VARIACIONES EN TORNO A LAS UNIFORMIDADES Y SISTEMAS DE VECINDADES

Joaquín Luna Torres
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
jlunator@aolpremium.com

Carlos Ochoa Castillo
Profesor Universidad Distrital
Bogotá D.C, Colombia
oochoac@udistrital.edu.co

Resumen

A partir del paralelo entre el conjunto de partes de un conjunto dado y un GL-monoide L, construimos la estructura de L-uniformidad junto con las funciones de vecindad.

Introducción

La categoría de los espacios uniformes permite un tratamiento axiomático de conceptos como filtros de Cauchy y continuidad uniforme presentes en el análisis; estos espacios son indispensables para la aplicación de la topología general a los espacios métricos, grupos topológicos y espacios funcionales. Es natural que el trabajo que se ha desarrollado en los espacios topológicos difusos no pase por alto esta temática, es así que ha demandado la consideración y construcción de estructuras que generalizan las obtenidas en la teoría clásica.

En la primera sección se presenta el concepto de espacio uniforme que incluye la estructura que se pretende estudiar, en la segunda se establece una biyección entre los subconjuntos del producto cartesiano $X \times X$ que contienen la diagonal y una clase de funciones que aquí las denominamos expansivas; es así que dada una uniformidad se expresa en términos de las funciones antes mencionadas. La tercera sección presenta la obtención de la estructura de sistema de vecindades a partir de una uniformidad dada, la cuarta exhibe las propiedades generales que posee un GL-monoide; los resultados principales abordan la construcción de las estructuras uniformes y la consecuente obtención de sistemas de vecindades a partir de funciones expansivas que conmutan con extremos superiores en un GL-monoide, estos resultados se dan en la quinta sección.

1. De la definición Clásica de Uniformidad

De acuerdo con[2], una uniformidad sobre un conjunto X es una estructura determinada por una colección $\mathcal{U} \subset \wp(X \times X)$ que satisface:

(u0) Para todo conjunto $A \in \mathcal{U}$ se tiene que $\Delta \subset A$ donde Δ es la diagonal i.e. $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

(u1) $X \times X \in \mathcal{U}$.

(u2) Si $A \in \mathcal{U}$ y $A \subseteq B \subseteq X \times X$ entonces $B \in \mathcal{U}$.

(u3) Si $A, B \in \mathcal{U}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{U}$.

(u4) Si $A \in \mathcal{U}$ entonces $A_s \in \mathcal{U}$, donde $A_s = \{(y, x) \mid (x, y) \in A\}$.

(u5) Para todo $A \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset A$.

A los conjuntos de $\mathcal{U}$ se les llama entornos de la uniformidad definida en X y al par $(X, \mathcal{U})$ se le denomina espacio uniforme.

2. Uniformidades en un Primer Cambio de Lenguaje

Dada la identidad entre $\wp(X)$ y 2^X (cf. [7]), siguiendo a [5] se presenta ahora una biyección entre la familia de subconjuntos de $X \times X$ que contienen la diagonal Δ

$$\mathfrak{A} = \{U \subseteq X \times X \mid \Delta \subset U\}$$

y la familia de las funciones

$$\mathfrak{B} = \{f : 2^X \to 2^X \mid \forall A \in 2^X, A \subseteq f(A) \text{ y } f \text{ commuta con uniones arbitrarias}\},$$

es decir, $f \in \mathfrak{B}$ si y solo si

- Para cada $A \in 2^X$ se tiene que $A \subseteq f(A)$; es decir f es una *función expansiva*,
- Para toda familia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq 2^X$ se satisface que $f\big(\cup_{i \in I} A_i\big) = \cup_{i \in I} f(A_i)$.

Ahora, dada $U \in \mathfrak{A}$ se considera la función $\Gamma(U) : 2^X \to 2^X$ definida como

$$[\Gamma(U)](A) = U(A) = \{y \in X \mid \exists x \in A \text{ tal que } (x, y) \in U\}$$

para cada $A \in 2^X$; veamos que $\Gamma(U) \in \mathfrak{B}$, en efecto,

- Como $\Delta \subset U$ se tiene que

  $$A = \Delta(A) \subseteq U(A) = [\Gamma(U)](A)$$

  para cada $A \in 2^X$.

