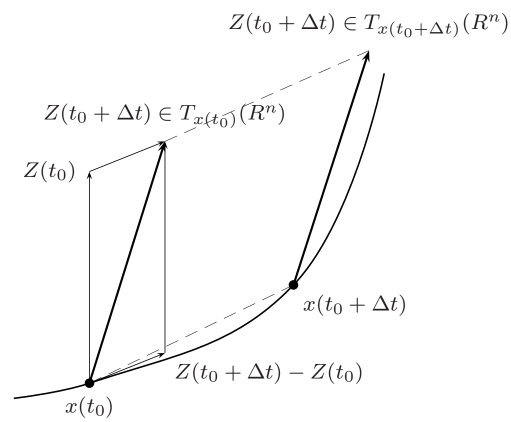
Sea C una curva en R^n dada por $x(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$ con $a < t < b$. Supongamos que $Z(t) = Z_{x(t)}$ es un campo vectorial definido a lo largo de C; así a cada $t \in (a, b)$ se le asigna un vector:

$$Z(t) = \sum a^i(t)(\partial/\partial x^i) \in T_{x(t)}(R^n). \tag{1}$$

Supongamos que Z es por lo menos de clase C^1, esto significa que las componentes $a^i(t)$ son funciones, en t, continuamente diferenciables sobre el intervalo (a, b). El vector velocidad de la curva (parametrizada) es un ejemplo de este tipo de campo vectorial sobre la curva $x(t)$, en el cual $a^i(t) = \dot{x}^i(t)$.

El propósito es definir una derivada o taza de cambio de $Z(t)$ con respecto a t; esta será denotada $\dot{Z}(t)$ o dZ/dt y será también un campo vectorial a lo largo de la curva. Por supuesto, en general ni $Z(t)$, ni su derivada necesitan ser tangentes a la curva. Ahora como en R^n tenemos un paralelismo natural (o isomorfismo natural) de $T_p(R^n)$ y $T_q(R^n)$ para cualquier par de puntos distintos $p,\ q \in R^n$, es posible dar significado a $Z(t_0+\Delta t)-Z(t_0)$, la diferencia de un vector en $T_{x(t_0+\Delta t)}(R^n)$ y un vector en $T_{x(t_0)}(R^n)$. Para definir la diferencia anterior, se supondrá $Z(t_0+\Delta t)$ movido o identificado con el correspondiente vector en $T_{x(t_0)}(R^n)$ y que la substracción es realizada allí en $T_{x(t_0)}(R^n)$. Esto nos permite realizar el cociente diferencial

$$\frac{1}{\Delta t}[Z(t_0+\Delta t)-Z(t_0)] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{a^i(t_0+\Delta t)-a^i(t_0)}{\Delta t}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x(t_0)}$$

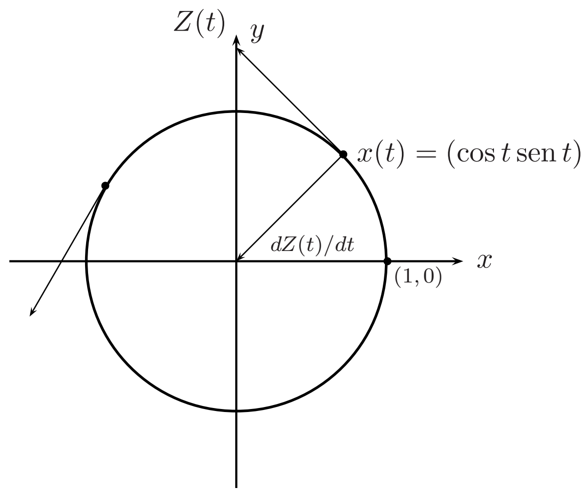


Gráfica 3

La igualdad se deduce del hecho de que si escribimos vectores en términos de las bases $\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}$, el cual es un sistema de referencia de ejes paralelos en $T_p(R^n)$, entonces los vectores en puntos distintos, digamos $Z(t_0+\Delta t) \in T_{x(t_0+\Delta t)}(R^n)$ y $Z(t_0) \in T_{x(t_0)}(R^n)$, son paralelos sí y solo sí tienen las mismas componentes.
Si $\Delta t \to 0$ tenemos

$$\dot{Z}(t_0) = \sum \dot{a}^i(t_0)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \in T_{x(t)}(R^n). \tag{2}$$

