Un problema inverso en la teoría de MORALES - RAMIS

Primitivo Belén Acosta Humánez
Departamento de Matemática Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya
Barcelona, España
primitivo.acosta@upc.edu

Resumen

La teoría de Morales - Ramis es considerada actualmente como el criterio más potente para detectar no integrabilidad en un sistema hamiltoniano, estableciendo que la integrabilidad del hamiltoniano implica grupo de Galois abeliano en la ecuación variacional. En este artículo se presenta un resumen, con una gran variedad de ejemplos, del método MSAB (Morales-Simó-Acosta-Blázquez), el cual es un método para construir sistemas hamiltonianos a partir de una ecuación variacional conocida. De esta forma, si el grupo de Galois es no abeliano entonces se tienen familias completas de sistemas hamiltonianos no integrables.
Palabras clave. Componente conexa de la identidad, ecuación variacional, grupo de Galois, sistema hamiltoniano.

1. Introducción

Este artículo es una versión mejorada y ampliada de la conferencia presentada en el XVIII Encuentro de Geometría organizado por las Universidades Pedagógica y Sergio Arboleda. En la teoría de Morales - Ramis se establece que si un sistema hamiltoniano autónomo es integrable en el sentido de Liouville, entonces la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación variacional normal a lo largo de cualquier curva integral particular es un grupo conmutativo. Los primeros en aplicar esta filosofía a la inversa (en el caso de grupo no soluble) fueron Juan Morales Ruiz y Carles Simó (véase [10]), es decir, si sabemos que el grupo de Galois de una ecuación diferencial es no abeliano, entonces construimos familias de sistemas hamiltonianos en donde esta ecuación diferencial sea la ecuación variacional a lo largo de cualquier solución particular. Retomando el trabajo de Morales y Simó, pero en el caso de grupo no abeliano, P. Acosta y David Blázquez generalizaron el método.

Para mayor comprensión de este artículo se presenta un resumen básico de la teoría de Galois diferencial y de la mecánica hamiltoniana. Aclaramos que este artículo no hay resultados novedosos, es una versión (resumida) en español del artículo *Non integrability of some hamiltonian with rational potentials* (véase [4]).

1.1. Teoría de Galois diferencial

El problema de la *resolución por radicales* de ecuaciones algebraicas fue abordado por E. Galois (1811-1832). Dado un polinomio irreducible con coeficientes en un cuerpo Q, de característica cero,

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \prod(x - \alpha_i) = 0$$

se quiere saber si se pueden expresar las raíces α_i mediante una fórmula cerrada que incluye los coeficientes a_i, operaciones aritméticas y la extracción de radicales. *A cada ecuación le corresponde el grupo de permutaciones entre las raíces α_i que conserva todas las relaciones de dependencia algebraica entre ellas.* Bajo ciertas hipótesis, el grupo G de la ecuación, es el grupo de automorfismos del cuerpo $Q(\alpha_i)$ que dejan fijo Q.

Si G es un grupo cíclico de orden n, entonces la extensión que se obtiene es $K = Q(\sqrt[n]{a})$.

Una ecuación es resoluble por radicales si y solo si su grupo G (grupo de Galois) es resoluble.

A cada cadena de resolución:

$$H_1 \triangleleft \ldots \triangleleft H_s = G$$

con H_i/H_{i-1} cíclico, le corresponde una cadena de extensiones,

$$Q \hookrightarrow K_1 \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow K_s = Q(\alpha_i)$$

donde cada una de las sucesivas extensiones se hace adjuntando un radical, de orden $|H_i/H_{i+1}|$.

El problema de la integración por cuadraturas fue tratado por J. Liouville (1809-1882), S. Lie (1842-1899) etc. La ecuación diferencial, $\dot{x} = f(t)x$, tiene por solución,

$$x = \lambda e^{\int f(t)dt}, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

No todas las ecuaciones diferenciales pueden resolverse de esta manera, por ejemplo, para

$$\dot{x} = t - x^2,$$

las soluciones no pueden expresarse mediante una fórmula que implique funciones elementales, y operaciones integrales. En este sentido, se dice que *no es integrable por cuadraturas*.