- Sea la familia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq 2^X$ entonces

  $$\begin{aligned}[\Gamma(U)]\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) &= U\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{x \in \cup_{i\in I} A_i} U(x)\\ &= \bigcup_{i\in I}\bigcup_{x\in A_i} U(x) = \bigcup_{i\in I} U(A_i)\\ &= \bigcup_{i\in I} [\Gamma(U)](A_i).\end{aligned}$$

en total, se ha establecido una función $\Gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Ahora se considera la función $\Phi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ definida por

$$\Phi(f) = \{(x, y) \in X \times X \mid y \in f(\{x\})\} = \bigcup_{x\in X} \big(\{x\} \times f(\{x\})\big)$$

como $\{x\} \subseteq f(\{x\})$ para cada $x \in X$ se tiene que $\Delta \subseteq \Phi(f)$, esto es, $\Phi(f) \in \mathfrak{A}$. Veamos que $\Phi \circ \Gamma = 1_{\mathfrak{A}}$ y $\Gamma \circ \Phi = 1_{\mathfrak{B}}$. Sea $U \in \mathfrak{A}$ entonces

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Gamma(U) &= \Phi\big(\Gamma(U)\big) = \{(x, y) \in X \times X \mid y \in [\Gamma(U)](\{x\})\}\\ &= \{(x, y) \in X \times X \mid y \in U(x)\} = \{(x, y) \in X \times X \mid (x, y) \in U\}\\ &= U\end{aligned}$$

y para cada $f \in \mathfrak{B}$ y $A \in 2^X$ es

$$\begin{aligned}\big((\Gamma \circ \Phi)(f)\big)(A) &= \big(\Gamma(\Phi)(f)\big)(A) = \Phi(f)(A)\\ &= \{y \in X \mid \exists x \in A, y \in f(\{x\})\}\\ &= \{y \in X \mid y \in \cup_{x\in A} f(\{x\})\} = \{y \in X \mid y \in f(A)\}\\ &= f(A)\end{aligned}$$

en consecuencia Γ y Φ son funciones inversas una de la otra y por consiguiente biyectivas. Es fácil ver que tanto Γ como Φ preservan las relaciones de orden en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ dadas por

$$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2 \quad \text{y} \quad f \leq g \Leftrightarrow f(A) \subseteq g(A) \quad \text{para todo} \quad A \in 2^X$$

respectivamente.

Ahora tomamos una uniformidad sobre X y consideramos su imagen directa bajo la aplicación Γ. Se obtiene así una primera reformulación,

Teorema 2.1. *Si $\mathcal{U} \subset \mathfrak{A}$ es una uniformidad sobre X, entonces la familia $\mathbb{B} = \{\Gamma(U) \mid U \in \mathcal{U}\} \subset \mathfrak{B}$ satisface las siguientes propiedades:*

(b1) Para $f_1, f_2 \in \mathbb{B}$ existe $f_3 \in \mathbb{B}$ tal que $f_3 \leq f_1$ y $f_3 \leq f_2$.

(b2) Si $f \in \mathbb{B}$, $g \in \mathfrak{B}$ y $f \leq g$ entonces $g \in \mathbb{B}$.

(b3) Si $f \in \mathbb{B}$ entonces $f^{\leftarrow} \in \mathbb{B}$, donde

$$f^{\leftarrow}(A) = \cap\{B \subset X \mid f(B^c) \subseteq A^c\}$$

para cada $A \in 2^X$.

(b4) Para toda $f \in \mathbb{B}$, existe $g \in \mathbb{B}$ tal que $g \circ g \leq f$.

Demostración. (b1) Sean $f_1 = \Gamma(U_1), f_2 = \Gamma(U_2) \in \mathbb{B}$ con $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Entonces para cada $A \subset X$ tenemos:

$$\begin{aligned}[\Gamma(U_1 \cap U_2)](A) &= (U_1 \cap U_2)[A] \\ &\subseteq U_1[A] \cap U_2[A] \\ &= [\Gamma(U_1)](A) \cap [\Gamma(U_2)](A) \\ &= f_1(A) \cap f_2(A)\end{aligned}$$

como $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$, $f_3 = \Gamma(U_1 \cap U_2)$ satisface la condición.

