De las adjuntas a la topología

Raúl Andrés Leal
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C., Colombia
rogemodron@hotmail.com

Dedicado a Lorenzo Acosta quien me presento a las Adjuntas

Resumen

Se presenta una justificación de la definición de espacio topológico usando funciones adjuntas entre conjuntos ordenados. Nos centramos en mostrar por que se tienen uniones arbitrarias y tan solo intersecciones finitas.
Se presentan además algunas situaciones básicas de adjunción en topología.

1. Introducción

El presente escrito es uno de los resultados de unos encuentros que tuvieron el profesor *Carlos Ruiz Salgéro* y el autor durante el primer semestre del 2004 en la Universidad Sergio Arboleda.

Las reuniones anteriormente mencionadas, pretendían, en principio, que el autor pudiera entender un poco más a fondo el uso de las categorías en la topología. Para esto, el profesor Ruiz planteo un proyecto de investigación el cual fue titulado, por el mismo, *Los capítulos Que se le olvidaron a Bourbaki*. En este proyecto se pretendían llenar algunas de las faltas que se encontraban en el libro de *Topología General* escrito por el grupo Bourbaki, no faltas matemáticas sino faltas de justificación acerca de algunas definiciones y falta de resultados más generales que mostrara explícitamente como, en el susodicho libro, implícitamente había un fuerte componente categórico.

En la primera reunión después de leer la primera hoja del primer capítulo, encontramos que en aquella hoja se presenta la definición de una estructura topológica y la definición de un espacio topológico, surge una pregunta completamente natural e inocente:

¿Por qué la definición es así?

Intentar responder esta pregunta fue lo que ocupó al autor en las siguientes reuniones con el doctor Ruiz.

Muchos matemáticos considerarían esta pregunta impertinente e incluso estúpida dando una respuesta del tipo:

> *Es una definición y ya. Si se define de otra manera puede que no llegue a un espacio topológico de los usuales, además funciona bien.*

Pero este tipo de respuesta deja un sabor de boca un tanto amargo, del tipo del que queda cuando a los niños se les responde con algo como: *porque soy su papá y punto*. Esta respuesta, a criterio del autor, dista mucho de ser una respuesta aceptable para un matemático, supuesto científico, que alardea del uso de la racionalidad en su disciplina.

Otros matemáticos más conciliadores dan una respuesta del tipo:

> *La definición actual de espacio topológico tardó mucho tiempo en ser formulada. Varios matemáticos -Fréchet, Hausdorff y otros- propusieron distintas definiciones a lo largo de muchos años en las primeras décadas del siglo veinte, pero fue bastante más tarde cuando los matemáticos establecieron la definición que parecía más apropiada*[1].

Esta respuesta es mucho más satisfactoria que la anterior, pero aún molesta un poco. Molesta en el sentido que actualmente la topología parece ser una de las áreas mas básicas de las matemáticas y decir que la definición de las bases de las matemáticas se entiende sólo después de que el trabajo matemático ha sido hecho, parece dejar mucho al azar.
Siendo la última respuesta dada, una respuesta de sobremanera aceptable, surge más bien una modificación de la pregunta inicial:

¿Se podrá dar una definición natural de topología?

Es decir: ¿Se podrá justificar la definición de topología usando principios más básicos?

La pregunta está orientada especialmente a explicar la discrepancia que existe en la definición, usual, acerca de las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas. Este aparente desequilibrio entre las uniones y las intersecciones parece poco natural, luego la pregunta se dirige concretamente a justificar el porqué de pedir uniones arbitrarias y tan solo intersecciones finitas.

[1] Munkres p85

Una respuesta que a veces se da a este desequilibrio es la siguiente: Tomemos el espacio topológico de los reales con la topología usual. Consideremos la familia de abiertos de la forma $(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$; $n \in \mathbb{N}$, al hacer la intersección de todos estos obtenemos $\{0\}$ el cual no es abierto, así que no se puede pedir que los abiertos sean cerrados para intersecciones arbitrarias.

Esta última respuesta es inaceptable, pues el contraejemplo propuesto cae en un flagrante circulo vicioso. Esto debido a que se presupone de antemano que los reales ya forman un espacio topológico, con la definición usual, y que este espacio topológico no tiene a $\{0\}$ como abierto, lo cual no justifica que no se deban dar intersecciones arbitrarias.