Como un ejemplo simple consideremos la curva $x(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$, esta curva es un circulo unitario en R^n. Supongamos $Z(t) = -\operatorname{sen} t(\partial/\partial x)+\cos t(\partial/\partial y)$; el vector velocidad de un punto en el circulo. Entonces $dZ/dt = -\cos t(\partial/\partial x) - \operatorname{sen} t(\partial/\partial y)$ es el vector en la curva $x(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen} t)$ que tiene longitud 1 y dirección hacia el origen.(Ver Grafica 4)



Gráfica 4

Un campo vectorial $Z(t)$ es **constante** o **paralelo** a lo largo de la curva $x(t)$ si y solo si $dZ/dt = 0$ para todo t.

Suponga que $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$ son campos vectoriales definidos a lo largo de la misma curva C y que $f(t)$ es una función diferenciable de t, con $a < t < b$. Entonces $f(t)Z(t)$ y $Z_1(t) + Z_2(t)$ son campos vectoriales a lo largo de C y tenemos las siguientes consecuencias de (2).

$$\frac{d}{dt}(Z_1(t) + Z_2(t)) = \frac{dZ_1}{dt} + \frac{dZ_2}{dt}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(f(t)Z(t)) = \frac{df}{dt}Z(t) + f(t)\frac{dZ(t)}{dt}, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}((Z_1(t), (Z_2(t)) = \left(\frac{dZ_1}{dt}, Z_2(t)\right) + \left(Z_1(t), \frac{dZ_2}{dt}\right), \tag{5}$$

donde (Z_1, Z_2) es el producto interno estándar en R^n.

La formula dada para dZ/dt esta en términos de las componentes de $Z(t)$ relativas al sistema de referencia natural $(\partial/\partial x^1)_p, \ldots, (\partial/\partial x^n)_p$ en $T_p(R^n)$, que es constante a lo largo de $p = x(t)$. Sin embargo a veces es conveniente usar otro sistema de referencia, digamos $F_1(t), \ldots, F_n(t)$, definido sobre $x(t)$, y por lo menos de clase C^1 a lo largo de $x(t)$. Entonces $Z(t)$ tiene una expresión única como combinación lineal de estos vectores en cada $x(t)$:

$$Z(t) = b^1(t)F_1(t) + \ldots + b^n(t)F_n(t).$$

Diferenciando esta expresión obtenemos, con ayuda de (3) y (4)

$$\frac{dZ}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{db^j}{dt} F_j(t) + b^j(t) \frac{dF_j}{dt} \right).$$

Sin embargo, como los dF_j/dt son vectores a lo largo de $x(t)$, ellos también son combinación lineal de $F_k(t)$,

$$\frac{dF_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_j^k(t) F_k(t).$$

Lo que nos lleva a la formula

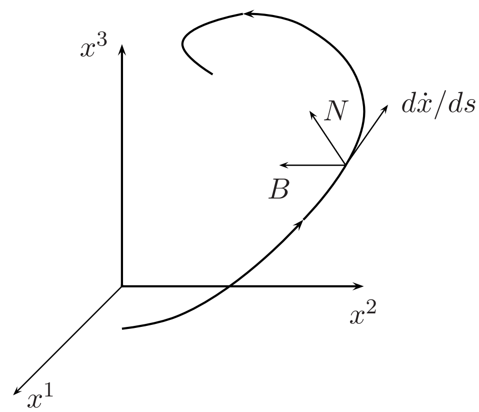
$$\frac{dZ}{dt} = \sum_k \left(\frac{db^k}{dt} + \sum_j b^j(t) a_j^k(t) \right) F_k(t).$$

Esta expresión incluye (2) como caso especial con $a_j^k(t) \equiv 0$.