(b2) Sea $f = \Gamma(U) \in \mathbb{B}$ con $U \in \mathcal{U}$ y $g = \Gamma(V) \in \mathfrak{B}$ tal que $f \leq g$. Para cada $x \in X$ se tiene que $f(\{x\}) = U[x] \subseteq V[x] = g(\{x\})$, por tanto,

$$U = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times U[x]) \subseteq \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times V[x]) = V$$

como $\mathcal{U}$ es un filtro (cf. [2]) se sigue que $V \in \mathcal{U}$, luego $\Gamma(V) = g \in \mathbb{B}$.

(b3) Sea $f = \Gamma(U) \in \mathbb{B}$ con $U \in \mathcal{U}$, por (u4) $U_s \in \mathcal{U}$ y para cada $A \subset X$,

$$\begin{aligned}[\Gamma(U_s)](A) = U_s[A] &= \bigcup_{x\in A} U_s[x] \\ &= \bigcup_{x\in A}\{y \in X \mid (x,y) \in U_s\} \\ &= \bigcup_{x\in A}\{y \in X \mid (y,x) \in U\}.\end{aligned}$$

Sea $y \in \bigcup_{x\in A}\{y \in X \mid (y,x) \in U\}$ y $B \subseteq X$ tal que

$$[\Gamma(U)](B^c) = U[B^c] \subseteq A^c$$

entonces existe $x \in A$ tal que $(y,x) \in U$ luego $x \notin U[B^c]$ y en consecuencia $y \in B$. De esta manera,

$$\begin{aligned}[\Gamma(U_s)](A) &= \bigcup_{x\in A}\{y \in X \mid (y,x) \in U\} \\ &\subseteq \cap\{B \subseteq X \mid [\Gamma(U)](B^c) = U[B^c] \subseteq A^c\} \\ &= [\Gamma(U)]^{\leftarrow}(A).\end{aligned}$$

Recípromente, sea $y \in \cap\{B \subseteq X \mid [\Gamma(U)](B^c) = U[B^c] \subseteq A^c\}$; como $y \notin \{y\}^c$ se sigue que $[\Gamma(U)](\{y\}) = U[y] \nsubseteq A^c$, es decir $U[y] \cap A \neq \emptyset$, entonces existe $x \in A$ tal que $(y,x) \in U$, lo que significa que $y \in U_s[A] = [\Gamma(U_s)](A)$, luego

$$[\Gamma(U)]^{\leftarrow}(A) = \cap\{B \subseteq X \mid [\Gamma(U)](B^c) \subseteq A^c\} \subseteq [\Gamma(U_s)](A)$$

por tanto, $[\Gamma(U_s)](A) = [\Gamma(U)]^{\leftarrow}(A)$ para obtener ahora si que

$$f^{\leftarrow} = [\Gamma(U_s)] \in \mathbb{B}.$$

(b4) Sea $f = \Gamma(U) \in \mathbb{B}$ donde $U \in \mathcal{U}$; de la condición (u5) existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset U$, así para cada $A \subseteq X$ se tiene

$$\begin{aligned}[\Gamma(W)\circ\Gamma(W)](A) = W[W[A]] &= \{y \in X \mid \exists z \in W[A], (z,y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid \exists x \in A, z \in X, (x,z) \in W \quad \text{y} \quad (z,y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid \exists x \in A, (x,y) \in W \circ W\} = (W \circ W)[A] \\ &= U[A] = [\Gamma(U)](A).\end{aligned}$$

Haciendo $g = \Gamma(W) \in \mathbb{B}$ se obtiene que $g \circ g \leq f$.

□

3. Uniformidades y Sistemas de Vecindades

Dados $\mathcal{U}$ una uniformidad en X y un punto $a \in X$; cada $V \in \mathcal{U}$ produce un conjunto $V(a) = \{y \in X \mid (a, y) \in V\}$, ahora consideramos la colección

$$\mathfrak{N}(a) = \{V(a) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

que se suele llamar el *sistema de vecindades del punto* a; las propiedades de $\mathfrak{N}(a)$ se exhiben a continuación subrayando que están en correspondencia con las propiedades de las uniformidades dadas en la sección 1:

Lema 3.1. *Si $\mathcal{U}$ es una uniformidad en X y $a \in X$ entonces:*

(V0) $a \in V(a)$ para toda $V \in \mathcal{U}$.