Análogamente a la teoría de Galois para polinomios, existe una teoría para ecuaciones diferenciales lineales, desarrollada por E. Picard y E. Vessiot. Supongamos que K es un cuerpo diferencial y que y_1, y_2 es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} = ry, \quad r \in K,$$

Sea $\tilde{K} = K\langle y_1, y_2\rangle$, el menor cuerpo diferencial que contiene a K y a $\{y_1, y_2\}$. Entonces el grupo de automorfismos diferenciales de $\hat{K}$ que dejan invariantes los elementos de K, se denomina *grupo de Galois* de la ecuación diferencial. En general, el grupo de Galois diferencial es un grupo algebraico de matrices con coeficientes en el cuerpo de constantes de K.

Análogamente a las extensiones por radicales de la teoría de Galois clásica, se tienen las extensiones liouvillianas, las cuales se construyen sucesivamente agregando una solución algebraica, una integral, o bien una exponencial de integral. Es decir, si θ es una solución de la ecuación, entonces

$$\hat{K}_{i+1} = K_i(\theta), \qquad \begin{cases} \theta & \text{algebraica.} \\ \theta = \int a, & a \in K. \\ \theta = e^{\int a}, & a \in K. \end{cases}$$

En analogía con el teorema de Galois para ecuaciones algebraicas se tiene el siguiente resultado:

Teorema. (Lie - Kolchin) *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es integrable mediante cuadraturas (extensiones liouvillianas) si y solo si la componente conexa de la identidad de su grupo de Galois es triangulizable. Es decir, la componente conexa de su grupo de Galois es un grupo resoluble.* En particular, si la ecuación diferencial de segundo orden es de la forma

$$y'' = ry, \quad r \in K,$$

entonces la componente conexa de su grupo de Galois está contenida en $SL(2, \mathbf{C})$.

Sea G un subgrupo algebraico de $SL(2, \mathbf{C})$. Entonces exclusivamente uno de los siguientes cuatro casos puede ocurrir:

1. G es triangularizable.
2. G es el conjugado de un subgrupo del grupo diedro infinito y el caso 1 no se da.
3. G es finito y los casos 1 y 2 no se dan.
4. $G = SL(2, \mathbf{C})$.

El grupo G es resoluble en los casos 1, 2 y 3. Mientras que en el caso 4 el grupo no es resoluble.

En 1986 Jerald Kovacic presenta un algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes funciones racionales sobre los complejos. El algoritmo de Kovacic se basa en los subgrupos algebraicos de $SL(2, \mathbf{C})$. De esta manera se presentan cuatro casos en el algoritmo de Kovacic: la derivada logaritmica de la solución es una función racional (caso 1), raiz de un polinomio de grado 2 (caso 2), de grado 4, 6 o 12 (caso 3). El cuarto caso indica que no hay soluciones liouvillianas. Para una ampliación de este tema, consúltese [1, 2, 3, 4, 5, 11]

1.2. Mecánica hamiltoniana

En la formulación hamiltoniana de la mecánica, la evolución del estado de un sistema viene determinado por las ecuaciones:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

El espacio de fases de estos sistemas está dotado de forma natural de una estructura *simpléctica*. Se induce una estructura de álgebra de Poisson en el espacio de funciones que dependen de p y q. El *paréntesis de Poisson* de f y g se define como

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

Si $\{f, g\} = 0$, se dice que f y g están en *involución* o también que f y g conmutan mediante el paréntesis de Poisson.

Dentro de este contexto, un sistema de n grados de libertad se dice *integrable en el sentido de Liouville* cuando existen n constantes de movimiento independientes y en involución.

2. Teoría de Morales - Ramis

Durante mucho tiempo se han buscado criterios para determinar la integrabilidad o no de este tipo de sistemas basados en el comportamiento de las soluciones en el dominio complejo. A lo largo de una solución particular de las ecuaciones del movimiento, éstas pueden aproximarse linealmente por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales conocido como *ecuación variacional*. La teoría de Morales - Ramis es la teoría de Galois en el contexto de los sistemas dinámicos, relacionando el concepto de integrabilidad en el sentido de Liouville con el concepto de integrabilidad por cuadraturas de la teoría de Picard-Vessiot.

