

LA CIRCULATURA DEL CUADRADO: UNA PERSPECTIVA DESDE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Armando Echeverry y Orlando Aya

Universidad Pedagógica Nacional

aecheverri@pedagogica.edu.co, oaya@pedagogica.edu.co

Los procesos para tratar de darle cuadratura al círculo con regla y compás permitieron el desarrollo de ramas de estudio de las matemáticas como las denominadas “curvas mecánicas”. Sin embargo, pensar el problema recíproco, esto es encontrar la circulatora del cuadrado con los mismos instrumentos produjo un conocimiento que desde la perspectiva geométrica y del análisis no es menos importante. Se presenta acá la descripción de algunos intentos por lograrla y su relación con aspectos básicos de los métodos numéricos.

ALGUNAS CIRCULATURAS DEL CUADRADO

Como lo reporta Beckmann (2006/1971), la primera aproximación racional del número π data de la época de los babilonios y los egipcios. Ellos encontraron la razón entre el radio de la circunferencia r y el perímetro C de la misma usando el método mecánico de trasladar la medida del radio con un objeto físico, como una cuerda, sobre la curva de la circunferencia. De esta manera establecieron que π es un número algo mayor que tres y estimaron la parte decimal buscando la fracción que podía representar dicho arco en relación con el radio; así lograron determinar que $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$ (Figura 1), o $3.125 < \pi < 3.143$.

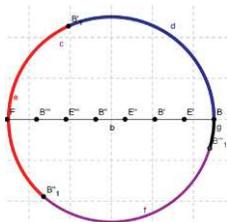


Figura 1. Primera aproximación “mecánica” de π

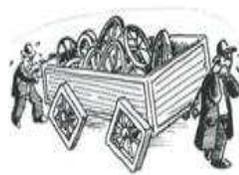


Figura 2. La paradoja de “cuadrar” el círculo

El menosprecio que los griegos desarrollaron por los métodos mecánicos, y la intención de solucionar diversos problemas geométricos mediante regla y compás, entre ellos la cuadratura del círculo, hicieron que los procesos de

aproximación fuesen más dispendiosos. Hoy en día, se sabe por qué el problema resulta ser irresoluble utilizando regla y compás; la razón fundamental se encuentra en los números construibles.

El problema y sus soluciones aproximadas en el contexto geométrico

Hallar la cuadratura del círculo equivale a encontrar, sólo con regla y compás euclídeos, un cuadrado cuya área sea igual a la de un círculo dado. Tras muchos intentos, F. Lindemann en 1882 demostró que resolver el problema bajo esas condiciones es imposible ya que π es un número trascendente. El esfuerzo para cuadrar el círculo llevó al estudio de algunas de las denominadas “curvas mecánicas”, pero también a conceptos matemáticos muy importantes como son la teoría de la aproximación y las cuadraturas.

Una forma de abordar el mismo problema es pensarlo de manera dual, esto es, hacer la “circulatura del cuadrado”. Esto significa encontrar un círculo que tenga la misma área de un cuadrado dado. El término fue acuñado por el historiador de la matemática Moritz Cantor (1829-1920). Si bien el problema es menos conocido, ha sido abordado por varios matemáticos y artistas. También resulta irresoluble utilizando únicamente regla y compás, pues se tendría un cuadrado de lado L y se desea construir una circunferencia de radio r de tal forma que $L^2 = \pi r^2$. Sin pérdida de generalidad se puede considerar un cuadrado unitario y por lo tanto r estaría dado por $r = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$ de donde $\pi = \frac{1}{r^2}$.

Ahora bien, hacer la circulatura del cuadrado desde un punto de vista pragmático resulta más viable pues se podría, por ejemplo, considerando el diseño y la ingeniería, construir una rueda (Figura 2). Así se puede empezar a hacer el proceso desde dos opciones extremas, a saber: con una circunferencia inscrita y luego con una circunferencia circunscrita.

