PRODUCTOS ESCALARES Y MATRICES

Yolima Álvarez Polo
Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas
Bogotá D.C, Colombia

1. Productos escalares

Una función a dos variables, definida como sigue:

$$\psi : V \times W \longrightarrow E \tag{1}$$

donde V, W, E son espacios vectoriales sobre un mismo campo, que cumple:

(a) $\psi(u+v, w) = \psi(u, w) + \psi(v, w)$

(b) $\psi(\alpha v, w) = \alpha\psi(v, w)$

(c) $\psi(v, w+z) = \psi(v, w) + \psi(v, z)$

(d) $\psi(v, \alpha w) = \alpha\psi(v, w)$

se denomina **función bilineal**, porque es lineal en cada una de sus variables.
Cuando el campo $\mathbb{K}$ corresponde al campo $\mathbb{C}$ de los números complejos, la propiedad (d) se transforma en:

(d)' $\psi(v, \alpha w) = \overline{\alpha}\psi(v, w)$

en este caso se dice que ψ es una **función cuasibilineal**, porque es lineal en la primera variable y semilineal en la segunda.
Si en (1) se sustituye E por $\mathbb{K}$, se tienen funciones bilineales o cuasibilineales en las que el espacio vectorial codominio es el campo de escalares, en este caso $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y se llaman **formas bilineales** en el primer caso y **formas hermitianas** en el segundo.
Es de interés para la realización de este trabajo contar con la simetría de las formas (recuérdese lo que sucede con los productos escalares), así se hace necesario definirlas en un mismo espacio V, esto es,

$$\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{K} \tag{2}$$

de manera que

- φ es **simétrica**, cuando

$$\varphi(u, v) = \varphi(v, u) \qquad \forall u, v \in V$$

- φ es **antisimétrica** cuando

$$\varphi(u, v) = -\varphi(v, u) \qquad \forall u, v \in V$$

  En este caso si $u = v$, φ se anula.

Análogamente, para las formas hermitianas;

$$\psi(v,w) = \overline{\psi(w,v)} \qquad \forall v \in V, \forall w \in W$$

se dice **simétrica hermitiana**, y

$$\psi(v,w) = -\overline{\psi(w,v)} \qquad \forall v \in V, \forall w \in W$$

se llama **antisimétrica hermitiana**
Cabe destacar que se puede realizar un trabajo paralelo con la teoría de formas hermitianas, pero este se limita aquí, al tratamiento de formas sobre el campo de los números reales.

Ejemplo 1.1. *El producto escalar usual en* $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \langle\cdot\rangle : &\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(x,y) \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \end{aligned}$$

(a) Linealidad en la primera variable

$$\begin{aligned} \langle x+y, z\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} (x_i + y_i) z_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j + \sum_{i,j=1}^{n} y_i z_j \\ &= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \end{aligned}$$

(b) Homogeneidad

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha x_i y_j \\ &= \alpha \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \\ &= \alpha\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

La prueba es análoga para la segunda variable.

(c) Simetría

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} y_j x_i \\ &= \langle y, x\rangle \end{aligned}$$

En consecuencia, $\langle\cdot\rangle$ es un ejemplo de una forma bilineal simétrica

Ejemplo 1.2.

$$\begin{aligned}\varphi :&\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\\ &(x,y) \longmapsto \sum_{i,j=1}^{n-1} x_i y_j - x_n y_n\end{aligned}$$

es fácil ver que es otro ejemplo de forma bilineal simétrica.

La **representación matricial** (en una base ordenada fija) de la forma bilineal está dada por

$$\mathbf{A}_\phi = \begin{bmatrix} \phi(e_1,e_1) & \phi(e_1,e_2) & \dots & \phi(e_1,e_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(e_n,e_1) & \phi(e_n,e_2) & \dots & \phi(e_n,e_n) \end{bmatrix}$$

y se tiene el siguiente resultado $\phi(v,w) := v\mathbb{B}w^t$

Demostración.

$$\begin{aligned}\phi(v,w) &= \phi(\sum_{i=1}^n c_i e_i, \sum_{j=1}^n d_j e_j)\\ &= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n d_j \phi(e_i,e_j)\\ &= \sum_{i=1}^n c_i \sum_{j=1}^n d_j b_{ij}\\ &= (c_1 \sum_{j=1}^n d_j b_{1j} + \ldots + c_n \sum_{j=1}^n d_j b_{nj})\\ &= \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n d_j b_{1j} \\ \sum_{j=1}^n d_j b_{2j} \\ \sum_{j=1}^n d_j b_{nj} \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}\\ &= v\mathbb{B}w^t\end{aligned}$$