2. Acerca de la creencia

Intentar saber como se dan las ideas matemáticas es un problema que ha ocupado a filósofos de las matemáticas y psicólogos durante mucho tiempo, en este escrito no se va a resolver este problema, pero en esta sección se presentaran algunas de las razones que el autor considera lo llevaron a dar respuesta a la última pregunta planteada en la sección anterior. Las razones aquí presentadas son de carácter filosófico. Si usted, estimado lector, es de los que considera que la filosofía no sirve para las matemáticas puede saltar esta sección y los párrafos de las siguientes secciones en los cuales se refiera a argumentos filosóficos, el autor procurara que los argumentos matemáticos se puedan seguir sin necesidad de ver por fuera de su aparato formal, lo cual no implica que sea la forma más fácil de hacerlo.

Preguntarse acerca de el quehacer matemático siempre es una trabajo difícil, Karl Weierstrass, matemático fundador del análisis moderno, alguna vez dijo:

> *Es verdad que un matemático que no tenga algo de poeta nunca será un matemático perfecto.*

En esta frase de Weierstrass se puede ver como este matemático alemán equipara la labor matemática a la labor poética, luego el hacer matemáticas es una creación artística del intelecto humano, así que al igual que en el arte los procesos de creación se pueden dar por diferentes elementos.

Por ejemplo los artistas neoclásicos creían que la creación artística se daba imitando a los clásicos, solo el arte estructurado de esta manera podía ser arte, pero por otra parte los artistas románticos decían que la creación artística se hacia intentando describir las emociones humanas, intentando entrar en contacto con la naturaleza. Igual ambas corrientes se pueden considerar artísticas.

En matemáticas pasa igual, por ejemplo Bertrand Russell creía que la creación matemática estaba basada en la lógica y lo único que hacia el matemático era descubrir la matemática. Pero por ejemplo en contraposición Poincare decía que la creación matemática se daba de manera espontanea por un trabajo inconsciente.

El autor considera que la posición de Poincare tiende a ser bastante acertada con respecto a como se le ocurren las ideas a los matemáticos, pero considera que hay un poco mas que un simple trabajo inconsciente. Tiene que haber algo más pues en el momento de crear teorías no se tienen unas reglas fijas ni unos principios básicos que puedan ser trabajados inconscientemente, sino que el matemático debe crear estas reglas y explícitar los principios básicos para fundamentar su teoría. La pregunta que surge entonces es:

¿En que forma logra el matemático decidir que reglas o principios básicos va a utilizar?

Una forma, como se dijo anteriormente, parece ser por abstracción de ejemplos particulares, pero decir que es sólo abstracción, no permite ver si las teorías creadas son naturales o artificiales.

El autor considera que la abstracción es un método efectivo para la formulación de teorías, pero debe estar basado en el principio básico de la *creencia*, el matemático debe creer algo para poder hacer su abstracción. Usando esta creencia el matemático puede justificar su definiciones, reglas básicas, axiomas y demás argumentando que todas estas son acordes con su creencia. Pero está creencia debe ser una creencia a la cual se llega por una reflexión honesta acerca de lo que se quiere hacer. Esta creencia debe tener una base filosófica firme. Por ejemplo Bolyai crea la geometría no euclidiana basado en una fuerte creencia de que existe la ciencia del espacio absoluto. Creyendo esto, lo cual lo impulsa a continuar, logra hacer toda una teoría para le geometría no euclidiana. En el mismo tema pero en contraposición, debido a falta de creencia, o mas bien creencia en sentido opuesto, es que Saccheri no es el primero en formular explícitamente la geometría no euclidiana, Saccheri no cree que Euclides tenga errores, Saccheri cree que la geometría euclidiana es la única posible, y debido a estas creencias no puede formular la geometría no euclidiana.

Usando esto, el autor modifica la frase de Weierstrass en la siguiente:

Es verdad que un desarrollo matemático que no tenga algo de creencia filosófica nunca será un desarrollo matemático perfecto

Según esto, para poder responder la pregunta que inspira este trabajo hay que buscar una creencia, una creencia que permita bosquejar un camino para definir naturalmente una topología.