Circulatura por acotamiento numérico

En el siguiente análisis se asumirá que $L=1$. En el caso de la circunferencia inscrita se tendría que, siendo A_C el área de la circunferencia, $A_C < 1$ y como el radio es $r = \frac{1}{2}$ entonces el valor estimado de π , π^* sería $\pi^* = 4$. De otra parte,

para el caso de la circunferencia circunscrita se tendrá que el radio es $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y como $A_C > 1$, entonces el valor estimado de π es: $\pi^* = \frac{1}{(\sqrt{2}/2)^2} = 2$; así se tie-

ne un acotamiento para $\pi^* : 2 \leq \pi^* \leq 4$ (Figura 3).

Luego una buena aproximación podría darse por dos vías: una aritmética ($\pi^* = 3$) y otra geométrica que consiste en trabajar con una radio equivalente al determinado por el valor promedio de los radios de la circunferencia inscrita y la circunscrita, procedimiento construible con regla y compás usando números construibles o la bisectriz de un segmento.

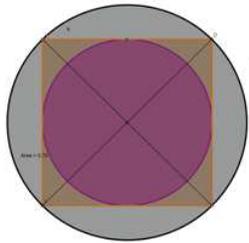


Figura 3. Primer acotamiento para π^*

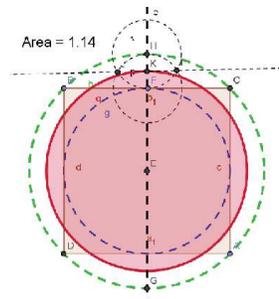


Figura 4. Segundo acotamiento para π^*

En la Figura 4 se presenta uno de los procesos, donde $r = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$.

Como se tiene que $A_C > 1$, $\pi^* = \frac{1}{((1 + \sqrt{2})/4)^2} = \frac{16}{(1 + \sqrt{2})^2}$ podría reescribirse

como $\pi^* = 16(3 - \sqrt{2})$ y sería aproximadamente $\pi^* = 2.7452$. Es decir, se tiene un acotamiento para π^* dado por $2.7452 \leq \pi^* \leq 4$ o bien $16(3 - \sqrt{2}) \leq \pi^* \leq 4$, según sea el procedimiento determinado. La segunda opción pareciera ser un retroceso en la estimación lograda anteriormente pues el ancho del intervalo es mayor; no obstante, su reiteración permite no sólo llegar a acotar adecuadamente a π^* sino a mantener la interpretación geométrica del problema original. La siguiente iteración del proceso se hará determinando el punto medio entre

los radios $r = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1 + \sqrt{2}}{4}$. Esto es un valor de $r = \frac{\frac{1 + \sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3 + \sqrt{2}}{8}$ con

lo cual $\pi^* = \frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{2}}{8}\right)^2} = \frac{64}{(3+\sqrt{2})^2} = \frac{64(11-6\sqrt{2})}{49}$. En aritmética de cinco cifras,

$\pi^* = 3.2845$; se tiene un intervalo dado por $16(3-\sqrt{2}) \leq \pi^* \leq \frac{64(11-6\sqrt{2})}{49}$.

El procedimiento se puede iterar sucesivamente y obtener la aproximación de π tan cerca del valor como se desee, en términos de los métodos numéricos, con la tolerancia que se requiera. Esto es reconocer la aproximación no sólo como una noción básica en el cálculo sino en la matemática en general (García, Serrano y Díaz, 2002). En las Figuras 5 y 6 se presenta el proceso geométrico del tercer y cuarto acotamiento para π^* . El método numérico que se está aplicando no es otro que el de bisección (Burden, 2001) y encarna los defectos de este método, siendo el principal, su baja rapidez de convergencia hacia la solución, lo que implica el aumento de los pasos de cálculo.