En la tesis doctoral *Técnicas algebraicas para la no integrabilidad de Sistemas hamiltonianos* escrita por Juan Morales-Ruiz y dirigida por Carles Simó, se aplicó por primera vez la teoría de Galois diferencial en la no integrabilidad de un sistema hamiltoniano. Sin embargo, simultánea e independientemente, Churchill y Rod (Estados Unidos) obtuvieron resultados parecidos (menos generales). Mas tarde, gracias a una estancia postdoctoral de Juan Morales-Ruiz en Francia trabajando con J.P. Ramis se gesta, con el siguiente resultado, lo que hoy se conoce como *teoría de Morales-Ramis* (véanse [6, 7, 8, 9, 10]).

Teorema (Morales-Ramis, 1997). *Si un sistema hamiltoniano es integrable en el sentido de Liouville, entonces la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación variacional a lo largo de cualquier solución particular es abeliana.*

A partir de entonces, se dispone de un criterio de no-integrabilidad, que desde finales de los 90 ha sido aplicado por varios autores de la comunidad matemática internacional para estudiar la no-integrabilidad de distintos sistemas: problemas de N cuerpos, sólido rígido, el péndulo forzado, problemas cosmológicos y no integrabilidad mediante integrales primeras racionales de la segunda trascendente de Painlevé.

En algunos problemas, como el potencial cúbico Henon-Heiles, el criterio de no-integrabilidad sobre la ecuación variacional no es suficiente para decidir. Se considera entonces la *ecuación variacional de orden n*, que es la aproximación de orden n del flujo a lo largo de la solución. No es un sistema lineal, pero si es linealizable. Muy recientemente los autores de la teoría de Morales-Ramis en colaboración con Carles Simó obtuvieron el siguiente resultado:

Teorema (Morales-Ramis-Simó, 2005). *Si un sistema hamiltoniano es integrable en el sentido de Liouville, entonces la componente conexa de la identidad del grupo de Galois de la ecuación variacional linealizada de cualquier orden a lo largo de cualquier solución particular es abeliana.* Para una ampliación de este teorema, consúltese [9]

3. Problema inverso

Recientemente en un trabajo conjunto con David Blázquez-Sanz (véase [4]) aplicamos el problema inverso de la teoría de Morales-Ramis, a partir de una ecuación variacional conocida se generaron familias de hamiltonianos no integrables con potenciales racionales. Particularmente analizamos las ecuaciones variacionales que daban lugar a ecuaciones diferenciales con coeficientes polinomiales y en el caso de coeficientes funciones trascendentes presentamos y aplicamos un algoritmo que permite transformar la ecuación en otra con coeficientes funciones racionales. De esta forma, presentamos en esta sección una versión en español de los resultados publicados en [4].

3.1. Plano invariante

Consideremos un hamitoniano clásico en dos grados de libertad,

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + V(x_1, x_2).$$

Si se verifica que el plano Π de ecuaciones $\{x_2 = y_2 = 0\}$, es invariante por el flujo, entonces debe ser $\left.\frac{\partial V}{\partial x_2}\right|_{\Pi} = 0$. Considerando en desarrollo en serie de potencias con respecto a x_2, tenemos:

$$V = \phi(x_1) + \alpha(x_1)\frac{x_2^2}{2} + \beta(x_1, x_2)x_2^3 \tag{1}$$

Para ciertos ϕ, α y β, con $\lim_{x_2\to 0} \beta(x_1, x_2) < \infty$. La ecuación en variacionales normales (EVN) para cada curva solución contenida en Π y parametrizada por t, es de la forma:

$$\ddot{\xi} = a(t)\xi, \qquad \text{con } a(t) = \alpha(x_1(t)). \tag{2}$$

Consideremos entonces $Q(a, \frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \ldots)$ un polinomio diferencial en a con coeficientes constantes. Queremos calcular los poteciales (1) tales que para toda curva solución contenida en Π, la EVN (2) verifica $Q = 0$.

