

CONSTRUCCIÓN DE CÓNICAS, TANGENTES Y ENVOLVENTES

Benjamín Sarmiento

Universidad Pedagógica Nacional

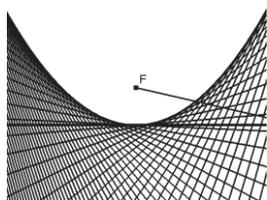
bsarmiento@pedagogica.edu.co

Este cursillo se centra en la construcción de las cónicas y sus tangentes con apoyo del software Cabri Plus II, tema desarrollado en el curso de geometría analítica de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Se inicia presentando los conceptos de envolvente de una familia de rectas, directrices, focos y circunferencias focales. En la primera sesión se presentarán las construcciones más comunes de las cónicas, es decir, construcciones a partir de las definiciones. En la segunda sesión se construirá la familia de tangentes de cada cónica. En la tercera sesión se construirán tangentes específicas dada la cónica y un punto exterior a ella. En lo posible, los asistentes elaborarán definiciones para objetos que usualmente no se definen en los textos cuando se estudian las cónicas, tales como recta directriz y circunferencia focal.

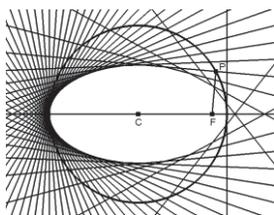
CONSTRUCCIÓN DE ENVOLVENTES

En esta sección se construirán las cónicas como envolventes de familias de rectas, usando dos métodos (ver Lehman, 1994; Oteyza et al., 1994; Sarmiento y Rodríguez, 2009a, 2009b).

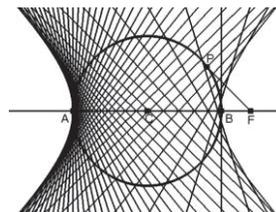
Primer método



(a) Parábola



(b) Elipse



(c) Hipérbola

Figura 1. Construcción de las envolventes de la parábola, la elipse y la hipérbola (primer método)

Parábola: se utilizará una recta L (que contiene al vértice) y un punto F (foco) exterior a la recta L (Figura 1a).

Elipse: se utilizará una circunferencia con centro C (circunferencia principal) y un punto F (foco) interior a la circunferencia (Figura 1b).

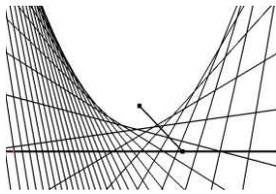
Hipérbola: se utilizará una circunferencia con centro C (circunferencia principal) y un punto F (foco) exterior a la circunferencia (Figura 1c).

Segundo método

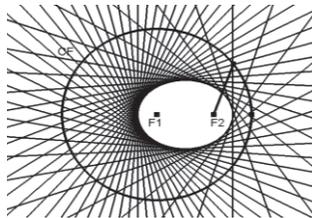
Parábola: se utilizarán un punto F (foco) y una recta D (directriz) (Figura 2a).

Elipse: se utilizará una circunferencia con centro $F1$ (circunferencia focal) y un punto $F2$ (foco) interior a la circunferencia, donde $F1$ y $F2$ son los focos (Figura 2b).

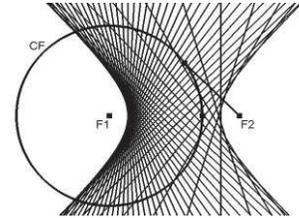
Hipérbola: se utilizará una circunferencia con centro $F1$ (circunferencia focal) y un punto $F2$ (foco) exterior a la circunferencia, en donde los focos son $F1$ y $F2$ (Figura 2c).



(a) Parábola



(b) Elipse



(c) Hipérbola

Figura 2. Construcción de las envolventes de la parábola, la elipse y la hipérbola (segundo método)

CONSTRUCCIÓN DE TANGENTES

En esta sección se definirán los focos, las directrices y circunferencias focales como lugares geométricos, y serán utilizados para la construcción de: tangente a una cónica por un punto dado, tangentes que pasan por un punto exterior a la cónica, y tangentes a la cónica que tengan una pendiente específica.

Tangentes para la parábola

Aquí se considerarán tres casos: (1) Dada la parábola, su foco y directriz, construir la tangente por un punto T de la parábola. (2) Dada la parábola, su foco y directriz, construir las tangentes a la parábola que pasan por un punto exterior a la parábola. (3) Dada la parábola, su foco y directriz, construir la

tangente a la parábola que tiene la misma pendiente de una recta dada. En la Figura 3 se ilustran los resultados finales de las construcciones para los tres casos.

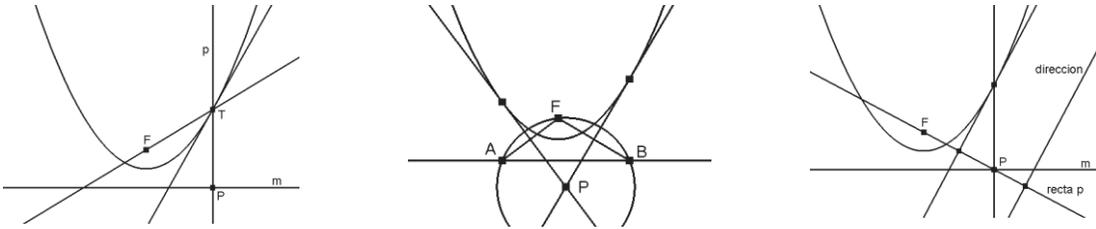


Figura 3. Construcción de las tangentes de la parábola

Tangentes para la elipse

Aquí se considerarán tres casos: (1) Dada la elipse y sus focos, construir la tangente por un punto T de la elipse. (2) Dada la elipse y sus focos, construir las tangentes a la elipse que pasan por un punto exterior a la elipse. (3) Dada la elipse y sus focos, construir la tangente a la parábola que tiene la misma pendiente de una recta dada. En la Figura 4 se ilustran los resultados finales de las construcciones para los tres casos.