Buscando esta creencia, y tomando en cuenta que el autor no sabe topología, se plantea una pregunta que cualquier persona que trabaje en topología sabe que es difícil e incluso imposible de responder, pero como el autor no sabe esto plantea la siguiente pregunta:

¿Que es lo que yo quiero cuando hago topología?

Y como el trabajo que ha hecho en topología es muy poco, tiene la imprudencia de intentar responder la pregunta anteriormente planteada.

Los libros de divulgación a veces llaman a la topología la geometría del caucho, pero cuando se empieza a estudiar topología es un tanto difícil creer en esta afirmación pues en las clases de topología general nunca se habla de forma ni de geometría.

Mas bien cuando se asocia una topología τ a un conjunto X, inmediatamente para cada punto $x \in X$ se tienen las vecindades de x según τ, con estas vecindades se pueden decir ciertas cosas del punto, por ejemplo que ninguna función es continua o que todas son continuas, en fin, todo depende de la topología τ. Pero algo que se puede decir es: Si un punto y esta en las mismas vecindades de x, entonces para τ x e y se comportan igual, es decir son iguales a los ojos de τ.

entonces podríamos pensar una topología como algo que da información acerca de los puntos de X, la gracia de la topología es estudiar los puntos usando sus vecindades, es decir que estudiamos los puntos por aproximación, decimos como se comporta el punto mirando como se comportan sus vecinos. Luego una topología es algo da información acerca de los elementos del espacio

Hay otra teoría que hace algo similar, es la teoría de categorías. No es necesario saber que es una categoría, pues no trabajaremos con categorías en general, pero la idea es que en una categoría no se estudian los objetos por su interior sino por la forma en que se relacionan con sus otros objetos, igualmente dependiendo de la categoría, se puede decir que un objeto es vacío, un producto o otras cosas.

Una categoría se compone de objetos, morfismos y una ley de composición. Los objetos son los individuos de estudio, los morfismos son la información que se tiene de los objetos y la composición es una forma de manejar dicha información dentro de la categoría.

En teoría de categorías existe formas de pasar la información de una categoría a otra, son los llamados funtores. Un funtor entre categorías es una función de objetos en objetos y morfismos en morfismos la cual respeta la composición, las identidades los dominios y codominios.

Dado un conjunto X, hay una categoría, no trivial, naturalmente asociadas a X, a saber $\mathcal{P}(X)$, luego lo natural es que una topología sea un funtor entre categorías de este tipo.

Se podría pensar que lo mejor seria buscar un funtor que pasara información de la manera más fiel posible, es decir un isomorfismo, pero lo que se puede decir con la topología no es lo mismo que se puede decir con el conjunto así que un traspaso de información tan perfecto no parece ser el adecuado para la topología. El funtor buscado debe ser un funtor que permita pasar la información y devolverla de manera adecuada, es decir que si se puede decir algo en el conjunto se puede decir algo en la topología.

En teoría de categorías existen unos funtores que permiten paso y vuelta de información de manera muy adecuada, son los llamados funtores adjuntos.

Luego surge la siguiente hipótesis basada en las creencias descritas anteriormente:

Una topología debe estar fuertemente relacionada con un par de funtores adjuntos entre categorías del tipo de la categoría $\mathcal{P}(X)$

En lo que sigue de este articulo se mostrara como usando esto se puede responder la pregunta inicial.

3. Adjuntas entre conjuntos ordenados

En la presente sección trataremos algunos teoremas generales sobre adjuntas entre conjuntos ordenados, si el lector esta bien familiarizado con el tema puede saltar esta sección sin ningún problema.

Recordamos que un orden es una relación reflexiva y transitiva. A una relación de estas, en general, la notamos por símbolos de la forma $\leqq$.

Definición 1. Un par de funciones $f : X \to Y$; $g : Y \to X$, entre conjuntos ordenados, se dicen un par adjunto, si y solo si, para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$ se tiene

$$f(x) \lneqq y \Leftrightarrow x \leqq g(y).$$

En este caso decimos que f es adjunta a derecha de g ó que g es adjunta a izquierda de f, y lo notamos $f \dashv g$

Cuando se tiene una función, en este caso dos, entre conjuntos ordenados, lo más natural es preguntarse si preserva el orden, es decir preguntarse si la función es funtor entre conjuntos ordenados.

Nota 1. A partir de ahora cuando nos refiramos a funciones, nos referiremos a funciones entre conjuntos ordenados.

