Introducción a la homología

Weimar Muñoz Villate
Estudiante Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
wmunozvillate@yahoo.es

Stella Huérfano
Profesora Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
rshuerfanob@unal.edu.co

Resumen

En este trabajo se presenta un concepto clásico de la topología algebraica: La homología. La importancia de los grupos de homología radica en que estos grupos son invariantes topológicos, es decir, que por medio de ellos sabemos cuando dos espacios topológicos son homeomorfos. Desarrollamos algunos ejemplos para permitir una mejor comprensión al lector.

Introducción

Uno de los invariantes topológicos más conocidos y al que es más fácil introducirse es la homología (en este caso simplicial). Estudiamos los grupos de homología pues el problema de determinar si dos espacios topológicos son o no homeomorfos no tiene solución general, y la homología es uno de los métodos para saber cuando dos espacios topológicos *no* son homeomorfos.

Los grupos de homología son grupos abelianos que son invariantes topológicos que sirven para la clasificación de superficies compactas, es decir, que por medio de ellos es posible aplicar resultados algebraicos a problemas topológicos. Estos grupos proporcionan un *listado* de superficies compactas no homeomorfas entre si, de manera que cualquier otra superficie compacta resulta homeomorfa a alguna de las listadas. La homología tiene como fin asignar una estructura de grupo a ciclos de una variedad M que no son frontera de ninguna subvariedad de M. Para aclarar esta idea necesitamos las siguientes definiciones.

1. Simplejos y complejos simpliciales.

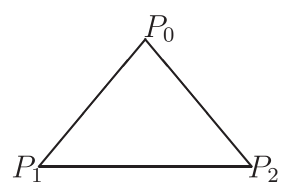
Los ***simplejos*** son los análogos a los triángulos en otras dimensiones, y son los objetos con los cuales se trabaja en homología. Es decir, un r-simplejo es un objeto r-dimensional en algún espacio $\mathbb{R}^n$, $n > r$.

Definición 1.1. Formalmente un *r-simplejo* es un conjunto σ_r, donde

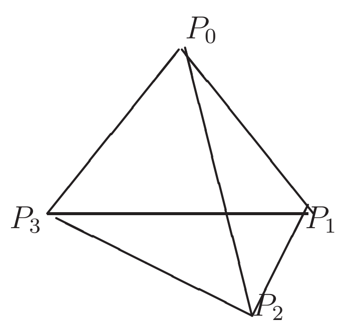
$$\sigma_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^{r} c_i p_i, c_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} c_i = 1, p_i \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Un 0-simplejo (P_0) es un punto o vértice que será denotado σ_0 y tiene como gráfico a: $\bullet\ P_0$.
Un 1-simplejo (P_0P_1) es una línea o eje, que va desde el punto P_0 hasta el punto P_1, se denota por σ_1, y su gráfico es:

Un 2-simplejo $(P_0P_1P_2)$ es un triángulo con su interior, considerado con la orientación contraria a la de las manecillas del reloj, es denotado por σ_2, y su gráfico es:



Un 3-simplejo $(P_0P_1P_2P_3)$ es un tetraedro sólido, denotado por σ_3 y su gráfica es:



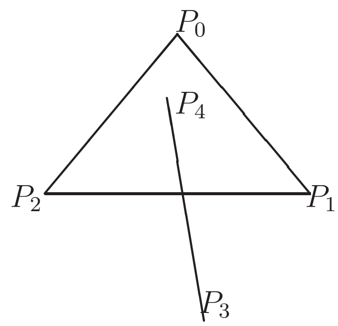
Se define de forma natural las caras de un r-simplejo como aquellos simplejos de menor dimensión, es decir, los s-simplejos ($0 \leq s \leq r$) que lo conforman. Esta relación (ser cara de) se denota como $\sigma_r \leq \sigma_{r+1}$, por ejemplo $\sigma_0 \leq \sigma_1$, o de forma menos convencional $(P_0) \leq (P_0P_1)$. También notaremos que $(P_0P_1) = -(P_1P_0)$.