□

Así, el ejemplo 1 es representado mediante la matriz identidad I_n en la base canónica y el ejemplo 2 es descrito por la matriz,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

de manera que

1. $\langle x, y\rangle = xIy^T$
2. $\varphi(x, y) = xMy^T$

1.1. Espacio Euclídeo

Un espacio vectorial real V de dimensión n, provisto de una forma bilineal simétrica ϕ que satisface:

$$\phi(x, x) > 0, \quad x \neq 0 \tag{3}$$

se llama un **espacio real euclídeo**.
También se dice que es un espacio dotado de una forma positiva no degenerada porque su forma cuadrática no posee vectores isótropos (es decir, vectores no nulos tales que $\varphi(x, x) = 0$, vectores ortogonales a sí mismos).
V es un espacio vectorial de n dimensiones, $\langle\cdot\rangle$ es de signatura $(n, 0)$, corresponde a lo que se llama ordinariamente **geometría euclideana de n dimensiones**
Conceptos geométricos
Dados dos vectores de V, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ se define la **distancia euclideana** entre x y x' como:

$$\begin{aligned} d_E(x, x') &= \|x - x'\| = \sqrt{\langle x - x', x - x'\rangle} \\ &= \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2} \end{aligned}$$

1.2. Espacio Seudoeuclídeo

Para el caso particular, en que la forma bilineal simétrica φ descrita en el ejemplo 2, es de signatura $(n-1, 1)$, corresponde a lo que se llama ordinariamente **Geometría de Minkowski n-dimensional**.
De manera que su forma cuadrática asociada puede ser nula, positiva o negativa.
Así, $(\mathbb{R}^n, \varphi)$ es un espacio seudoeuclídeo, denominado espacio de Minkowski.

Conceptos geométricos

Obsérvese que $\|x\|$ toma valores complejos.
La **distancia minkowskiana** entre dos vectores de V, se determina por:

$$\begin{aligned} d_M(x, x') &= \|x - x'\| = \sqrt{\varphi(x - x', x - x')} \\ &= \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x'_{n-1})^2 - (x_n - x'_n)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

2. Productos escalares sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Se trabajan dos productos escalares definidos sobre el espacio de matrices con entradas complejas y se generalizan.

Ejemplo 2.1. Producto escalar de Fröbenius
$\langle A, B\rangle_F = Tr(B^*A)$.

1.

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle_F &= Tr(B^*A)\\ &= Tr(A^T B^{*T})\\ &= \overline{Tr(\overline{A^T B^{*T}})}\\ &= \overline{Tr(A^*B)}\\ &= \overline{\langle B, A\rangle}_F.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\langle \alpha A, B\rangle_F &= Tr(B^*\alpha A)\\ &= Tr(\alpha B^*A)\\ &= \alpha Tr(B^*A)\\ &= \alpha\langle A, B\rangle_F.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\langle A+B, C\rangle_F &= Tr(C^*(A+B))\\ &= Tr(C^*A + C^*B)\\ &= Tr(C^*A) + Tr(C^*B)\\ &= \langle A, C\rangle_F + \langle B, C\rangle_F.\end{aligned}$$

4.

$$\langle A, A\rangle_F = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geq 0.$$

5.

$$\langle A, A\rangle_F = 0, \quad \text{si y solamente si,} \quad A = 0, \;\; \text{en efecto,}$$

$\Leftarrow]$ Si $A = 0$, $A^* = 0$. $\langle A, A\rangle_F = Tr(A^*A) = Tr(A^2) = Tr(AA) = 0$.
$\Rightarrow]$ Si se supone que $\langle A, A\rangle_F = 0$ y $A \neq 0$. Como $A \neq 0$, existen i, j tales que $a_{ij} \neq 0$ y por tanto $Tr(A^*A) \neq 0$. Esto contradice que $A = 0$.

Se puede definir un producto escalar de valor real que permita inducir una noción de ángulo en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: es suficiente tomar la parte real del producto ya definido.

Ejemplo 2.2. $\langle A, B\rangle_{Re} := Tr(B_{Re}^T A_{Re} + B_{Im}^T A_{Im})$ *es un producto escalar sobre* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, en donde,* A_{Re} *y* B_{Re} *denotan las partes reales y,* A_{Im} *y* B_{Im} *sus partes imaginarias, respectivamente.*

Sean A, B y $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$

1.