Tomemos $a \leqq b$ elementos de X. ¿Qué relación tienen $f(a)$ y $f(b)$?.

Si se tuviera $f(a) \leqq f(b)$, por la adjunción tendríamos $a \leqq gf(b)$. Pero sabemos que $f(b) \leqq f(b)$ así que podemos concluir que $b \leqq gf(b)$, pero como $a \leqq b$ obtenemos que $a \leqq gf(b)$ y por consiguiente, usando de nuevo la adjunción podemos decir que $f(a) \leqq f(b)$, análogamente para g. En resumen tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1. *Si una función $f : X \to Y$ tiene adjunta por derecha $g : Y \to X$, entonces tenemos que:*

1. *f y g son monótonas.*
2. *$x \leqq gf(x)$, para todo $x \in X$*
3. *$fg(y) \leqq y$, para todo $y \in Y$*

Pero realmente si tenemos $1, 2, 3$ tenemos que $f \dashv g$ pues si tomamos x elemento de X e y elemento de Y y suponemos que $f(x) \leqq y$, por monotonía tenemos $gf(x) \leqq g(y)$, pero gracias a dos, podemos concluir $x \leqq g(y)$. De manera análoga podemos ver que la otra implicación también es valida, es decir que realmente tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1. *Una función $f : X \to Y$ tiene adjunta por derecha $g : Y \to X$, si y solo si tenemos que:*

1. *f y g son monótonas.*

2. *$x \leqq gf(x)$, para todo $x \in X$*

3. *$fg(y) \leqq y$, para todo $y \in Y$*

Rápidamente se puede sospechar que las adjuntas son únicas. Supongamos que tanto g como g' son adjuntas a izquierda de f, por tres sabemos que $fg(y) \leqq y$, pero g' es adjunta así que $g(y) \leqq g'(y)$, igualmente podemos ver que $g'(y) \leqq g(y)$, y entonces $g(y) = g'(y)$.
Una proposición muy útil es la llamada regla de dos contra uno:

Proposición 2. *Sea f una función con adjunta a derecha g, tenemos que:*

- *$f\,g\,f = f$,*
- *$g\,f\,g = g$.*

3.1. Ejemplos

- La función $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es adjunta a izquierda de la función $[-] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

- Dada una función $f : A \to B$, si tomamos $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, la imagen directa, y a su vez $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, la imagen inversa. Tenemos que f es adjunta a izquierda de f^{-1}. Este adjunción es constantemente usada en topología.

- $ln : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es adjunta a izquierda y a derecha de $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Realmente este es un caso particular de la siguiente proposición:

  Proposición 3. *Una función f es adjunta derecha y a izquierda de una función g si y solo si $g = f^{-1}$.*

- Llamemos $\mathcal{T}\wr_{\surd}(X)$ al conjunto de topologías sobre X, entonces $i : \mathcal{T}\wr_{\surd}(X) \to \mathcal{PP}(X)$ es adjunta a izquierda de la función $\langle - \rangle : \mathcal{PP}(X) \to \mathcal{T}\wr_{\surd}(X)$, la cual toma una familia de conjuntos y le asigna la menor topología que tiene como abiertos a todos los elementos de la familia escogida.

- Dada una topología τ, llamemos $\mathcal{OP}$ al conjunto de abiertos de τ. Tenemos entonces que $int : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{OP}$ es adjunta a derecha de $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{OP}$.

- Dada una topología τ, llamemos $\mathcal{CL}$ al conjunto de cerrados de τ. Tenemos entonces que $CL : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{CL}$ es adjunta a izquierda de $i : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{CL}$.

Usando estos dos últimos ejemplos podemos ver que nuestra hipótesis empieza a tomar fuerza ya que si tenemos una topología entonces tenemos una función con adjunta, falta preguntarse por la otra dirección e intentar usar las adjuntas para justificar el porqué de pedir tan solo intersecciones arbitrarias.

3.1.1. Un uso de adjuntas en topología

Dada una topología τ, consideremos el siguiente par de funciones $int : \mathcal{CL} \to \mathcal{OP}$ y $Cl : \mathcal{OP} \to \mathcal{CL}$.

Es fácil ver que ambas son funciones monótonas.

Tomemos C cerrado y A abierto según la topología dada.