Definición 1.2. Un ***Complejo Simplicial*** K, es un conjunto finito de simplejos en $\mathbb{R}^n$ que satisface:

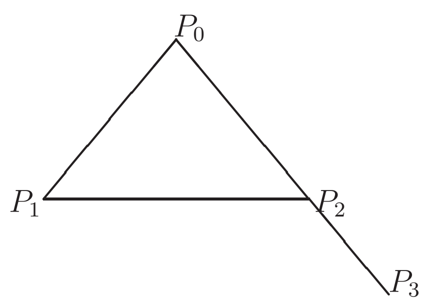
1. Una cara arbitraria σ^* de un simplejo σ de K, pertenece a K, es decir, si $\sigma^* \leq \sigma$ entonces $\sigma^* \in K$.

2. Si $\sigma^* \in K$ y $\sigma \in K$ entonces $\sigma^* \cap \sigma = \emptyset$, ó $\sigma^* \cap \sigma \leq \sigma$ y $\sigma^* \cap \sigma \leq \sigma^*$.

Por definición, la dimensión de un complejo simplicial K será la dimensión del mayor simplejo que pertenezca a K. A continuación vemos un ejemplo de una figura que no satisface la definición de complejo simplicial:



La siguiente figura representa un complejo simplicial.



2. Grupos de homología de complejos simpliciales.

Definición 2.1. El ***Grupo de r-cadenas*** $C_r(K)$ de un complejo simplicial K es un grupo abeliano libre generado por los r-simplejos de K, para la definición de grupo libre ver ([6]). Si $r \geq dimK$, $C_r(K)$ se define como cero. Un elemento $c \in C_r(K)$ se expresa como: $c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i \sigma_{r,i}$, $(1 \leq i \leq I_r)$ donde $c_i \in \mathbb{Z}$, y donde el índice I_r es el cardinal del conjunto de los r-simplejos de K. La estructura de grupo está dada por:

La adición de dos r-cadenas, $c = \sum_i c_i\sigma_{r,i}$ y $c^* = \sum_i c_i^*\sigma_{r,i}$ es $c + c^* = \sum_i(c_i + c_i^*)\sigma_{r,i}$; el elemento unidad es $0=\sum_i 0\sigma_{r,i}$ y el inverso de c es $-c=\sum_i(-c_i)\sigma_{r,i}$. Así $C_r(K)$ es un grupo abeliano libre, $C_r(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}$ se suma consigo mismo I_r-veces. Por ejemplo, el grupo de 1-cadenas asociado a un triángulo es:

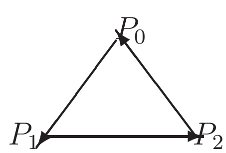
$$\begin{aligned} C_1(K_1) &\cong \{i(P_0P_1) + j(P_1P_2) + k(P_2P_0) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\} \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

y el grupo de 1-cadenas asociado a un cuadrado de vértices P_0, P_1, P_2 y P_3 es:

$$\begin{aligned} C_1(K_2) &\cong \{i(P_0P_1) + j(P_1P_2) + k(P_2P_3) + l(P_3P_4) \mid i, j, k, l \in \mathbb{Z}\} \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

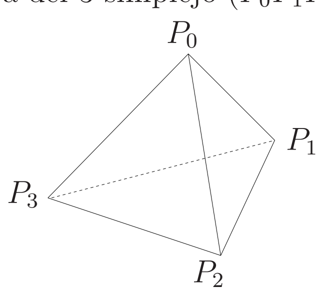
Definición 2.2. El ***Operador Frontera*** ∂_r es una función definida de $C_r(K)$ a $C_{r-1}(K)$ que actúa linealmente sobre todo elemento $c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i\sigma_{r,i}$ de $C_r(K)$ como $\partial_r c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i\partial_r\sigma_{r,i}$. En la formula anterior, la *frontera* $\partial_r\sigma_r$ de un r-simplejo $\sigma_r = (P_0P_1P_2...P_r)$ es una $(r-1)$-cadena definida por:
$\partial_r\sigma_r \equiv \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(P_0P_1...'P_i...P_r)$ donde el punto $'P_i$ se omite.