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle_{Re} &= Tr(B_{Re}^T A_{Re} + B_{Im}^T A_{Im})\\ &= Tr(B_{Re}^T A_{Re}) + Tr(B_{Im}^T A_{Im})\\ &= Tr(B_{Re}^T A_{Re})^T + Tr(B_{Im}^T A_{Im})^T\\ &= Tr(A_{Re}^T B_{Re}) + Tr(A_{Im}^T B_{Im})\\ &= Tr(A_{Re}^T B_{Re} + A_{Im}^T B_{Im})\\ &= \langle B, A\rangle_{Re}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\langle \alpha A, B\rangle_{Re} &= Tr(\alpha B_{Re}^T A_{Re} + \alpha B_{Im}^T A_{Im})\\ &= \alpha Tr(B_{Re}^T A_{Re} + B_{Im}^T A_{Im})\\ &= \alpha \langle A, B\rangle_{Re}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\langle A+B, C\rangle_{Re} &= Tr(C_{Re}^T(A_{Re}+B_{Re}) + C_{Im}^T(A_{Im}+B_{Im}))\\ &= Tr(C_{Re}^T(A_{Re}+B_{Re}))\\ &+ Tr(C_{Im}^T(A_{Im}+B_{Im}))\\ &= Tr(C_{Re}^T A_{Re} + C_{Re}^T B_{Re})\\ &+ Tr(C_{Im}^T A_{Im} + C_{Im}^T B_{Im})\\ &= Tr(C_{Re}^T A_{Re}) + Tr(C_{Re}^T B_{Re})\\ &+ Tr(C_{Im}^T A_{Im}) + Tr(C_{Im}^T B_{Im})\\ &= Tr(C_{Re}^T A_{Re}) + Tr(C_{Im}^T A_{Im})\\ &+ Tr(C_{Re}^T B_{Re}) + Tr(C_{Im}^T B_{Im})\\ &= Tr(C_{Re}^T A_{Re} + C_{Im}^T A_{Im})\\ &= +Tr(C_{Re}^T B_{Re} + C_{Im}^T B_{Im})\\ &= \langle A, C\rangle_{Re} + \langle B, C\rangle_{Re}.\end{aligned}$$

4.

$$\langle A, A\rangle_{Re} = \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} |\beta_{ij}|^2 \geq 0.$$

donde α_{ij} y β_{ij} corresponden a los elementos de la parte real e imaginaria, respectivamente de la matriz A.

5.

$$\langle A, A\rangle_{Re} = 0, \quad \text{si y solamente si,} \quad A = 0.$$

$\Leftarrow$] Si $A = 0$ entonces $A_{Re} = 0$ y $A_{Im} = 0$, por tanto $\langle A, B\rangle_{Re} = Tr(B_{Re}^T A_{Re} + B_{Im}^T A_{Im}) = 0$.
$\Rightarrow$] Por otro lado, si $\langle A, A\rangle_{Re} = 0$, entonces $Tr(A_{Re}^T A_{Re} + A_{Im}^T A_{Im}) = 0$, en consecuencia $A_{Re} = 0$ y $A_{Im} = 0$ y así, $A = 0$.

A continuación se muestra la estrecha relación existente entre los dos productos escalares

Corollary 2.1. $\langle A, B\rangle_{Re} = \Re(\langle A, B\rangle_F)$

Demostración. Sean $A = A_{Re} + iA_{Im}$ y $B = B_{Re} + iB_{Im}$.

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle_F &= \langle A_{Re} + iA_{Im}, B_{Re} + iB_{Im}\rangle_F\\ &= Tr((B_{Re} + iB_{Im})^*(A_{Re} + iA_{Im})) && = Tr(B_{Re}^T A_{Re} + B_{Im}^T A_{Im})\\ &= Tr((B_{Re}^T - iB_{Im}^T)(A_{Re} + iA_{Im})) && + iTr(B_{Re}^T A_{Im} - B_{Im}^T A_{Re})\\ &= Tr(B_{Re}^T A_{Re} + iB_{Re}^T A_{Im} && = \langle A, B\rangle_{Re} + iTr(B_{Re}^T A_{Im} - B_{Im}^T A_{Re})\\ &- iB_{Im}^T A_{Re} + B_{Im}^T A_{Im})\end{aligned} \tag{5}$$