Sabemos que $int(C) \subseteq C$, usando que la clausura es monótona y que la clausura de un cerrado es el mismo obtenemos $Cl(int(C)) \subseteq C$. Con un argumento similar podemos ver que $A \subseteq int(CL(A))$.

Podemos entonces concluir, en virtud del teorema 1, que $int : \mathcal{CL} \to \mathcal{OP}$ es la adjunta derecha de $Cl : \mathcal{OP} \to \mathcal{CL}$.

Usando esta adjunción podemos demostrar el siguiente teorema de Kuratowski:

Teorema 2. *Dado un espacio topológico $\langle X, \tau \rangle$, y un subconjunto A, arbitrario, de X, si aplicamos sucesivamente las operaciones de clausura y complemento a el conjunto A, a lo mas podemos obtener 14 conjuntos distintos.*

Para ver esto hay que recordar que dado cualquier subconjunto A de X tenemos que:

- $int(A^c) = [cl(A)]^c$
- $cl(A^c) = [int(A)]^c$

Usando esto y al regla de dos contra uno, tenemos las siguientes sucesiones de conjuntos:

$$A \xrightarrow{c} A^c \xrightarrow{cl} cl(A^c) \xrightarrow{c} int(A) \xrightarrow{cl} cl\,int(A) \xrightarrow{c} int\,cl(A^c) \xrightarrow{cl}$$
$$cl\,int\,cl(A^c) \xrightarrow{c} int\,cl\,int(A) \xrightarrow{cl} cl\,int\,cl\,int(A) = cl\,int(A),$$

la idea de esta sucesiones es mantener el complemento al final de los operadores,

$$A \xrightarrow{cl} cl(A) \xrightarrow{c} int(A^c) \xrightarrow{cl} cl\, int(A^c) \xrightarrow{c} int\, cl(A) \xrightarrow{cl} clint\, cl(A) \xrightarrow{c}$$
$$int\, cl\, int(A^c) \xrightarrow{cl} clint\, cl\, int(A^c) = cl\, int(A^c)$$

Contando los conjuntos podemos ver que hay catorce tal como se quería demostrar.

Pero volvamos a las generalidades sobre adjuntas entre conjuntos ordenados.

Tomemos $f : X \to Y$ adjunta a izquierda de $g : Y \to X$. Supongamos que los conjuntos tienen máximo. Sabemos que $f(1_X) \leqq 1_y$, entonces por la adjunción tendríamos que $1_X \leqq g(1_Y)$. Pero esto significa que $g(1_Y) = 1_X$, es decir que g preserva el máximo. Análogamente podemos ver que si los conjuntos tienen mínimo, entonces f lo preserva.

Proposición 4. *Sea $f : X \to Y$ adjunta a izquierda de $g : Y \to X$, entonces*

- *Si X e Y tienen máximo entonces g lo preserva.*
- *Si X e Y tienen mínimo entonces f lo preserva.*

¿Que pasa entonces si tomamos un conjunto $A \subseteq X$?

Tomando en cuenta lo anterior, pareciera ser que f debería preservar el mínimo de A, si existe. Pero hay que recordar que el ínfimo es la máxima cota inferior, la cual no siempre esta en A, así que realmente es un supremo. Entonces lo natural no es que f preserve el ínfimo sino que preserve el supremo de A, es decir que si a es el supremo de A entonces $f(a)$ es el supremo de $f(A)$.

Como a es mayor que todos los elementos de A y f es monótona tenemos que $f(a)$ es cota superior de $f(A)$. Tomemos b otra cota superior, esto quiere decir que $f(x) \leqq b$, para todo $x \in A$, luego por la adjunción tenemos que $x \leqq g(b)$, esto quiere decir que $g(b)$ es cota superior de A, pero como a es el supremo de A tenemos que $a \leqq g(b)$. Usando de nuevo la adjunción podemos decir que $f(a) \leqq b$, esto quiere decir que $f(a)$ es el supremo de $f(A)$. Es decir que tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3. *Dada $f : X \to Y$ adjunta a izquierda de $g : Y \to X$, y dados $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, tenemos que:*

- *Si A tiene supremo a, entonces $f(A)$ tiene supremo y es igual a $f(a)$*
- *Si B tiene ínfimo b, entonces $g(B)$ tiene ínfimo y es igual a $f(b)$*

Hay que notar que en general g no preserva supremos.