Aunque hemos utilizado un sistema particular de coordenadas, dZ/dt es un objeto que solo depende de la geometría del espacio; es independiente de las coordenadas, y también esta bien definida para curvas parametrizadas en cualquier espacio euclídeo.

Como ilustración de estas ideas, podemos construir un sistema de coordenadas que cambie con el "tiempo", notemos que la longitud de arco de una curva desde un punto fijo $x_0 = x(t_0)$ es dada por $s = \int_{t_0}^{t} (\dot{x}(t), \dot{x}(t))^{1/2}$, así $ds/dt = (\dot{x}(t)), \dot{x}(t))^{1/2}$. Si s es usado como parámetro , entonces $ds/dt \equiv ds/ds \equiv 1$ por lo tanto $\dot{x}(s)$ es un vector unitario tangente a la curva.

Diferenciando la identidad $(\dot{x}(s), \dot{x}(s))^{1/2} \equiv 1$ y usando (5), obtenemos $2(\dot{x}(s), d\dot{x}/ds) \equiv 0$, luego $d\dot{x}/ds$ es cero, o es ortogonal a $\dot{x}(s)$ en cada punto de la curva. Definimos la curvatura $k(s)$ por $k(s) = \| d\dot{x}/ds \|$, y cuando $k(s) \neq 0$, sea $N(s)$ el único vector unitario definido por $d\dot{x}/ds = k(s)N(s)$ y $B(s)$ el único vector unitario determinado tal que $\dot{x}(s), N(s), B(s)$ define un sistema ortonormal con la orientación de $\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2$, $\partial/\partial x^3$.



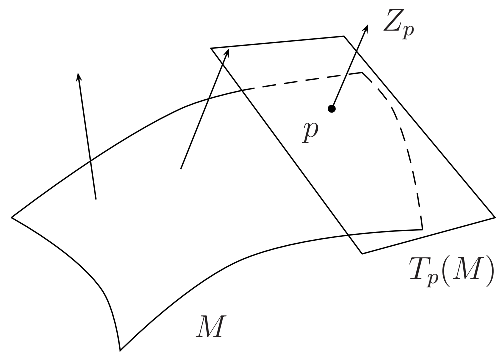
Gráfica 5

Un teorema que resulta es, que la curvatura $k(s) \equiv 0$ sobre el intervalo de definición, si y solo si $x(s)$ es una linea recta sobre ese intervalo. Ver([1], pág 302).

3. Diferenciación de campos vectoriales sobre subvariedades de R^n

En la sección anterior estudiamos diferenciación de campos vectoriales a lo largo de curvas. En esta sección haremos lo mismo para campos vectoriales a lo largo de otras subvariedades $M \subset R^n$, por ejemplo una superficie en R^3. Esto es algo mas complicado y ciertamente no es la manera mas directa de aproximarse al problema de la diferenciación en variedades; pero el punto de vista geométrico podría ayudar. Ver(Gráfica 6).

Consideremos un campo vectorial Z definido en cada punto de M pero no necesariamente tangente a M, es decir, a cada $p \in M$, se le asigna $Z_p \in T_p(R^n)$. Cuando Z es tal que Z_p es tangente a M, $Z_p \in T_p(M) \subset T_p(R^n)$, entonces deci-



Gráfica 6

mos que Z es un campo vectorial tangente a M.