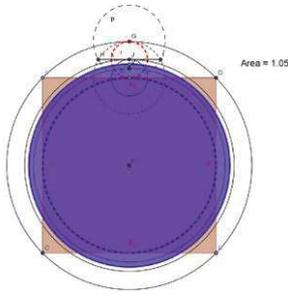


Figura 5. Tercer acotamiento para π^*

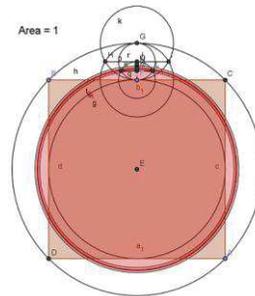


Figura 6. Cuarto acotamiento para π^*

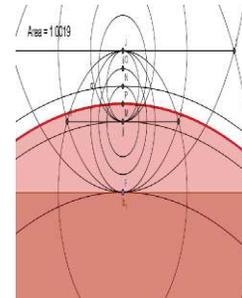


Figura 7. Detalle de la cuarta iteración

Parece que se ha encontrado la solución, no obstante es una ilusión debida al procesador y el software usados; en la Figura 7 se muestra en detalle la región donde se biseccion los segmentos presentados en la cuarta iteración del proceso y el cálculo con el software del área utilizando redondeo y aritmética en cinco cifras. En cuanto al error porcentual de esta cuarta iteración, usando redondeo en cuatro cifras decimales es de: $E\% = \frac{|3.2845 - 3.1416|}{3.1416} 100\% = 4.55\%$. En algunos contextos prácticos, no matemáticos, podría resultar suficiente.

Los aspectos relacionados con el error desde el enfoque de la matemática como ciencia pura y exacta casi que resultarían indeseables; no obstante las nue-

vas tendencias que consideran a la matemática como un constructo social y cultural reconocen el error desde tres perspectivas:

- (i) Como un agente constructor de nuevo conocimiento.
- (ii) Como un factor ineludible en el contexto de las aplicaciones.
- (iii) Como un aspecto que ningún procesador, por eficaz que sea, puede evitar ya que al trabajar en base binaria, sin importar cuántos bits se empleen, sólo se tendrán aproximaciones racionales para un número irracional. Ellas son las aproximaciones por las reductas racionales o un número irracional (Campos, 1978; Luque, Mora y Torres, 2006).

Es en este marco donde surgen otras circulaturas del cuadrado; cada una de ellas responde a un proceso geométrico que utiliza sólo regla y compás.

Circulaturas por acotamiento geométrico

Numerosos artistas buscaron presentar la circulatura mediante novedosas construcciones; la primera de ellas parece ser de un oficio relacionado con las ciencias místicas y artesanales que es reportado por Maskin (1999). La construcción es como sigue: se tiene un cuadrado de apotema conocido. Sin pérdida de generalidad, si el cuadrado es unitario, la apotema será $a=1/2$. Se busca construir un triángulo rectángulo que tenga a a como cateto mayor y ángulos agudos cuyas medidas sean 30° y 60° . Como se tiene que en un triángulo al ángulo mayor se debe oponer el lado mayor, entonces, siendo O el centro del cuadrado, se debe:

- (i) Trazar una perpendicular a uno de los lados que pase por O y determinar el punto de intersección A ; con centro en O y radio OA se traza un arco. Ahora con centro en A y radio OA se traza un segundo arco; el punto de intersección de los arcos es B y resulta claro que se determina un triángulo equilátero OAB donde $m\angle AOB = 60^\circ$.
- (ii) Trazar la mediatriz del \overline{AB} y determinar el punto medio de éste como C .
- (iii) Construir la \overline{OC} y nombrar el punto donde corta al lado, como D . Por propiedades de los triángulos equiláteros, \overline{OC} es también bisectriz del $\angle AOB$ con lo que $m\angle AOC = 30^\circ$, y así se tiene construido el $\triangle AOC$ con los requisitos dados.

La circunferencia de radio OC da la circunferencia aproximada del cuadrado. El valor de OC se puede determinar por semejanza de triángulos (Figura 8).