Tomemos el ejemplo de la función parte entera la cual es adjunta a izquierda de la inclusión. El conjunto $A = [0, 1)$ no tiene máximo, pero tiene supremo, 1 es el supremo. Pero tenemos que $f(A) = [A] = \{0\}$ y como se puede ver $f(1)$ no es el supremo de $f(A)$.

Ahora supongamos que tenemos una función $f : X \to Y$ creciente. ¿Bajo que condiciones f tiene adjunta a izquierda?

Si existiera $g : Y \to X$ adjunta a izquierda tendríamos

$$x \leqq gf(x) \text{ y } fg(y) \leqq y;$$

pero la idea de las adjuntas es que preservan la información muy bien, aquí esta de nuevo la creencia, así que lo necesitamos es que si nos damos $a \in Y$ el conjunto $G_a = \{x|f(x) \leqq a\}$ debe tener máximo, ojo no sirve solo el supremo, y entonces decimos que $g(a) = \text{máx}(G_a)$. Veamos que si todos los conjuntos de la forma G_y tienen máximo, la función definida de la manera indicada es adjunta:

Supongamos que $f(x) \leqq y$, entonces tenemos que $x \in G_y$, y como $g(a)$ es el máximo tenemos que $x \leqq g(y)$. Ahora supongamos $x \leqq g(y)$, usando que f es creciente podemos decir $f(x) \leqq fg(y)$. Como $g(y)$ es el máximo de G_y tenemos que $fg(y) \leqq y$, luego podemos decir $f(x) \leqq y$. Concluimos entonces que g es adjunta a izquierda de f. Todo esto lo podemos resumir en el siguiente teorema:

Teorema 4. *Sea $f : X \to Y$ una función creciente, entonces:*

- *f tiene adjunta a izquierda, si y solo si, para cada $y \in Y$ el conjunto $G_y = \{x|f(x) \leqq y\}$ tiene máximo.*
- *f tiene adjunta a derecha, si y solo si, para cada $y \in Y$ el conjunto $F_y = \{x|y \leqq f(x)\}$ tiene mínimo.*

Supongamos ahora que tenemos una función creciente $f : X \to Y$ la cual preserva ínfimos arbitrarios.

Tomemos $y \in Y$ y definamos el conjunto $F_y = \{x|y \leqq f(x)\}$.

Si X tiene ínfimos arbitrarios entonces tiene máximo, y como f preserva ínfimos arbitrarios, entonces Y tiene máximo y $f(1_X) = 1_Y$. Por consiguiente $F_y \neq \emptyset$.

Como X tiene ínfimos arbitrarios, tomemos $c = \inf F_y$, veamos que $c \in F_y$. Como f preserva ínfimos tenemos que $f(c)$ es el ínfimo de $f(F_y)$, de esto podemos decir que $f(c) \leqq f(x)$ para todo elemento $x \in F_y$, pero $y \leqq f(x)$ para cualquier elemento de F_y, pero como $f(c)$ es el ínfimo, tenemos que $y \leqq f(c)$ o sea que $c \in F_y$, es decir que F_y tiene mínimo luego por el teorema 4 f es adjunta a derecha.

En resumen tenemos el siguiente teorema:

Teorema 5. *Sea $f : X \to Y$ entonces:*

Si f preserva ínfimos, X tiene ínfimos arbitrarios, entonces f es adjunta a derecha.

Si f preserva supremos, X tiene supremos arbitrarios, entonces f es adjunta a izquierda.

Ya para terminar esta sección veamos uno de los teoremas más importantes para las adjuntas entre conjuntos ordenados:

Teorema 6 (Teorema de isomorfismo). *Sea $f : X \to Y$ adjunta a izquierda de $g : Y \to X$ entonces $f(X)$ es isomorfo a $g(Y)$*

Tomemos un elemento $a \in f(X)$, esto quiere decir que $a = f(x)$ para algún x. Usando la regla de dos contra uno podemos decir lo siguiente:

$$a = f(x) = fgf(x) = fg(a)$$

esto quiere decir que a es un punto fijo de la compuesta.