Por ejemplo, al calcular la frontera del 2-simplejo $(P_0P_1P_2)$ obtenemos:



$$\begin{aligned} \partial_2(P_0P_1P_2) &= (-1)^0(P_1P_2) + (-1)^1(P_0P_2) + (-1)^2(P_0P_1) \\ &= (P_0P_1) + (P_1P_2) + (P_2P_0) \\ &= (P_0P_1) + (P_1P_2) - (P_0P_2) \end{aligned}$$

y al calcular la frontera del 3-simplejo $(P_0P_1P_2P_3)$ obtenemos:



$$\begin{aligned}\partial_3(P_0P_1P_2P_3) &= (P_0P_3P_1) + (P_1P_2P_3) + (P_3P_0P_2) + (P_2P_1P_0)\\ &= (-1)^0(P_1P_2P_3) + (-1)^1(P_0P_2P_3) + (-1)^2(P_0P_3P_1)\\ &\quad + (-1)^3(P_0P_1P_2)\\ &= (P_1P_2P_3) - (P_0P_2P_3) + (P_0P_3P_1) - (P_0P_1P_2)\end{aligned}$$

Los r-simplejos c, $\quad c \in C_r(K)$, tales que $\partial_r c$=0 son llamados r**-ciclos**. El conjunto de r-ciclos, denotado por $Z_r(K)$, es un subgrupo de $C_r(K)$. Si r= 0, $\partial_0 c$= 0 y $Z_0(K)$= $C_0(K)$.

Sea K un complejo simplicial de orden n y sea $c \in C_r(K)$, si existe un elemento d, $\quad d \in C_{r+1}(K)$, tal que $c = \partial_{r+1} d$ entonces c es llamado una r**-frontera**. El conjunto de todos los elementos de $C_r(K)$ que son r**-fronteras**, denotado por $B_r(K)$, es un subgrupo de $C_r(K)$. Por la definición de $C_r(K)$ cuando $r > n$, $B_n(K)$ es cero.

Veamos un ejemplo: $\partial_1(P_0P_1) = P_1 - P_0$ es una frontera, y como $P_1 - P_0 \neq 0$ esta frontera no es un ciclo. Pero la frontera de un triángulo es $\partial_1(P_0P_1) + \partial_1(P_1P_2) + \partial_1(P_2P_0) = P_1 - P_0 + P_2 - P_1 + P_0 - P_2 = 0$ sí es un ciclo. Para proseguir con el desarrollo de nuestra discusión es obligatorio considerar el siguiente lema.

Lema 2.3. La función de composición $\partial_{r-1} \bullet \partial_r : C_r(K) \to C_{r-2}(K)$ es la función cero, i.e., $\partial_{r-1}\left(\partial_r(\sigma)\right) = 0$ para todo $\sigma = (P_0...P_{r-1}P_r) \in C_r(K)$.

Demostración: Tenemos que $\partial_r\sigma = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i(P_0...P_i'...P_r)$, por tanto

$$\begin{aligned}\partial_{r-1}(\partial_r\sigma) &= \sum_{j<i}(-1)^i(-1)^j(P_0...P_j'...P_i'...P_r)\\ &\quad + \sum_{j>i}(-1)^i(-1)^{j-1}(P_0...P_i'...P_j'...P_r)\\ &= \sum_{j>i}[(-1)^{i+j} + (-1)^{i+j-1}](P_0...P_i'...P_j'...P_r) = 0,\end{aligned}$$

obteniendo el resultado deseado.

