Dos funciones eulerianas

Rafael Angarita Cervantes
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
ayhombeyguepaje@hotmail.com

Orlando Barrios Bustillo
Estudiante Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C., Colombia
orlando.barrios@web.de

1. Función Gamma

Adrian María Legendre (1752-1833) propuso, en 1814, llamar *Función Gamma* y representar con la letra correspondiente, Γ, a una función que había sido introducida por primera vez en una carta que escribió Leonard Euler (1707-1783) a Christian Goldbach (1690-1764) en el año 1729. Euler la definió en forma infinitesimal como límite de una expresión discreta.

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \tag{1}$$

Es una de las funciones no elementales más importantes del análisis matemático. Se encuentra relacionada con varias consideraciones prácticas y teóricas en física, ingeniería y estadística. La representación moderna de la función Gamma para un valor $\alpha > 0$ está dado por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt \tag{2}$$

La extensión para enteros negativos se tiene con

$$\Gamma(\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)} \tag{3}$$

1.1. Propiedades

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$ Para cualquier número natural α.

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \quad \text{para} \quad \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)$$

(Constante de Euler)

Entre otras.

2. Función Beta

La llamada Función Beta de Euler, es una expresión integral de la forma

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx \tag{4}$$

y tiene, entre otras particularidades, la de estar relacionada con la función gamma de una forma que resulta extremadamente útil a la hora de demostrar algunas de sus propiedades básicas. Admite diversas expresiones, por ejemplo

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta \tag{5}$$

Con la cual se facilita el cálculo de algunas integrales trigonométricas, como por ejemplo, las integrales definidas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{\alpha} t\,dt\,,\ \text{y}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha} t\,dt\,,$$

Que, usando (5), son idénticas a las funciones

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}\,,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

Que también pueden ser expresadas en términos de la función gamma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^\alpha t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha t\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\, \frac{\Gamma\left(1+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$$

2.1. Propiedades

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

$$B(m,n) = B(n,m)$$

$$B(m,n)B(m+n,k) = B(m,k)B(n+k,m) = B(k,m)B(m+k,n)$$

$$B(m_1,m_2)B(m_1+m_2,m_3)\cdots B(m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{n-1},m_n) = \frac{\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\,\cdots\,\Gamma(m_n)}{\Gamma(m_1+m_2+\cdots+m_n)}.$$

3. Diferenciación e Integración de Orden Fraccionario

Por último, una de las aplicaciones más interesantes de la función gamma, es que permite generalizar los conceptos de diferenciación e integración.

Definamos

$$F_0(x) = \int_0^x f(y)\, dy, \quad F_1(x) = \int_0^x F_0(y)\, dy$$

y en general

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-i}(y)\, dy$$

Que representa la n-ésima integral de la función $f(y)$ entre 0 y x, Es equivalente a tener

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x (x-t)^{n-1}\, f(t)\, dt.$$

Si denotamos con D el operador de diferenciación y con D^{-1} el operador

$$\int_0^x \cdots dy$$

Que es el inverso de la diferenciación, podemos escribir

$$F(x) = D^{-1} f(x).$$

Permitiendo definir el operador $D^{-1\gamma}$ para cualquier número real. Así, la integral de orden *gamma* de la función $f(x)$ entre los límites 0 y x está dada por la expresión

$$D^{-\gamma} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x (x-t)^{\gamma-1} f(t)\, dt \tag{6}$$

De igual forma, se define la derivada de orden γ-ésimo, simbolizándolo con D^{γ} . Sea m el menor número entero mayor que k, tal que $k = m - p$, donde $0 < p \leq 1$. Entonces

$$D^k f(x) = D^m D^{-p} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f(t)\, dt.$$

De igual forma, es válido afirmar que

$$D^k f(x) = D^{-p} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^x (x-t)^{p-1} f^{(m)}(t)\, dt.$$

Estas igualdades tienen sentido si la función $f(t)$ tiene derivada continua de orden m-ésimo.

Bibliografía

[1] CAMPBELL, Robert. *Les intégrales eulériennes et leurs applications*. Collection universitaire de mathématiques. París. 1966.

[2] APOSTOL, Tom. *Calculus*. Editorial Reverté. 1972.

[3] COURANT, Richard. *Introduction to calculus and analysis*. Springer - Verlag. 1974.

[4] LANG, Serge. *Undergraduate analysis*. Adddison - Wesley. 1983