En particular calcularemos los potenciales hamiltonianios que en EVN dan lugar a *ecuaciones de Airy*, a potenciales cuadráticos (en particular el *oscilador armónico cuántico*, y en general *potenciales polinomiales de grado estrictamente impar*.

3.2. Exposición del método general

El flujo en el plano invariante Π, viene dado por el hamiltoniano restringido

$$h = \frac{y_1^2}{2} + \phi(x_1),$$

que produce el campo hamiltoniano,

$$X_h = y_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{d\phi}{dx_1}\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

dado que a lo largo de cada curva solución, $a(t) = \alpha(x_1(t))$, se tiene que

$$\frac{d^k a}{dt^k}(t) = (X_h^k\alpha)(x_1(t)).$$

La ecuación $Q(a, \frac{da}{dt}, \frac{d^2a}{dt^2}, \ldots) = 0$, puede entonces substituirse por,

$$Q(\alpha, X_h\alpha, X_h^2\alpha, \ldots) = 0.$$

Puede observarse que la expresión $Q(\alpha, X_h\alpha, X_h^2\alpha, \ldots)$ es un polinomio en y_1, cuyos coeficientes son polinomios diferenciales en $\alpha, \frac{d\phi}{dt}$ con coeficientes constantes; ya que todos los coeficientes han de anularse, hemos reducido el problema a un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias en α y ϕ.

En primer lugar hemos de calcular las expresiones para las derivadas sucesivas.

$$\frac{da}{dt} = y_1 \frac{d\alpha}{dx_1} \tag{3}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = y_1^2 \frac{d^2\alpha}{dx_1^2} - \frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1} \tag{4}$$

$$\frac{d^3a}{dt^3} = y_1^3 \frac{d^3\alpha}{dx_1^3} - y_1 \left(\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1}\right) + 2\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d^2\alpha}{dx_1^2}\right) \tag{5}$$

4. Ejemplos

Nos dedicamos en primer lugar a las ecuaciones que aparecen de forma mas sencilla, que son las ecuaciones de Shrödinger con potenciales polinomiales.

La ecuación del oscilador armónico es

$$\ddot{\xi} = c_0 \xi.$$

La ecuación es $Q = \frac{da}{dt} = 0$. Observando (3) se tiene que $\frac{d\alpha}{dx_1} = 0$, por tanto α es una constante, y ϕ es libre. Los hamiltonianos considerados que dan lugar a EVN tipo oscilador armónico son entonces de la forma:

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \phi(x_1) + \lambda x_2^2 + \beta(x_1, x_2)x_2^3$$

Las ecuaciones tipo Airy, son de la forma

$$\ddot{\xi} = (c_0 + c_1 t)\xi.$$

La ecuación es $Q = \frac{d^2a}{dt^2} = 0$. De (4) se tienen las ecuaciones:

$$\frac{d^2\alpha}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1} = 0.$$

Que se desacoplan en dos sistemas independientes,

$$\frac{d\alpha}{dx_1} = 0, \quad \begin{cases} \frac{d^2\alpha}{dx_1^2} = 0 \\ \frac{d\phi}{dx_1} = 0 \end{cases}$$

Las soluciones del primer sistema caen en el caso anterior y dan lugar a osciladores armónicos en EVN. Las soluciones del segundo sistema son:

$$\phi \text{ constante}, \quad \alpha = 2\lambda + 2\mu x_1.$$

Tenemos que los hamiltonianos considerados que dan lugar a ecuaciones de Airy en EVN son:

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \lambda x_2^2 + \mu x_1 x_2^2 + \beta(x_1, x_2)x_2^3.$$

La relación entre los coeficientes c_0, c_1 y el hamiltoniano, se obtiene integrando el flujo hamiltoniano en el plano invariante Π.