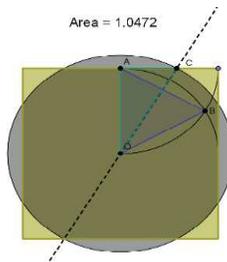


Figura 8. Circunferencia mística y artesanal

Se tiene que $\frac{AC}{AO} = \frac{AD}{OD}$, $AD=1/4$, $AO=1/2$ y $OD = \sqrt{(OA)^2 - (AD)^2}$, de donde $OD = \sqrt{3}/4$. Entonces, $AC = \sqrt{3}/6$. Se deduce que $OC = \sqrt{(OA)^2 + (AC)^2}$. O sea, $OC = \sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/6)^2} = \sqrt{3}/3$ y la aproximación de π^* es $\pi^* = \frac{1}{(\sqrt{3}/3)^2} = 3$.

Eso da un error porcentual, con redondeo y aritmética de cuatro cifras, de $E\% = \frac{|3 - 3.1416|}{3.1416} 100\% = 4.51\%$.

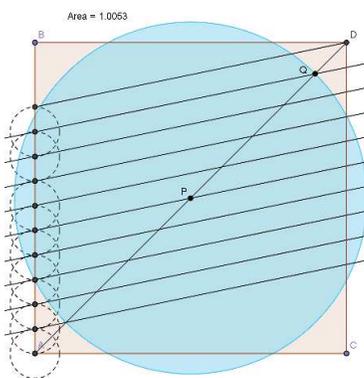


Figura 9. Circunferencia reportada por Durero

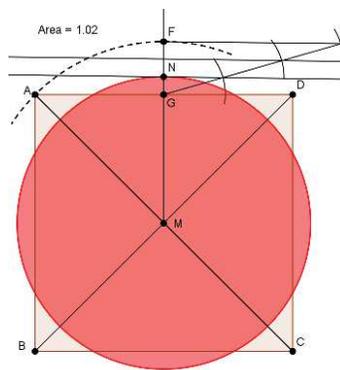


Figura 10. Circunferencia sulvasutra

El artista Alberto Durero (1471-1528) desarrolló una circunferencia que, según él mismo lo reporta en su obra *De la medida* (Durero, 1525/2000), fue empleada desde la antigüedad. Consistía en tomar, sobre un cuadro unitario, la diagonal y segmentarla en diez partes para luego tomar como radio de la circunferencia cuatro de las diez particiones. En la Figura 9 se presenta la circunferencia realizada con regla y compás, utilizando el procedimiento clásico para dividir un segmento dado en n segmentos congruentes. El valor de π^* , dado que la me-

dida de la diagonal está dada por $d = \sqrt{2}$, es de $\pi^* = \frac{1}{(2\sqrt{2}/5)^2} = \frac{25}{8} = 3.125$. El

valor así determinado da, en aritmética de cinco cifras y redondeo, como error porcentual: $E\% = \frac{|3.1416 - 3.125|}{3.1416} 100\% = 0.53\%$.

Otra manera interesante de aproximar la cuadratura está reportada por autores como Boyer (2003/1968) y fue propuesta en el texto indio de los sulvasutras. El proceso consistía en tomar las diagonales y determinar el punto de intersección de las mismas M y, con centro en ese punto, trazar un arco de radio la semidiagonal, es decir MA (Figura 10). Luego se traza un rayo paralelo al lado \overline{AB} desde M determinado el punto G de corte en éste con el lado \overline{AD} y el punto F como el punto de intersección del rayo con el arco previamente trazado.

