DENSIDAD DE LAS MATRICES NO SINGULARES

Adrian Ricardo Gómez Plata.
Profesor Universidad Nacional
Bogotá, Colombia
agomez@unal.edu.co

1. Matrices Unitarias

Si $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, entonces la **transpuesta conjugada de A**, se denota por:

$$A^* = \bar{A}^t$$

donde $\bar{A}$ es la matriz cuyos elementos son los conjugados complejos de los elementos correspondientes en A y $\bar{A}^t$ es la transpuesta de $\bar{A}$.

Ejemplo. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2 & 3-2i & i \end{bmatrix}$$

entonces

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ i & 3+2i \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Recuerdese que una matriz con elementos reales se denomina ortogonal si $A^{-1} = A^t$. Los análogos complejos de las matrices ortogonales se llaman matrices unitarias y se definen como sigue:

Definición. Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$ se denomina **unitaria** si:

$$A^{-1} = A^*$$

de esta definición tenemos que $AA^* = A^*A = I$, donde I es la matriz identica de $n \times n$.

2. Diagonalización Unitaria

Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, se denomina **diagonalizable unitariamente** si existe matriz unitaria P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Recuerde que no toda matriz es diagonalizable, por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Teorema De La Triangularización de Schur

Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, entonces existe una matriz unitaria $U \in M_n(C)$, tal que

$$U^*AU = T = (T_{ij})_{n\times n}$$

donde T es triangular superior.

4. Norma de Frobenius

Si $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, entonces

$$\|A\|_F = \sqrt[2]{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Proposición 1. Sean $b_1, ...b_n \in C$ y $\alpha > 0$, existe una colección $d_1, d_2, ..., d_n \in C$ tal que:

$$|d_i| < \alpha$$

y $t_1 + d_1, t_2 + d_2, ..., t_n + d_n$ son (todos) distintos.

Proposición 2. Sean $A = (a_{ij}) \in M_n(C)$, para todo $\varepsilon > 0$, existe una matriz $A_{(\varepsilon)} = \left[a_{ij(\varepsilon)}\right] \in M_n$, tal que tiene n distintos valores propios (es decir es diagonalizable) y además

$$\left\|A - A_{(\varepsilon)}\right\|_F < \varepsilon$$

Es decir el conjunto de las matrices diagonalizables de $M_n(C)$,es un conjunto denso en
$M_n(C)$.

Demostración
Sean, $A \in M_n(C)$ y $\varepsilon > 0$. Por el Teorema de Schur, existe una matriz unitaria $U \in M_n(C)$ tal que:

$$U^*AU = T = (t_{ij})_{n\times n}$$

en donde T es una matriz triangular superior. Usando la proposición anterior existen escalares $d_1, d_2, ..., d_n$ tales que:

$$|d_i| \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$$

y que $t_{11}+d_1, t_{22}+d_2, ..., t_{nn}+d_n$ son todos distintos. Sea $E = diag(d_1, ..., d_n)$, observamos que $T + E$ tiene n distintos valores propios y que $t_{11}+d_1, t_{22}+d_2, ..., t_{nn}+d_n$ son los valores propìos de la matriz $A + UEU^*$. Hallamos $A_{(E)} = A + UEU^*$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left\|A - A_{(\varepsilon)}\right\|_F^2 &= \|UEU^*\|_F^2 \\
&= Tr\left((UEU^*)^*(UEU^*)\right) \\
&= Tr(UE^*EU^*) \\
&= Tr(E^*EU^*U) \\
&= Tr(E^*E) \\
&= \sum_{i=1}^{n} |di|^2 \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Notese que $A_{(\varepsilon)}$ es una matriz diagonalizable. Con esto estámos probando que el conjunto de las matrices diagonalizables es denso en $M_n(C)$.

Proposición 3. El conjunto de las matrices no singulares es denso en $M_n(C)$.

Demostración
Mostremos primero, que dada una matriz diagonal $E_{(\varepsilon)} = diag(d_1, ..., d_n)$, existe una matriz diagonal $\widetilde{E}_{(\varepsilon)} = diag(e_1, ..., e_n)$ tal que todos sus elementos e_i son distintos y no nulos y para la cual se tiene que:

$$\left\|E_{(\varepsilon)} - \widetilde{E}_{(\varepsilon)}\right\|_F < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \varepsilon \geq 0$$

Sean $A \in M_n(C)$ y $\varepsilon \geq 0$, tomamos $d_1, ..., d_n$ como en la proposición anterior tales que:

$$|d_i| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

y hagamos $\widetilde{A}_{(\varepsilon)} = A + U\widetilde{E}_{(\varepsilon)}U^*$, entonces:

$$\begin{aligned} \left\| A - \widetilde{A}_{(\varepsilon)} \right\|_F &\leq \left\| A - A_{(\varepsilon)} \right\|_F + \left\| A_{(\varepsilon)} - \widetilde{A}_{(\varepsilon)} \right\|_F \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$