$$x_1 = \sqrt{2h}(t - t_0), \quad a(t, h) = \alpha(x_1(t))$$

Calculemos ahora los hamiltonianos cuyas EVN son de la forma:

$$\ddot{\xi} = (c_0 + c_1 t + c_2 t^2)\xi.$$

La ecuación diferencial satisfecha por a es $Q = \frac{d^3 a}{dt^3} = 0$. De (5) se tienen las ecuaciones:

$$\frac{d^3\alpha}{dx_1^3} = 0, \quad \frac{d}{dx_1}\left(\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d\alpha}{dx_1}\right) + 2\frac{d\phi}{dx_1}\frac{d^2\alpha}{dx_1^2} = 0.$$

La solución general de la primera ecuación es,

$$\alpha = \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2}x_1 + \frac{\gamma}{2}x_1^2,$$

sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene:

$$\frac{d^2\phi}{dx_1^2} + 3\frac{2\gamma}{\mu + 2\gamma x_1}\frac{d\phi}{dx_1} = 0,$$

ecuación que se integra mediante dos cuadraturas, obteniendose:

$$\phi = \frac{\delta}{(\mu + 2\gamma x_1)^2} + cte.$$

Los hamiltonianos que dan las EVN requeridas, son entonces:

$$H = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{\delta}{(\mu + 2\gamma x_1)^2} + \lambda x_2^2 + \mu x_1 x_2^2 + \gamma x_1^2 x_2^2 + \beta(x_1, x_2)x_2^3.$$

Es importante observar que, cuando $\delta \neq 0$, el flujo a lo largo del plano invariante Π no es lineal. Mediante funciones hiperbólicas, se obtiene:

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{z^2 - 2\delta}}{4\gamma h}, \quad \text{con} \quad z = \sqrt{2h}(\mu + 2\gamma x_1).$$

de otro modo,

$$8\gamma^2 h^2 (t - t_0)^2 = h(\mu + 2\gamma x_1)^2 - \delta.$$

5. Comentarios finales

En [4], se demostró que el grupo de Galois de cualquier ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes polinomiales es un grupo conexo no abeliano (aunque sea resoluble en algunos casos). Esto indica que si un sistema hamiltoniano tiene por EVN una ecuación de este tipo, entonces no es integrable. También se presentó un algoritmo para algebrizar ecuaciones diferenciales, tales como la ecuación de Matieu

$$y'' = (\sin x + \lambda)y,$$

la cual se demostró que no es integrable por cuadraturas y por lo tanto la familia de hamiltonianos asociados tampoco será integrable en el sentido de Liouville.

Agradecimientos

El autor desea agradecer a los organizadores del encuentro de Geometría, Carlos Luque y Reinaldo Núñez, por permitirme participar en el evento.

Bibliografía

[1] P. Acosta Humánez, *Sobre las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y el algoritmo de Kovacic*, Civilizar, (2004), 209 - 220.

[2] P. Acosta Humánez, *La teoría de Morales - Ramis y el algoritmo de Kovacic*, Lecturas Matemáticas, volumen especial. (2006), 21–56.

[3] P. Acosta Humánez & J.H. Pérez, *Una Introducción a la Teoría de Galois Diferencial*, Boletín de Matemáticas, **11**, (2004), 138-149.

[4] P. Acosta Humánez & D. Blázquez Sanz, *Non-Integrability of some hamiltonian systems with rational potential*, www.arxiv.org/archive/math-ph

[5] J. Kovacic, *An Algorithm for Solving Second Order Linear Homogeneous Differential Equations*, J. Symbolic Computation, **2**, (1986), 3-43.

[6] J.J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhäuser, Basel (1999).

[7] J.J. Morales-Ruiz & J. P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, I*, Methods and Applications of Analysis **8** (2001), 33-95.

[8] J.J. Morales-Ruiz & J. P. Ramis, *Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems, II*, Methods and Applications of Analysis **8** (2001).

[9] J. J. Morales-Ruiz, J. P. Ramis & C. Simó, *Integrability of Hamiltonian Systems and Differential Galois Groups of Higher Variational Equations*, por aparecer.

[10] J.J. Morales-Ruiz & C. Simó, *Non-integrability criteria for Hamiltonians in the case of Lamé Normal Variational Equations*, J. Diff. Eq. **129** (1996) 111-135.

[11] M. Van der Put & M. Singer, *Galois Theory in Linear Differential Equations*, Springer Verlag, New York, (2003).