Ahora supongamos que $a = fg(a)$, tomando $x = g(a)$ podemos decir que $a \in f(X)$. En resumen tenemos lo siguiente:

Lema 1. *Sea $f : X \to Y$ adjunta a izquierda de $g : Y \to X$, entonces*

- *$a \in f(X)$, si y solo si, $fg(a) = a$.*
- *$b \in g(Y)$, si y solo si, $gf(b) = b$.*

Pero este lema muestre que f restringida a $G(Y)$ es la inversa de g restringida a $f(X)$, y como ambas son monótonas, por ser adjuntas, tenemos una demostración del teorema de isomorfismo.

4. Adjuntas y topología

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto ordenado con mínimo, supremos arbitrarios e ínfimos. Tomemos X un conjunto arbitrario.

Consideremos una función $f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$ con adjunta a derecha $g : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{A}$.

Consideremos la imagen de $\mathcal{A}$ bajo la función f, es decir consideremos el conjunto:

$$\tau = f(\mathcal{A}) = \{A \subseteq X | A \in f(\mathcal{A})\}.$$

Como $f \dashv g$ tenemos que $f(0) = \emptyset$, así que $\emptyset \in \tau$.

Ahora tomemos una colección arbitraria de elementos de τ, digamos $A_i \in \tau$, como todos estos están en la imagen de f son de la forma $A_i = B_i$, para algún B_i en $\mathcal{A}$. Por otra parte tenemos que $\bigcup A_i$ es el supremo de esta colección, pero como f preserva supremos tenemos lo siguiente,

$$\bigcup A_i = \bigcup f(B_i) = f(\bigvee B_i).$$

Esto quiere decir que $\bigcup A_i \in \tau$.

Como ya vimos f no tiene porque preservar ínfimos, así que si tomamos $A_1, A_2 \in \tau$ no necesariamente tendremos que $A_1 \cap A_2 \in \tau$.

Naturalmente si pedimos que f preserve ínfimos finitos entonces podemos concluir que dados A_1, A_2, elementos de τ, su intersección es un elemento de τ. Además ya que $\mathcal{A}$ tiene máximo, pues tiene supremos arbitrarios, entonces podemos decir que $X \in \tau$, es decir:

Teorema 7. *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto ordenado con supremos arbitrarios e ínfimos finitos, dado un conjunto X, y una función $f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$, entonces, si f tiene adjunta por derecha y preserva ínfimos finitos se tiene que $f(\mathcal{A})$ es una topología sobre X.*

El recíproco también es cierto, pues como vimos antes, toda topología define un par adjunto. Resumiendo tenemos lo siguiente:

Tenemos una topología sobre X, si y solo si, existe una función, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$, la cual tiene adjunta por derecha y preserva ínfimos finitos.

Ahora supongamos que permitimos que una topología τ sea cerrada para intersecciones arbitrarias, tomemos f la función asociada a τ, ahora suponemos que el dominio tiene ínfimos arbitrarios. Entonces tendríamos

$$\bigcap A_i = \bigcap f(B_i) = f(B).$$

Pero la función f asociada a una topología es la inclusión la cual es inyectiva, así que podemos decir que $B = \bigwedge B_i$, así que f preservaría ínfimos arbitrarios, luego por el teorema 5 f tendría adjunta a izquierda la cual es demasiado pues que una función tenga adjunta a derecha e izquierda esta muy cerca de ser un isomorfismo, y como dijimos los isomorfismos no son la ideal para preservar información.

Con esto consideramos que hemos logrado dar una buena razón para justificar el porqué de pedir uniones arbitrarias y tan solo intersecciones finitas en la definición de topología.

Hay que notar que en principio el conjunto $\mathcal{A}$ puede no tener nada que ver con X pero aun así se genera una topología. Podríamos pensar el conjunto $\mathcal{A}$ como elementos externos que observan a los elementos de X. En su trabajo de grado el autor partiendo de dos conjuntos arbitrarios y una relación binaria entre ellos obtiene condiciones para definir una topología. Esto para justificar un poco más la creencia de que lo que busca la topología es dar información acerca de los puntos de X.

Bibliografía

[1] Bourbaki, N. *Elements of Mathematics, General Topology, part 1*, Addison-Wesley publishing company, 1966.

[2] Munkres, J. *Topología*, Prentice Hall, 2002.

[3] Leal, R. *Hahn-Banach-Tarski, los primeros pasos hacia la versión constructiva de la paradoja de Banach-Tarski*, Tesis Universidad Nacional, 2003.