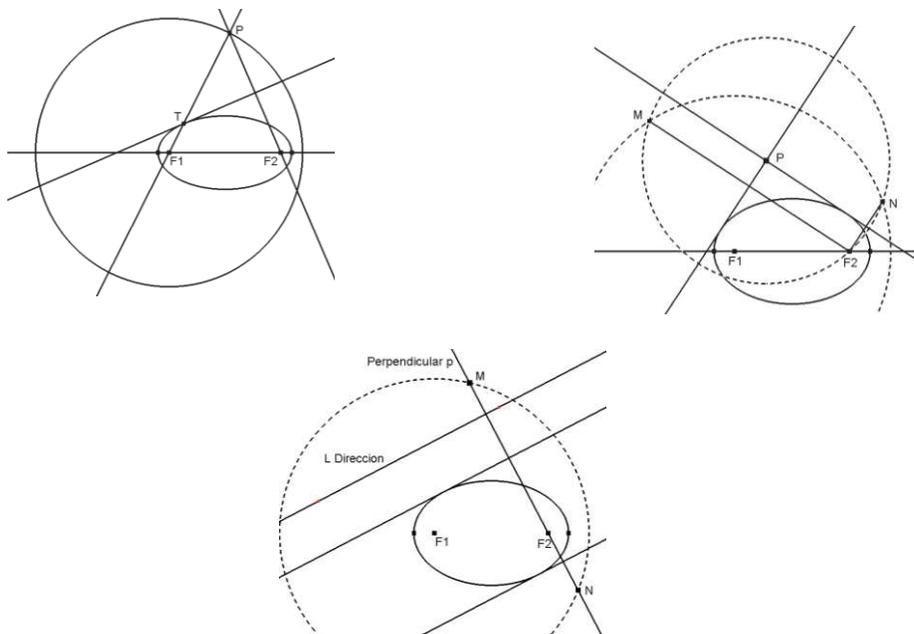


Figura 4. Construcción de las tangentes de la elipse

Tangentes para la hipérbola

Aquí se considerarán tres casos: (1) Dada la hipérbola y sus focos, construir la tangente por un punto T de la hipérbola. (2) Dada la hipérbola y sus focos, construir las tangentes a la hipérbola que pasan por un punto exterior a la hipérbola. (3) Dada la hipérbola y sus focos, construir la tangente a la hipérbola que tiene la misma pendiente de una recta dada. En la Figura 5 se ilustran los resultados finales de las construcciones para los tres casos.

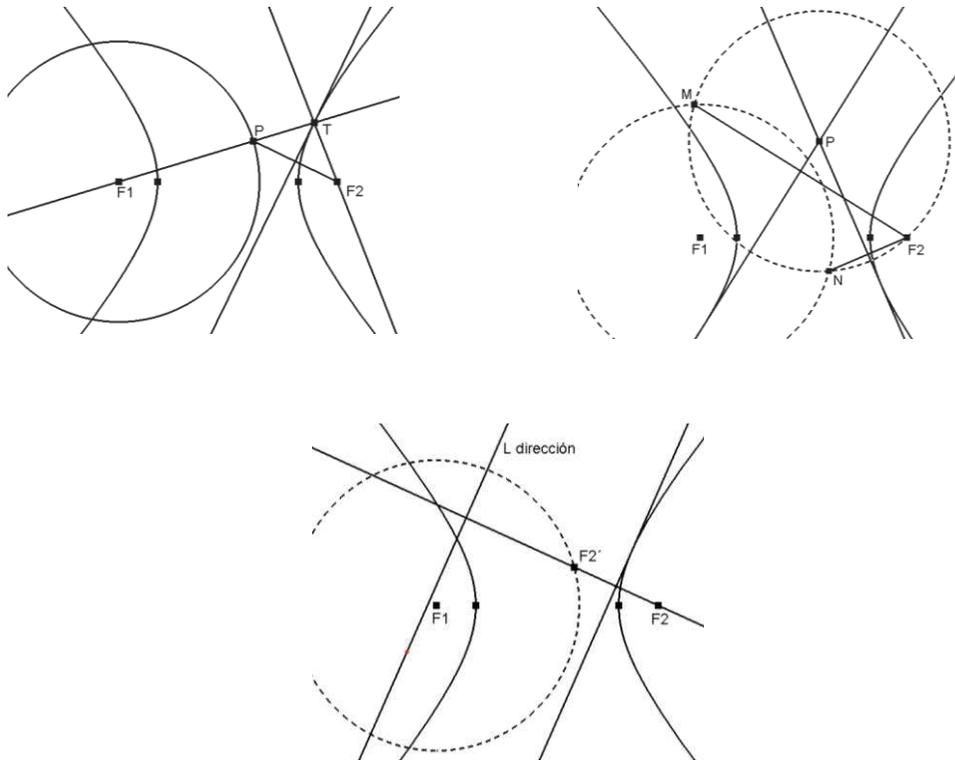


Figura 5. Construcción de las tangentes de la hipérbola

REFERENCIAS

- Lehmann, C. (1994). *Geometría analítica*. México: Limusa.
- Oteyza, E. et al. (1994). *Geometría analítica*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009a). *Los tres problemas clásicos de la geometría*. Bogotá, Colombia: El autor.
- Sarmiento, B. y Rodríguez, Y. (2009b). *Setenta curvas famosas*. Bogotá, Colombia: El autor.