(V1) $X \in \mathfrak{N}(a)$.

(V2) Si $S \in \mathfrak{N}(a)$ y $S \subseteq W$ entonces $W \in \mathfrak{N}(a)$.

(V3) Si $S_1, S_2 \in \mathfrak{N}(a)$ entonces $S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{N}(a)$.

(V4) Si $S \in \mathfrak{N}(a)$ entonces existe $T \in \mathfrak{N}(a)$ tal que $S \in \mathfrak{N}(b)$ para todo $b \in T$.

Demostración. De (u0) se tiene que $(a, a) \in V$ para toda $V \in \mathcal{U}$, esto prueba (V0); por (u1) $X \times X$ es un elemento de la uniformidad, luego $X \in \mathfrak{N}(a)$ como se ha anunciado en (V1). Sean $S \in \mathfrak{N}(a)$ y $S \subseteq W$, por ver que $W \in \mathfrak{N}(a)$, esto equivale a mostrar que $W = U(a)$ para algún $U \in \mathcal{U}$. En primer lugar $S = V(a)$ para algún $V \in \mathcal{U}$, además

$$V \subseteq V \cup \{(a, y) \mid y \in W\}$$

luego $U \in \mathcal{U}$ por (u2), por tanto, $U(a) = W \in \mathfrak{N}(a)$ y se obtiene (V2). Dados $S_1, S_2 \in \mathfrak{N}(a)$ entonces $S_1 = V_1(a)$ y $S_2 = V_2(a)$ donde $V_1 \in \mathcal{U}$ y $V_2 \in \mathcal{U}$, como por (u3) se tiene que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$ se sigue que

$$S_1 \cap S_2 = V_1(a) \cap V_2(a) = (V_1 \cap V_2)(a) \in \mathfrak{N}(a)$$

esto prueba (V3). Asumamos ahora que $S \in \mathfrak{N}(a)$, entonces $S = V(a)$ para algún $V \in \mathcal{U}$, por (u5) existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subseteq V$, por tanto, si $(a, b) \in W$ y $(b, z) \in W$ entonces $(a, z) \in V$, es decir, $W(b) \subset V(a)$ para todo $b \in W(a)$, en consecuencia $V(a) \in \mathfrak{N}(b)$ para todo $b \in W(a)$, (V4) se obtiene de aquí haciendo $T = W(a)$. □

4. GL-Monoides

Sea $(L, \leqslant)$ un retículo infinitamente distributivo y completo, esto es, $(L, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo $A \subset L$ el extremo superior $\bigvee A$ y el extremo inferior $\bigwedge A$ están definidos y para todo $\alpha \in L$ se satisface

$$\left(\bigvee A\right) \wedge \alpha = \bigvee \{a \wedge \alpha \mid a \in A\}, \qquad \left(\bigwedge A\right) \vee \alpha = \bigwedge \{a \vee \alpha \mid a \in A\}.$$

En particular, $\top := \bigvee L$ y $\bot := \bigwedge L$ son el máximo y el mínimo de L respectivamente. Se asume además que $\bot \neq \top$ lo que significa que L tiene por lo menos dos elementos. Un $GL-$monoide (ver [6]) es un retículo completo enriquecido con una operación binaria $\otimes$ constituyéndose en una tripleta $(L, \leqslant, \otimes)$ tal que:

(1) $\otimes$ es monótona, es decir, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$ $\alpha \leqslant \beta$ implica $\alpha \otimes \gamma \leqslant \beta \otimes \gamma$;

(2) $\otimes$ es conmutativa, i.e. $\forall \alpha, \beta \in L$, $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$,

(3) $\otimes$ es asociativa, esto es $\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in L$;

(4) $(L, \leqslant, \otimes)$ es entero, i.e. $\top$ actúa como elemento unidad: $\alpha \otimes \top = \alpha$, $\forall \alpha \in L$;

(5) $\bot$ actúa como elemento cero en $(L, \leqslant, \otimes)$, es decir $\alpha \otimes \bot = \bot$, $\forall \alpha \in L$;

(6) $\otimes$ distribuye sobre extremos superiores arbitrarios, esto significa que $\alpha \otimes (\bigvee_j \beta_j) = \bigvee_j (\alpha \otimes \beta_j)$, $\forall \alpha \in L, \forall \{\beta_j : j \in J\} \subset L$;

(7) $(L, \leqslant, \otimes)$ es divisible, i.e. $\alpha \leqslant \beta$ implica la existencia de $\gamma \in L$ tal que $\alpha = \beta \otimes \gamma$.