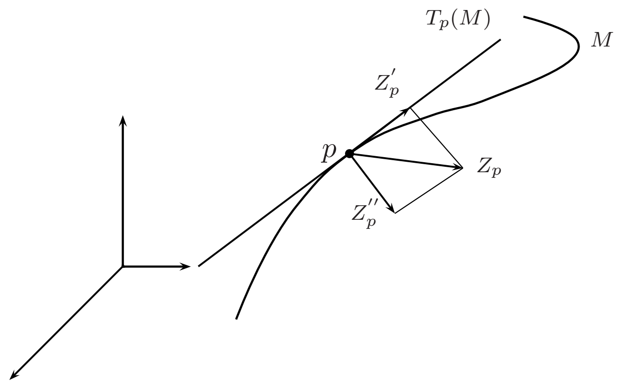
Sea $Z_p = \sum_{\alpha=1}^{n} a^{\alpha}(p)(\partial/\partial x^{\alpha})_p$, diremos que Z es de **clase C^r** si $a^{\alpha}(p) \in C^r$, sobre M para todo $\alpha = 1, \ldots, n$.

Para $p \in M$, el producto interno estándar de $T_p(R^n)$ induce una métrica de Riemann sobre su subespacio $T_p(M)$. Esto nos permite descomponer cualquier vector $Z_p \in T_p(R^n)$, $p \in M$, de manera única como $Z_p = Z_p^{'} + Z_p^{''}$ con $Z_p^{'} \in T_p(M)$ y $Z_p^{''} \in T_p^{\perp}(M)$, donde $T_p^{\perp}(M)$ es el complemento ortogonal de $T_p(M)$. Sean $\pi^{'}$, $\pi^{''}$ las correspondientes proyecciones: $\pi^{'}(Z_p) = Z_p^{'}$ y $\pi^{''}(Z_p) = Z_p^{''}$; $\pi^{'}$, $\pi^{''}$ son transformaciones de $T_p(R^n)$ sobre los subespacios tangente $T_p(M)$ y normal $T_p^{\perp}(M)$ a M. La figura muestra esta descomposición cuando M es una curva en R^n.

Supongamos que Z es un campo vectorial a lo largo de M de clase C^r, Entonces $\pi^{'}(Z)$ y $\pi^{''}(Z)$ son también campos vectoriales que son tangente y normal a M, esto ultimo, siempre y cuando $\pi^{'}(Z)$ y $\pi^{''}(Z)$ resulten diferenciables. Ver([1])

Retomando, Y es un campo vectorial tangente a $M \subset R^n$, si para cada $p \in M$, $Y_p \in T_p(M)$, o equivalentemente $\pi^{'}(Y) \equiv Y$.

Si $p(t)$ es una curva sobre M de por lo menos clase C^1, definida para algún intervalo de valores de t, entonces $Y(t) = Y_{p(t)}$ es un campo vectorial a lo largo



Gráfica 7

de la curva. Como tal, podemos ignorar a M y diferenciar $Y(t)$ como un campo vectorial a lo largo de una curva en R^n obteniendo dY/dt, otro campo vectorial a lo largo de la curva en R^n. En general, dY/dt no es tangente a M, sin embargo, en cada punto $p(t)$ podemos proyectar dY/dt a un vector tangente $\pi^{'}(dY/dt) \in TM$.

La proyección $\pi^{'}(dY/dt)$ sera denotada DY/dt y sera llamada la ***derivada covariante*** del campo vectorial tangente Y a M a lo largo de la curva $p(t)$.
Ahora, Y y $\frac{DY}{dt}$ son campos vectoriales tangentes, y por lo tanto ambos tienen interpretación para una variedad abstracta (M no necesariamente en R^n). Sin embargo, el proceso por el cual $\frac{DY}{dt}$ es obtenido desde Y y $p(t)$ hace uso de inmersiones de M en R^n.