Finalmente se triseca el \overline{GF} y se toma el punto N tal que $GN = \frac{GE}{3}$, donde MN

determina el radio y aproxima la circunferencia. Como $GE = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ y

$GN = \frac{(\sqrt{2}-1)/2}{3} = \frac{\sqrt{2}-1}{6}$, el radio de la circunferencia es $r = \frac{2+\sqrt{2}}{6}$. Así, el valor

de π^* sería: $\pi^* = 18(3 - 2\sqrt{2})$, lo que da un error porcentual con redondeo y

aritmética de cuatro cifras de: $E\% = \frac{|3.0883 - 3.1416|}{3.1416} 100\% = 1.7\%$.

Tal vez la circunferencia del cuadrado desde una obra artística más conocida y curiosa es la que se atribuye a Piera en un análisis artístico de la obra “El Hombre de Vitrubio” (Figura 11) de Da Vinci (1452-1519). Esta soportada sobre una curiosa construcción oculta pero de la cual Leonardo dejó suficientes evidencias como lo señala este analista artístico.

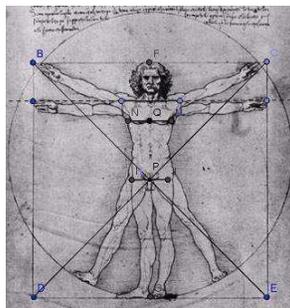


Figura 11. Pistas en el Hombre de Vitrubio (Piera, 2002)

- a) En el dibujo, los brazos horizontales del hombre indican unos puntos específicos sobre los lados del cuadrado.
- b) Los puntos anteriores determinan el segmento visible en la base de la cabeza.
- c) Un segmento visible se encuentra en la base de la raíz del pene, y otro una las tetillas. Si se considera el punto medio de cada uno de estos segmentos, el primero (P) resulta ser el punto medio del cuadrado y el otro (Q) está ubicado a su vez en el punto medio del segmento que une el centro con un punto del lado superior del cuadrado. Es decir, Q estará ubicado a los $\frac{3}{4}$ de la altura del hombre.

Ahora se realizan los siguientes trazos (Figura 12):

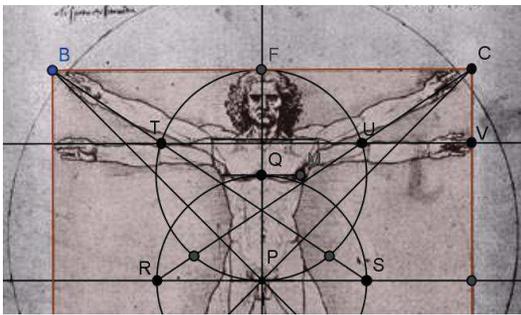


Figura 12. Primeras construcciones sobre pistas preliminares

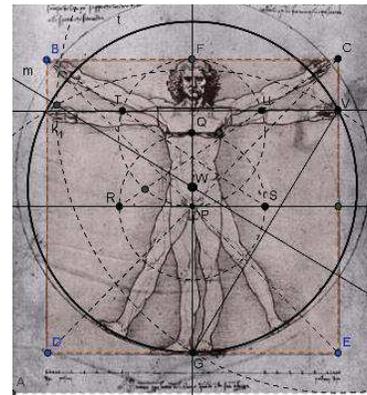


Figura 13. Determinación de la circunferencia del cuadrado

- (i) La circunferencia con centro en Q y en radio PQ , es decir la circunferencia t de centro Q y radio $\frac{1}{4}$, asumiendo el cuadrado de lado unitario.
- (ii) Las rectas paralelas a los lados y que pasan por P . Con centro en P y radio $\frac{1}{2}$ una circunferencia; se determinan los puntos R y S donde ésta interseca la recta horizontal.
- (iii) Los segmentos \overline{BS} y \overline{CR} que cortan a la circunferencia t en los puntos T y U que, evidentemente, determinan una paralela a \overline{BC} ; \overline{TU} interseca al lado \overline{CE} precisamente en V que corresponde al índice de la mano izquierda del hombre.

(iv) \overline{VG} (Figura 13) y luego la mediatriz m de este segmento. Se determina el punto de corte de ésta con la \overline{FG} y se denota por W .