Por otro lado, todo $GL-$monoide es residuado, i.e. existe una operación binaria adicional "$\longmapsto$" (implicación) en L que satisface la condición:

$$\alpha \otimes \beta \leqslant \gamma \Longleftrightarrow \alpha \leqslant (\beta \longmapsto \gamma) \qquad \forall \alpha, \beta, \gamma \in L.$$

La implicación está dada por:

$$\alpha \longmapsto \beta = \bigvee \{\lambda \in L \mid \alpha \otimes \lambda \leqslant \beta\}.$$

Las propiedades más usuales de los $GL-$monoides, exhibidas en [6], son

(i) $\alpha \longmapsto \beta = \top \Longleftrightarrow \alpha \leqslant \beta$;

(ii) $\alpha \longmapsto (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i (\alpha \longmapsto \beta_i)$;

(iii) $(\bigvee_i \alpha_i) \longmapsto \beta = \bigwedge_i (\alpha_i \longmapsto \beta)$;

(v) $\alpha \otimes (\bigwedge_i \beta_i) = \bigwedge_i (\alpha \otimes \beta_i)$;

(vi) $(\alpha \longmapsto \gamma) \otimes (\gamma \longmapsto \beta) \leqslant \alpha \longmapsto \beta$;

(vii) $\alpha \otimes \beta \leqslant (\alpha \otimes \alpha) \vee (\beta \otimes \beta)$.

Ejemplos importantes de GL-monoides son las álgebras de Heyting y las MV-álgebras. En verdad (ver [4]), un *álgebra de Heyting* es un GL-monoide del tipo $(L, \leqslant, \wedge, \vee, \wedge)$ (es decir, en el caso de un álgebra de Heyting $\wedge = \otimes$). Por otro lado (ver [6]), un GL-monoide es una *MV-algebra* si $(\alpha \longmapsto \perp) \longmapsto \perp = \alpha \quad \forall \alpha \in L$. Así, en una MV-algebra existe una involución ${}^c : L \to L$ que invierte el orden y que se define de manera natural como $\alpha^c := \alpha \longmapsto \perp \quad \forall \alpha \in L$.

Si X es un conjunto y L es un GL-monoide, entonces el conjunto de L-partes L^X hereda la estructura de GL-monoide. En particular los L-conjuntos 1_X y 0_X definidos por $1_X(x) := \top$ y $0_X(x) := \perp$ para todo $x \in X$ son el máximo y el mínimo en L^X respectivamente.

5. Uniformidades Y Vecindades en un GL-monoide

En lo que sigue L denota un GL-monoide arbitrario tal y como se presenta en [6]; con el objeto de dar una noción de uniformidad en el ambiente L, se tiene el concepto de funciones expansivas. Una apliación $f : L \to L$ es *expansiva* si para cada $a \in L$ se tiene que $a \leqslant f(a)$, es decir $1_L \leqslant f$; por otro lado, se dice que $f : L \to L$ *conmuta con extremos superiores* si

$$f(\bigvee_\lambda x_\lambda) = \bigvee_\lambda f(x_\lambda).$$

Al conjunto de las aplicaciones expansivas que conmutan con extremos superiores se le nota con $\widetilde{L^L}$. Para cada $f \in \widetilde{L^L}$ se define la función $\hat{f} : L \to L$ como:

$$\hat{f}(b) = \bigwedge \{a \in L \mid b \leqslant [f(a \to \perp) \to \perp]\} \qquad \forall b \in L.$$