Como ejemplos veamos que la frontera del 2-simplejo $(P_0P_1P_2)$ es:

$$\begin{aligned}\partial_2(P_0P_1P_2) &= (P_0P_1) + (P_1P_2) + (P_2P_0)\\ &= (P_0P_1) + (P_1P_2) - (P_0P_2)\end{aligned}$$

Calculemos nuevamente su frontera,

$$\begin{aligned}\partial_1[\partial_2(P_0P_1P_2)] &= \partial_1[(P_0P_1)+(P_1P_2)-(P_0P_2)]\\ &= P_1-P_0+P_2-P_1+P_0-P_2=0\end{aligned}$$

Surgen algunas preguntas en este tratamiento: ¿Habrá alguna relación entre el grupo de r-ciclos $(Z_r(K))$ y el grupo de r-cadenas $(C_r(K))$? ¿Para qué sirven los r-ciclos?. La respuesta a la primera pregunta es que la homología tiene como fin asignar una estructura de grupo a los ciclos de una variedad M que no son frontera de ninguna subvariedad de M. La respuesta a la segunda pregunta es que los grupos de homología son invariantes topológicos.

Teorema 2.4. Sean $Z_r(K)$ y $B_r(K)$ el grupo de r-ciclos y el grupo de r-fronteras de $C_r(K)$, respectivamente, entonces $B_r(K)\subset Z_r(K)$.

Demostración: Esto es muy fácil de ver si utilizamos el Lema anterior, pues si $c\in B_r(K)$ entonces $c=\partial_{r+1}(d)$ para algún $d\in C_{r+1}(K)$; luego encontramos que $\partial_r(c)$=$\partial_r\,(\partial_{r+1}(d))$=0; por lo tanto $c\in Z_r(K)$. Esto implica que $B_r(K)\subset Z_r(K)$.

Como resultado del anterior Teorema introducimos la siguiente definición.

Definición 2.5. El ***r-ésimo Grupo de Homología*** $H_r(K)$, $0\le r\le n$ asociado a un complejo simplicial K, K n-dimensional, es $H_r(K)\equiv Z_r(K)/B_r(K)$, y $H_r(K)$=0 si $r\ge n$, o, si $r\le 0$. Como $B_r(K)$ es subgrupo de $Z_r(K)$, $H_r(K)$ es el conjunto de clases de equivalencia de r-ciclos,

$$H_r(K)=\{[z]\mid z\in Z_r(K)\}.$$

Dos r-ciclos z y z^* están en la misma clase de equivalencia si y sólo si $z-z^*\in B_r(K)$, ésto se denota $z\sim z^*$, o, $[z]$=$[z^*]$ y se dice que z es homólogo a z^*. Geométricamente esto dice que $z-z^*$ es frontera de algún $r+1$-simplejo, o de alguna $r+1$-cadena.

Para establecer el teorema que afirma que los grupos de homología son invariantes topológicos necesitamos las siguientes nociones: Si cada simplejo de un complejo simplicial K, es visto como un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, la unión, obviamente, será un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Este conjunto recibe el nombre de *Poliedro* del complejo simplicial K, y es denotado como $|K|$; por definición dim$|K|$=dim$K$.

Un espacio topológico X se dice triangulable si existe un complejo simplicial K y un homeomorfismo *f:* $|K|\to X$. A la pareja (K,f) se le llama *triangulación* de X. Trataremos aquí sólo espacios que sean triangulables.

Teorema 2.6. Los grupos de homología son invariantes topológicos. Sean X y Y dos espacios topológicos homeomorfos, n-dimensionales, y sean (K, f) y (L, g) triangulaciones de X y Y respectivamente, entonces: $H_r(K) \cong H_r(L)$, para $r = 0, 1, ..., n$; en particular, si (K, f) y (L, g) son triangulaciones de X, entonces, $H_r(K) \cong H_r(L)$, para todo $r = 0, 1...n$.

Un complejo simplicial K, es *arco-conexo* si para todo par de 0-simplejos de K, P_i y P_j, existe una sucesión de 1-simplejos $(P_iP_k), (P_kP_l)...(P_mP_j)$ tal que $\partial_1((P_iP_k) + (P_kP_l) + ... + (P_mP_j)) = P_i - P_j$, es decir que P_i es homólogo P_j. Si K es arco-conexo entonces no es posible representar a K como la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos, no vacíos, esto es K es *conexo*, es decir, que ser arco-conexo implica ser conexo. Esto origina el siguiente Teorema.