de donde se deduce que

$$\Re(\langle A, B\rangle_F) = \langle A, B\rangle_{Re}.$$

□

Corollary 2.2. *Si $D, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son matrices definidas positivas, entonces*

$$\langle A, B\rangle_{ED} = Tr(B^* EAD)$$

es un producto escalar en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
Tr(B^*EAD) &= vec(A)^T vec((EB^*D)^T)\\
&= vec(A)^T vec(D^T \overline{B} E^T)\\
&= vec(A)^T (E \otimes D^T) vec(\overline{B})\\
&= vec(A)^T (E^T \otimes D)^T vec(\overline{B})\\
&= ((E^T \otimes D) vec(A))^T vec(\overline{B})\\
&= \langle (E^T \otimes D) vec(A), vec(B)\rangle\\
&= \langle vec(A), vec(B)\rangle_{E^T \otimes D}
\end{aligned}$$

□

Conceptos Geométricos
Ortogonalidad: $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})^\perp = \mathcal{AS}_n(\mathbb{C})$ respecto a $\langle \cdot, \cdot\rangle_F$.

Demostración. Sean $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{C})$.
$\Leftarrow]$ Como B es antisimétrica $B = \frac{B-B^T}{2}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle A, B\rangle_F = Tr(B^* A) &= Tr\left(\left(\frac{B - B^T}{2}\right)^* A\right)\\
&= \frac{1}{2} Tr((B^* - \overline{B})A)\\
&= \frac{1}{2}\{Tr(B^*A) - Tr(\overline{B}A)\}\\
&= \frac{1}{2}\{Tr((B^*A)^T) - Tr(\overline{B}A)\}\\
&= \frac{1}{2}\{Tr(A^T\overline{B}) - Tr(\overline{B}A)\}\\
&= \frac{1}{2}\{Tr(A\overline{B}) - Tr(A\overline{B})\}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto implica que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})^\perp$ y en consecuencia $\mathcal{AS}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{S}_n(\mathbb{C})^\perp$.

$\Rightarrow]$ Por otro lado, si $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})^\perp$, $Tr(B^*A) = 0$ para toda $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$. Basta hacer la prueba con elementos de la base canónica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sea $E_{rs} = (e_{ij}^{rs})_{n\times n}$ tales que

$$e_{ij}^{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (r,s) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Considérese la matriz simétrica $E_{rs} + E_{sr}$, entonces

$$\begin{aligned} \langle E_{rs} + E_{sr}, B \rangle_F &= 0 \\ Tr(B^*(E_{rs} + E_{sr})) &= 0 \\ Tr(B^* E_{rs}) + Tr(B^* E_{sr}) &= 0. \end{aligned}$$

Esto significa que $\overline{b_{rs}} + \overline{b_{sr}} = 0$, es decir, $b_{rs} = -b_{sr}$. Por lo tanto, B es antisimétrica. □

Norma $\| A \|_. = \langle A, A \rangle_.^{\frac{1}{2}}$

El **ángulo** α que forman dos matrices A y $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ no nulas, puede calcularse mediante

$$Cos(\alpha) = \frac{\langle A, B \rangle_{Re}}{\| A \|_F \quad \| B \|_F}.$$

Sean A y B matrices no nulas, la **Proyección Ortogonal de A sobre B**, respecto a un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está dada por

$$\pi_B(A) = \frac{\langle A, B \rangle}{\langle B, B \rangle} B.$$

En particular, si $B = I_n$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior de Fröbenius o el generado por su parte real, se tiene que

$$\pi_I(A) = \frac{\langle A, I \rangle}{\langle I, I \rangle} I = \frac{Tr(A)}{n} I.$$

Bibliografía

[1] Alvarez P, Yolima, *Operadores lineales que preservan simetría y antisimetría.* Tesis de Maestría U. N. (2005)

[2] HORN, Roger A. & JOHNSON, Charles R., *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[3] Horn R. Horn, C. Johnson, *Matrix Analysis,* Cambridge U.P., 1985.

[4] Martinez, Juan Carlos. *Nuevos precondicionadores: Aproximación por distancias matriciales.* Tesis de Maestría U. de los Andes. (2005)

[5] SARRIA Z., Humberto. Algunos problemas de preservación lineal sobre los espacios de matrices Simétricas, antisimétricas y hermitianas. *A*cad. Col. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales 99 (2002) 262-270.