Lema 5.1. *Si $f \in \widetilde{L^L}$ entonces $\hat{f} \in \widetilde{L^L}$.*

Demostración. Sea $f \in \widetilde{L^L}$, por ver en primer lugar que $\hat{f}$ es expansiva; como

$$b \leqslant a \Leftrightarrow a \longmapsto c \leqslant b \longmapsto c \quad \text{y} \quad a \longmapsto \bot \leqslant f(a \longmapsto \bot),$$

la afirmación $b \leqslant f(a \longmapsto \bot) \longmapsto \bot$ es equivalente a

$$a \longmapsto \bot \leqslant f(a \longmapsto \bot) \leqslant b \longmapsto \bot$$

de donde se sigue que $b \leqslant a$, por consiguiente

$$b \leqslant \bigwedge \{a \in L \mid b \leqslant [f(a \to \bot) \to \bot]\} = \hat{f}(b).$$

Para ver que la función $\hat{f}$ conmuta con extremos superiores, se considera la colección $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset L$ y los conjuntos:

$$B = \{y \in L \mid \bigvee_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \leqslant f(y \longmapsto \bot) \longmapsto \bot\}$$
$$A_\lambda = \{a \in L \mid x_\lambda \leqslant f(a \longmapsto \bot) \longmapsto \bot\}, \ \forall \lambda \in \Lambda.$$

El enunciado $y \in B$ es equivalente a

$$f(y \longmapsto \bot) \leqslant \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda \longmapsto \bot)$$

esto es,

$$f(y \longmapsto \bot) \leqslant x_\lambda \longmapsto \bot, \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

es decir, para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene que $x_\lambda \leqslant f(y \longmapsto \bot) \longmapsto \bot$ de donde se sigue que $y \in A_\lambda$, así $B \subset A_\lambda$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \leqslant \bigwedge B &\Leftrightarrow \hat{f}(x_\lambda) \leqslant \hat{f}(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda) \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \hat{f}(x_\lambda) \leqslant \hat{f}(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda) &= \bigwedge \{c \in L \mid f(c \longmapsto \bot) \leqslant (\bigvee_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda) \longmapsto \bot\} \\ &= \bigwedge \{c \in L \mid f(c \longmapsto \bot) \leqslant \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda \longmapsto \bot)\} \\ &\leqslant \bigwedge \{c \in L \mid f(c \longmapsto \bot) \leqslant x_\lambda \longmapsto \bot\} = \hat{f}(x_\lambda) \\ &\leqslant \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \hat{f}(x_\lambda) \end{aligned}$$

y la conclusión se sigue. $\square$

Con estos instrumentos, extendemos al ambiente L los conceptos dados por W. Kotzé en [5]; una L-*uniformidad* es una función $\mathcal{U} : \widetilde{L^L} \to L$ que satisface:

(lu0) $\mathcal{U}(1_L) = \top$.

(lu1) $f \leqslant g$ implica $\mathcal{U}(f) \leqslant \mathcal{U}(g) \quad \forall f, g \in \widetilde{L^L}$,

(lu2) Para $f, g \in \widetilde{L^L}$ se tiene que $\mathcal{U}(f) \otimes \mathcal{U}(g) \leq \mathcal{U}(f \otimes g)$.

(lu3) Para $f, g \in \widetilde{L^L}$ existe $h \in \widetilde{L^L}$ con $h \leq f$ y $h \leq g$ tal que

$$\mathcal{U}(f) \otimes \mathcal{U}(g) \leqslant \mathcal{U}(h).$$

(lu4) Para cada $f \in \widetilde{L^L}$ se tiene que $\mathcal{U}(f) \leqslant \mathcal{U}(\hat{f})$.

(lu5) Para cada $f \in \widetilde{L^L}$ existe $g \in \widetilde{L^L}$ tal que $g \circ g \leqslant f$ y $\mathcal{U}(f) \leqslant \mathcal{U}(g)$.

Ahora; de manera natural se obtiene la noción de sistema de vecindades. Una aplicación $\mathfrak{B} : L \to L$ es una *función de vecindad* sobre L si

(lv0) $\mathfrak{B}(\top) = \top$.

(lv1) Si $a \leqslant b$ entonces $\mathfrak{B}(a) \leqslant \mathfrak{B}(b)$.

(lv2) Para $a, b \in L$ se tiene que $\mathfrak{B}(a) \otimes \mathfrak{B}(b) \leq \mathfrak{B}(a \otimes b)$.