(v) La circunferencia C con centro W y radio GW . Esta circunferencia corresponde entonces a la circunferencia del cuadrado.

Para calcular el valor de π^* por esta aproximación, si X y Y denotan respectivamente los puntos donde \overline{BS} y \overline{CR} y \overline{TU} y \overline{FG} se intersecan (Figura 14), $FQ = 1/4$, $FC = 1/2$ y $FX = 1/3$. Por tanto, aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle XFC$, $XC = \sqrt{(XF)^2 + (FC)^2} = \sqrt{(1/3)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{13}/6$, y aplicándolo al $\triangle QYU$, $QU = \sqrt{(QY)^2 + (YU)^2} = 1/4$ (1).

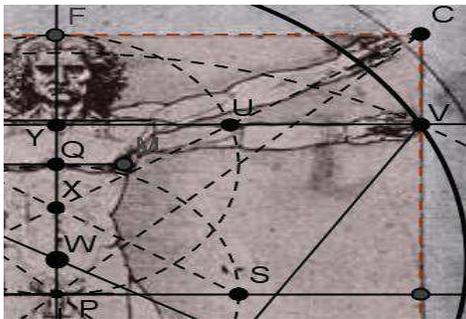


Figura 14. Detalle de la región para la determinación de π

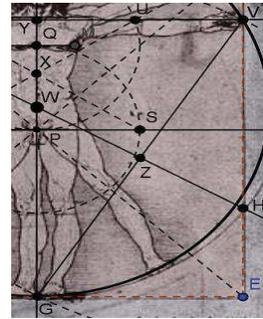


Figura 15. Detalle para la determinación de r

Ahora, del Teorema de Thales o la semejanza entre $\triangle XFC$ y $\triangle XYU$, se tiene que: $\frac{XU}{XY} = \frac{XC}{XP}$ (2), y $\frac{XU}{YU} = \frac{XC}{FC}$ (3). Pero, al ser Y, Q, X puntos colineales se tiene que $YQ + QX = XY$ y $\frac{XU}{QX + YQ} = \frac{XC}{XF}$. Como $QX = 1/12$ entonces

$$\frac{XU}{(1/12) + YQ} = \frac{XC}{XF} \quad (4).$$

Las ecuaciones (2) y (4) se pueden reescribir con los valores conocidos como: $\frac{XU}{YU} = \frac{XC}{1/2}$ y $\frac{XU}{(1/12) + YQ} = \frac{(\sqrt{16})/6}{1/3}$. El sistema de ecuaciones así obtenido (tres ecuaciones con tres incógnitas) se puede resolver para YQ . Se obtiene la ecuación: $(YQ)^2 + (3/2)^2 (YQ + (1/12))^2 = (1/4)^2$ o $13(YQ)^2 + \frac{3}{2} YQ - \frac{1}{16} = 0$. La raíz positiva de esta ecuación es $YQ = (4\sqrt{3} - 3)/52$.

De otra parte, $FY = FQ - YQ = \frac{1}{4} - YQ$ es decir, $FY = \frac{1}{4} - \frac{4\sqrt{3}-3}{52} = \frac{32-8\sqrt{3}}{104}$.

Dado que $FY = 1 - GY$, entonces $GY = 1 - FY = 1 - ((32-8\sqrt{3})/104)$, lo que simplificado da $GY = (9+\sqrt{3})/13$. Si se determinan los puntos Z y H como el punto medio de \overline{VG} y el punto donde la mediatriz de \overline{VG} corta al lado \overline{CE} , respectivamente, se encuentran los siguientes hechos (Figura 15):

(i) $\triangle GZW$ y $\triangle VZH$ son congruentes

(ii) $VZ = VG/2$

(iii) $VH = r$ siendo r el radio que se quiere determinar

(iv) Existen dos triángulos rectángulos determinados por $\overline{VG}, \overline{VE}, \overline{GE}, \frac{\overline{DJ}}{2}$ y el punto H .