Teorema 2.7. Si K es un complejo simplicial conexo, entonces: $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

3. Ejemplos del cálculo de los grupos de homología.

1. Sea $K = \{P_0, P_1\}$ un complejo simplicial compuesto de dos 0-simplejos. Por definición $Z_0(K)$=$C_0(K)$, y $B_0(K)$=0, pues los 0-simplejos no son frontera de ningún simplejo de orden menor.
   Como $C_0(K)$=$\{iP_0 + jP_1 \mid i, j \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, entonces, $H_0(K) \cong [Z_0(K)/B_0(K)]$= $C_0(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Recordemos que si $r \geq dimK$, entonces $H_r(K)$=0, luego:

$$H_r(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & r = 0, \\ 0 & r \neq 0 \end{cases}$$

2. Sea K=$\{P_0, P_1, P_2, (P_0P_1), (P_1P_2), (P_2P_0)\}$ una triangulación del círculo, S^1. Como K no tiene 2-simplejos entonces $B_1(K) = 0$ y $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K)$. Tomamos un elemento $z \in Z_1(K)$ tal que $z = i(P_0P_1) + j(P_1P_2) + k(P_2P_0)$ para $i, j, k \in \mathbb{Z}$, que cumpla la condición:

$$\begin{aligned} \partial_1 z &= i(P_1 - P_0) + j(P_2 - P_1) + k(P_0 - P_2) \\ &= (k - i)P_0 + (i - j)P_1 + (j - k)P_2 = 0. \end{aligned}$$

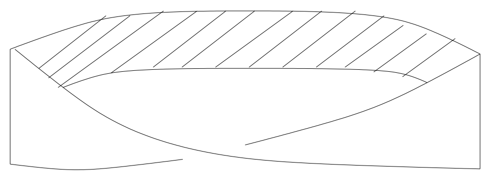
   Esto se satisface si $i = j = k$, por tanto tenemos que $Z_1(K) = \{i[(P_0P_1) + (P_1P_2) + (P_2P_0)] \mid i \in \mathbb{Z}\}$, donde se muestra que $Z_1(K)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$ y que

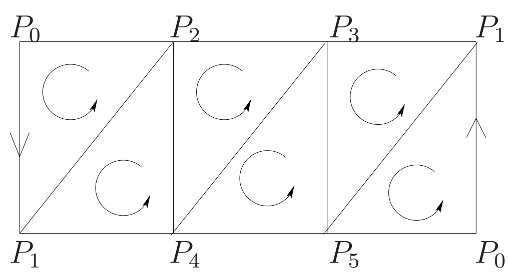
$$H_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbb{Z}.$$

Tenemos además que $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ pues el círculo, S^1, es conexo.

3. La cinta de Möbius.

   La cinta de Möbius se obtiene del rectángulo $[0,1] \times [0,1]$ identificando el punto $(0,y) \in \{0\} \times [0,1]$ con el punto $(1, 1-y) \in \{1\} \times [0,1]$. Una triangulación, para la cinta de Möbius, se obtiene de una triangulación del rectángulo $[0,1] \times [0,1]$, siguiendo las identificaciones dadas por las flechas, del siguiente modo:



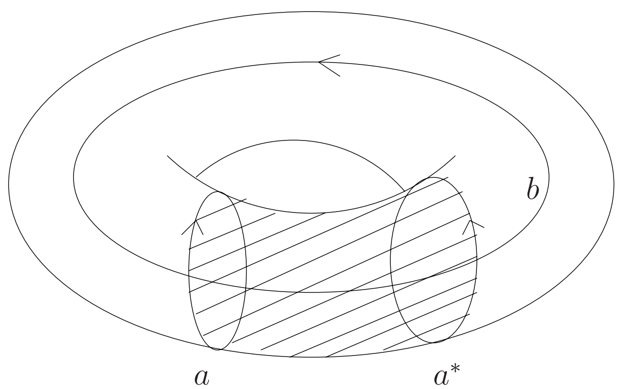


   De forma clara $B_2(K)$=0, pues la cinta no es frontera de ninguna 3-cadena. Ahora, si tomamos un elemento $z \in Z_2(K)$ tal que $z = i(P_0P_1P_2)+j(P_2P_1P_4)+k(P_2P_4P_3)+l(P_3P_4P_5)+m(P_3P_5P_1)+n(P_1P_5P_0)$, el elemento z sólo se anula cuando todos los coeficientes son cero, es decir, si $i = j = k = l = m = n = 0$, entonces $Z_2(K) = 0$ luego $H_2(K) \cong Z_2(K)/B_2(K) \cong \{0\}$.

   Para hallar $H_1(K)$ tomaremos un camino cerrado (formado por 1-simplejos) tal que recorre toda la triangulación de la cinta de Möbius y tal que tiene el mismo 0-simplejo inicial y final. A este camino lo denotaremos por z. El cálculo directo, fácilmente nos demuestra que cualquier otro camino cerrado z^*, sobre la misma triangulación, es homólogo a z (o es homólogo a algún múltiplo suyo) pues $z - z^*$, siempre encierra una superficie es esta triangulación. Tomemos por ejemplo: $z = (P_0P_1) + (P_1P_4) + (P_4P_5) + (P_5P_0)$ y $z^* = (P_1P_2) + (P_2P_3) + (P_3P_5) + (P_5P_1)$, (ver gráfica), entonces, $z - z^* = \partial_2\{(P_2P_1P_4) + (P_2P_4P_3) + (P_3P_4P_5) + (P_1P_5P_0)\}$, es decir que $z \sim z^*$.

No es difícil verificar que todo camino cerrado sobre esta triangulación es homólogo a nz, para $n \in \mathbb{Z}$. Así $H_1(K)$ es generado por un sólo elemento: el 1-simplejo z, luego $H_1(K) = \{i[z] | i \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Finalmente, como K es conexo, tenemos por el Lema anterior que $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

4. Consideremos el toro T^2. La superficie del toro no es frontera de ninguna 3-cadena, es decir, $B_2(T^2)$=0. Esto implica que $H_2(T^2)$ es generado, por un solo generador: la superficie misma, por tanto $H_2(T^2) \cong \mathbb{Z}$.
Ahora calculemos $H_1(T^2)$. Claramente los lazos a y b de la figura no tienen frontera y no son frontera de ninguna 2-cadena. Mientras que si tomamos un lazo a^*, a^* sería homólogo a a, por que $a - a^*$ es frontera de una superficie. Por tanto $H_1(T^2)$ es finitamente generado por a y b, así $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Como T^2 es conexo cualquier par de 0-simplejos son homólogos, es decir, que dados P_i y P_j siempre es posible encontrar (usando la triangulación de T) un 1-simplejo c, tal que $\partial c = P_i - P_j$. Así $H_0(T^2)$ es generado por uno cualquiera de sus 0-simplejos, es decir, tenemos $H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$.



El lector interesado en estos temas encontrará que este escrito fue extraído principalmente del libro de M. Nakahara. Esperamos que ésta introducción al tema, sirva de motivación a la lectura de temas avanzados en el área.

Bibliografía

[1] Choquet-Bruhat Y, C. Dewitt-Morette, M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, Elseiver Science Publisher B.V, 1989.

[2] Hatcher *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[3] Ivorra Castillo C. *Topología Algebraica (con aplicaciones a la Geometría Diferencial),* www.uv.es/∼ivorra/Libros/Topalg.pdf

[4] Lipschutz S, *General Topology*, Schaum Publishing co, 1965.

[5] MacLane S, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[6] Nakahara M, *Geometry, Topology, and Physics*, Institude of Physics Publishing, 1990.

[7] Nash C, Sen S, *Topology and Geometry for Physics*, Academic Press, 1983.

[8] Spivak M, *C'alculo en Variedades*, Revertè, 1988.