(lv3) Para cada $a \in L$ es $\mathfrak{B}(a) \leqslant \bigvee\{\mathfrak{B}(b) \mid b \leqslant \mathfrak{B}(a)\}$.

Si se examinan las condiciones del lema 3.1, se encuentra que el sistema de vecindades de un punto incluye entre sus propiedades el concepto de filtro; con el propósito de mantener el paralelo con estas L-estructuras y de motivar la búsqueda o construcción de un criterio de convergencia asociado a las $L-$uniformidades se recuerda el concepto de L-filtro en L. Un L-filtro en L es una aplicación $\mathcal{F} : L \longrightarrow L$ que satisface:

(Fil1) $\mathcal{F}(\top) = \top, \quad \mathcal{F}(\bot) = \bot$

(Fil2) Si $a \leqslant b$ entonces $\mathcal{F}(a) \leqslant \mathcal{F}(b)$

(Fil3) Para cada par a, b se tiene que $\mathcal{F}(a) \otimes \mathcal{F}(b) \leqslant \mathcal{F}(a \otimes b)$.

Es evidente que si $\mathfrak{B} : L \to L$ es una función de vecindad sobre L, entonces es un L-filtro en L.

Teorema 5.2. *Dada $\mathcal{U} : \widetilde{L^L} \to L$ una L - uniformidad, para cada $p \in L$, el conjunto*

$$V_p = \{f(p) \mid f \in \widetilde{L^L} \quad y \quad \mathcal{U}(f) \in L^0 = L - \{\bot\}\}$$

es un filtro de vecindades de p en L.

Demostración. Con inspiración en el lema 3.1 tenemos:

1. Como $1_L \in \widetilde{L^L}$ y $1_L(p) = \top$, entonces $\top \in V_p$.

2. Si $a, b \in V_p$ entonces existen $f, g \in \widetilde{L^L}$ tales que $a \in f(p)$ y $b = g(p)$; por consiguiente:
$$a \otimes b = f(p) \otimes g(p) = (f \otimes g)(p),$$
esto es $a \otimes b \in V_p$.

3. Asumamos que $a \in V_p$ y $a \leq b$ por ver que $b \in V_p$. Como $a \in V_p$ existe $f \in \widetilde{L^L}$ tal que $a = f(p)$; consideremos $g : L \to L$ definida por $g(x) = f(x) \vee b$ para cada $x \in L$; por un lado $g \in \widetilde{L^L}$, pues:

    a) g es expansiva puesto que para cada $x \in L$ se tiene que
    $$x \leq f(x) \leq f(x) \vee b = g(x),$$

    b) g conmuta con extremos superiores pues
    $$g(\bigvee_\lambda x_\lambda) = f(\bigvee_\lambda x_\lambda) \vee b = (\bigvee_\lambda f(x_\lambda)) \vee b = (\bigvee_\lambda f(x_\lambda) \vee b) = \bigvee_\lambda g(x_\lambda),$$

    y por el otro lado $g(p) = f(p) \vee b = a \vee b = b$ como se había anunciado.

4. Finalmente, sea $s \in V_p$, se pretende ver que existe $t \in V_p$ tal que $s \in V_t$. En primer lugar existe $f \in \widetilde{L^L}$ tal que $f(p) = s$, y también existe $g \in \widetilde{L^L}$ de manera que $g \circ g \leq f$; ahora si $t = g(p)$ entonces $t \in V_p$ y
$$g(g(p)) = g(t) \leq f(p) = s$$
de donde se deduce que $s \in V_t$ aplicando el ítem anterior.

□

Teorema 5.3. *Si* $\mathcal{U} : \widetilde{L^L} \to L$ *es una* L*-uniformidad y* $p \in L$ *entonces la función* $\mathfrak{B}_p : L \to L$ *definida por*

$$\mathfrak{B}_p(x) = \begin{cases} \mathcal{U}\left(\bigvee\{g \in \widetilde{L^L} \mid g(p) = x\}\right), & si \quad \{g \in \widetilde{L^L} \mid g(p) = x\} \neq \emptyset, \\ \perp, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

es una función de vecindad.