(v) De lo anterior y por triángulos semejantes se tiene $\frac{VG}{VE} = \frac{VH}{VZ}$; es decir

$$\frac{VG}{VE} = \frac{VH}{\frac{VG}{2}}, \text{ de lo que se deduce que } (VG)^2 = 2(VH)(VE).$$

$$(vi) (VG)^2 = (VE)^2 + (EG)^2 = (VE)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

De los hechos (iii), (v) y (vi), junto con los resultados obtenidos anteriormente y resolviendo para r , se obtiene que $r = \frac{4(9+\sqrt{3})^2 + (13)^2}{104(9+\sqrt{3})} = \frac{333 + 11\sqrt{3}}{624}$.

$$\text{Finalmente, como } \pi^* = \frac{1}{r^2} \text{ entonces } \pi^* = \frac{1}{((333+11\sqrt{3})/624)^2} = \left(\frac{8(333-11\sqrt{3})}{1417} \right).$$

Usando aritmética de cinco cifras y redondeo, esto equivale a $\pi^* = 3.1416$ lo que en esa misma aritmética da un error porcentual nulo. No obstante si se aumentan las cifras decimales a ocho ya se aprecia una diferencia. El valor de π^* será $\pi^* = 3.14162373$, lo que dará un error porcentual determinado por:

$$E\% = \frac{|3.14162373 - 3.14159265|}{3.14159265} 100\% = 0.00099\% .$$

A MANERA DE CODA

El desarrollo de métodos de aproximación alberga en sí mismo estructuras matemáticas que han sido y deben seguir siendo exploradas. La utilización de la circulatoria del cuadrado y las posibles aproximaciones π^* al número π dentro del presente artículo sólo ha sido un pretexto para analizar la forma en que se elaboran algunos métodos que procuran dos aspectos relevantes dentro del estudio de los métodos numéricos; el primero es crear un proceso que resulte algorítmico y el segundo es encontrar valores cada vez más próximos al valor real.

Los actuales procesadores se disputan el honor de calcular números como π , $\sqrt{2}$, e con cada vez más cifras decimales y eso les da un cierto carácter de prestigio y estatus. No obstante lo anterior, cualquier resultado que se obtenga mediante un procesador, de un número trascendente, será sólo eso, una excelente aproximación y sólo retardara el hacernos conscientes del error si no reconocemos esos procesos como *procesos de aproximación*.

REFERENCIAS

- Beckmann, P. (2006/1971). *Historia de π* . México: Conculca. [Original: *A history of π* . New York: The Golem Press, 1971.]
- Boyer, C. (2003/1968). *Historia de la matemática*. (Trad. Mariano Martínez Pérez). México: Alianza Editorial. [Original: *A history of mathematics*. New York: Wiley & Sons Inc., 1968. Primera edición en español: Alianza Editorial, 1986].
- Burden, R.L. y Douglas, F.J. (2002). *Análisis numérico*. (Séptima edición.). México, DF: Cengage Learning/Thomson Internacional. [Original: *Numerical Analysis*, Thomson International.]
- Campos, A. (1978). *Matemática para filosofía: de Pitágoras a Euclides*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Durero, A. (2002/1525). *De la medida*. Madrid, España: Editorial Akal S.A.
- García, G., Serrano, C. y Díaz, H. (2002). *La aproximación una noción básica en el cálculo. Un estudio en la educación básica*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2006). *Estructuras análogas a los números reales*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Maskin, J.S. (1999). La verdadera resolución de la cuadratura del círculo. *Symbolos*, 17-18.
Versión digital disponible en <http://ciclologia.com/cuadraturadelcirculo.htm>.
- Piera. C. (2002). *Leonardo Da Vinci y la cuadratura Humana*. Versión digital disponible en http://www.asociacionartistica.com/06_reseñas/articulos/leonardo.pdf.