Supongamos que tenemos campos vectoriales $Y_1(t)$ y $Y_2(t)$ a lo largo de $p(t)$ sobre M y que $Y_1(t)$ y $Y_2(t)$ son tangente a M, entonces tenemos las propiedades correspondientes a (3) (4) y (5), es decir, también se cumple que

$$\frac{D}{dt}(Y_1 + Y_2) = \frac{DY_1}{dt} + \frac{DY_2}{dt}, \tag{6}$$

$$\frac{D}{dt}(f(t)Y(t)) = \frac{df}{dt}Y(t) + f(t)\frac{DY}{dt}, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}(Y_1, Y_2) = \left(\frac{DY_1}{dt}, Y_2\right) + \left(Y_1, \frac{DY_2}{dt}\right). \tag{8}$$

La última ecuación tiene sentido, si se considera la métrica de Riemann inducida, es decir, el producto interno sobre $T_p(M)$, en cada $p \in M$, inducido por el producto interno in $T_p(R^n)$.

Dada $M \subset R^n$, sea $Y_{p(t)}$ un campo vectorial definido en cada punto de una curva $p(t)$ en M, el cual, en cada punto es tangente a M, es decir $Y_{p(t)} \in T_{p(t)}(M)$, $Y_{p(t)}$ es un campo vectorial **constante** o **paralelo** si $\frac{DY}{dt} \equiv 0$. Mas generalmente si Y es un campo vectorial tangente sobre toda la variedad M, es constante o paralelo a M si tiene esta propiedad a lo largo de toda curva $p(t)$ en M.

Es importante notar que DY/dt puede ser idénticamente cero aunque dY/dt no lo sea, así el campo vectorial Y puede ser considerado constante como campo vectorial sobre una subvariedad M de R^n y no ser contante considerado como campo vectorial a lo largo de la misma curva en R^n. Por ejemplo, sea $M = S^1$, el circulo en R^2, entonces $t \to (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es la representación paramétrica de M y M puede ser considerado como una curva en si misma. Sea $Y(t)$ el vector unitario tangente a esta curva, entonces tenemos que dY/dt es ortogonal a $Y(t)$, es decir, es normal M; por lo tanto $DY/dt \equiv 0$, aunque dY/dt nunca es cero en TR^2 como campo vectorial. En el caso en el cual M es todo R^n, entonces

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\right).$$

4. Curvas Geodésicas

La curva parametrizada $p(t)$ se dice que es una **geodésica** si su vector velocidad es constante, esto es, si se satisface la condición $(D/dt)(dp/dt) = 0$. Como vimos antes (pág 6, párrafo 1), cuando $M = R^n$ con la métrica usual, esto implica que la curva es una linea recta.

El parámetro de una geodésica no es arbitrario; El hecho que una curva sea una geodésica depende de su forma y de su parametrización, como vemos en el siguiente ejemplo de una linea recta en R^2 descrita por la parametrización $p(t) = (t^3, t^3)$; en este caso

$$\frac{dp}{dt} = 3t^2\frac{\partial}{\partial x^1} + 3t^2\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Como $D/dt = d/dt$ en R^2, tenemos

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\right) = 6t\frac{\partial}{\partial x^1} + 6t\frac{\partial}{\partial x^2} \neq 0.$$

Esta curva $p(t)$ no es una geodésica aunque es una recta. Ver([1])

Otro ejemplo de geodésica es el siguiente: Como cualquier circulo máximo sobre la esfera $S^2 \subset R^3$ es congruente al circulo máximo $t \to p(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, vemos que el vector unitario tangente a cualquier circulo máximo, parametrizado por longitud de arco, tiene la misma propiedad:

$$\frac{DY}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\frac{dp}{dt}\right) \equiv 0.$$

Así las geodésicas son aquellas curvas para las cuales en algún sentido se generaliza el concepto de linea recta, aunque ellas pueden no ser líneas rectas.

Bibliografía

[1] William M. Boothby, *An introduction To Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1986.

[2] Bernard Schutz *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, 1999.

[3] N. Prakash, *Differential Geometry*, McGraw-Hill, 1993.

[4] Y. Choquet-Bruhat, C. Dewitt-Morette, M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, Elseiver Science Publisher B.V, 1989.

[5] M. Nakahara, *Geomety, Topology, and Physics*, Institude of Physics Publishing, 1990.