Demostración. Como $1_L(p) = \top$ y $\mathcal{U}(1_L) = \top$, se tiene (lv0) que es $\mathfrak{B}_p(\top) = \top$. Para verificar (lv1), se toman $a, b \in L$ con $a \leq b$, sucede alguna de las siguientes tres posibilidades:

- $a \neq f(p)$ y $b \neq f(p)$ para toda $f \in \widetilde{L^L}$; en tal caso

$$\mathfrak{B}_p(a) = \perp = \mathfrak{B}_p(b).$$

- $a \neq f(p)$ para toda $f \in \widetilde{L^L}$ y $b = g(p)$ para alguna $g \in \widetilde{L^L}$ entonces

$$\mathfrak{B}_p(a) = \perp < \mathfrak{B}_p(b) = \mathcal{U}\left(\bigvee\{g \in \widetilde{L^L} \mid g(p) = b\}\right).$$

- Para algún $f \in \widetilde{L^L}$ se tiene que $f(p) = a$, la conclusión se sigue del ítem 3. del teorema 4.2.

La propiedad (lv2) se obtiene utilizando la metodología usada para obtener (lv1) y el ítem 2. de la prueba del teorema 4.2. La propiedad (lv3) es consecuencia inmediata del ítem 4. de la prueba del teorema 4.2. □

A la función $\mathfrak{B}_p$ se le llama *sistema de* L*-vecindades de* p *asociado a la* L*-uniformidad* $\mathcal{U}$.

6. Preguntas y Observaciones

Con el ánimo de discutir e iniciar la construcción del concepto de convergencia a partir de las L-uniformidades, presentamos ahora una versión débil del concepto de función expansiva que corresponde al de conjunto V-pequeño dado en [2] para

V un elemento de una uniformidad. Dado $p \in L$ se define $\phi_p : L \longrightarrow L$ como sigue:

$$\phi_p(x) = \begin{cases} p, \text{si } x \leqslant p, \\ x, \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con las ideas anteriores; proponemos definir L-filtro de Cauchy como sigue: $\mathcal{F} : L \longrightarrow L$ es un *L-filtro de Cauchy* con respecto a una L-uniformidad $\mathcal{U} : \widetilde{L^L} \rightarrow L$ si para cada $f \in \widetilde{L^L}$ con $\perp < \mathcal{U}(f)$ existe $p \in L$ tal que $\perp < \mathcal{F}(p)$ y $\phi_p \leqslant f$.

Hasta ahora se ha laborado con el concepto de L-filtro $\mathcal{F} : L \longrightarrow L$ que satisface (Fil1), (Fil2) y (Fil3); pero con base en la analogía entre $\wp(X)$ y L uno puede proponer la definición de filtro en L como un subconjunto $\mathbb{F}$ no vacío de L que cumple:

1. $\perp \notin \mathbb{F}$
2. Si $a, b \in \mathbb{F}$, entonces $a \otimes b \in L$
3. Si $a \in \mathbb{F}$ y $a \leq b$ entonces $b \in \mathbb{F}$

y el siguiente paso es tratar de establecer una correspondencia entre filtros $\mathbb{F}$ en L y L-filtros $\mathcal{F} : L \longrightarrow L$.

Lo anterior para poder definir que un L-filtro $\mathcal{F} : L \longrightarrow L$ converge a un punto p si $\mathfrak{B}_p \leq \mathcal{F}$ y relacionar vía el Teorema 4.2.

Bibliografía

[1] Jiri Adamek, Horst Herrlich, George Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, John Wiley & Sons (New York, 1990).

[2] Nicolas Bourbaki, *General Topology*, Addison-Wesley (Massachusetts, 1966).

[3] Ulrich Höhle and Alexander P. Šostak, *Fixed-Basis Fuzzy Topologies*, In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher (Massachusetts, 1999).

[4] Peter T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge University Press, (Cambridge, 1982).

[5] W. Kotzé, *Uniform Spaces*, In: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Kluwer Academic Publisher (Massachusetts, 1999).

[6] A P. Šostak, *Fuzzy functions and an extension of the category L-Top of Chang-Goguen L-topological spaces*, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium, (Prague, Czech Republic, 2001).

[7] Manuel Suarez M. *Topología Conjuntista - Una Presentación Buleana-Adjunta*, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Tunja, 1992).