Contribución de la geometría a la formación de la noción de estructura de grupo. Una visión histórico-epistemológica

Erdulfo Ortega
Universidad de Nariño
veortegap@hotmail.com

Frente al enfoque que ha enfatizado, bien sea explícita o implícitamente, que el concepto de grupo abstracto surgió al finalizar el siglo XIX, por abstracción de la noción de grupo de permutaciones, derivada de la teoría de ecuaciones algebraicas, se trata de presentar argumentos históricos y epistemológicos que han conducido a esclarecer el hecho de que el proceso de formación de la noción abstracta de estructura de grupo tuvo tres raíces, y una de ellas es la geometría que, además, junto con la teoría de números, hizo posible que la idea de estructura matemática surgiera a partir de la toma de conciencia de profundos fenómenos de isomorfismos.

Introducción

No cabe duda de que el surgimiento de la geometría analítica cartesiana, en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega, sin embargo, las primeras etapas fundamentales que se orientaron a hacer a un lado el viejo punto de vista acerca de la naturaleza de la geometría, solamente tuvieron lugar hacia finales del siglo XVIII. Es claro también que el álgebra y el análisis, antes que la geometría, fueron las disciplinas que asumieron el liderazgo en superar las visiones clásicas. Se presentaba así un notable y sorprendente contraste. Mientras que los cambios fundamentales en geometría quedaron a la zaga, en el álgebra y el análisis los cambios se desarrollaron explosivamente, tanto en extensión como en profundidad, hasta la finalización del siglo XIX.

Monge y la geometría descriptiva

Al hacer referencia al extraordinario crecimiento de la geometría en el siglo XIX, Wussing (1984) observa que este provino directamente de la Revolución Industrial al elevar las exigencias para los ingenieros matemáticamente preparados. Agrega que, el denominado por Monge, *lenguaje de la ingeniería* llegó

Ortega, E. (2011). Contribución de la geometría a la formación de la noción de estructura de grupo. Una visión histórico-epistemológica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 397-408). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

a ser dominante en la Escuela Politécnica de París, fundada de acuerdo con las exigencias de la Gran Revolución Francesa. La geometría descriptiva, creada por Monge, ejerció una fuerte influencia en las matemáticas de los gimnasios y universidades y preparó el terreno para el desarrollo de la geometría. Monge, al crear la geometría descriptiva, introdujo las consideraciones proyectivas en la geometría finalizando el siglo XVIII. Esta ciencia, que tuvo su origen en el proyecto de fortificaciones, contiene una forma de representar y analizar objetos tridimensionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos. Eves (1969, p. 273, 274) afirma que los trabajos de Desargues y de Poncelet, lo mismo que los de sus seguidores, condujeron a los geómetras a clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: las propiedades métricas, en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos, y las propiedades descriptivas, en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí. El Teorema de Pitágoras, por ejemplo, es una propiedad métrica. La geometría proyectiva estudia las propiedades descriptivas de las figuras geométricas. Todas las propiedades de incidencia, exceptuando únicamente propiedades métricas especiales, son proyectivas.

EL PAPEL DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Poncelet, discípulo de Monge, fue quien impulsó el resurgimiento real de la geometría proyectiva especialmente, según Eves, con la publicación en París, en el año de 1822, de su obra *Traité des propriétés proyectives des figures*, con la cual "dio un ímpetu tremendo al estudio del tema e inició el llamado gran período de la historia de la geometría proyectiva", en cuyo campo entraron muchos matemáticos, como Gergone, Brianchon, Chasles, Plücker, Steiner, Von Staudt, Reye y Cremona, destacadas figuras de la historia de la geometría y, en particular, de la historia de la geometría proyectiva (Eves, 1969, p. 273). La obra de Poncelet y el desarrollo de la geometría proyectiva fueron realizaciones inmediatas del poderoso impulso impartido por Monge y la Escuela Politécnica. Monge planteaba el uso general de *proyecciones ortogonales,* en cambio para Poncelet la principal herramienta era el concepto más general de *proyección central*. De la misma manera, introdujo la distinción fundamental entre propiedades *proyectivas* y *no proyectivas* de figuras; es decir, entre propiedades que son siempre preservadas por proyecciones centrales y propiedades que no se preservan por tales proyecciones. Según Wussing, la revolución en geometría empezó al finalizar el siglo XVIII, llegando a cambiar la milenaria tradición euclidiana tanto en contenido como en método, y una vez abandonada la idea de una única geometría, todo el trabajo se orientó hacia la posibilidad de generalización o a la necesidad de revisión crítica. Merecen especial atención ciertos aspectos de esta evolución por cuanto fueron puntos de partida u origen de un modo de pensamiento implícito en geometría sobre teoría de grupos. Los cuatro aspectos más importantes que se señalan en este sentido son:

> 1. La eliminación del aparentemente indisoluble lazo entre geometría y métrica, y el surgimiento del problema de la conexión entre geometría proyectiva y geometría métrica.
>
> 2. La extensión del concepto de coordenadas más allá del tradicional, de coordenadas (cartesianas) paralelas.
>
> 3. El desarrollo de las geometrías no euclidianas.
>
> 4. El giro hacia la abstracción debido a la introducción de un arbitrariamente amplio número (finito) de dimensiones. (Wussing, 1984, p. 26, 27)

Poncelet pudo anticipar la idea principal de desarrollos posteriores al considerar *propiedades invariantes* de figuras bajo proyecciones centrales así como *propiedades invariantes* bajo otras proyecciones. Esta clase de aproximaciones y el tratamiento analítico de figuras geométricas, es decir, el cambio de proyecciones sintéticas hacia el estudio analítico de transformaciones de coordenadas, investigando sus invariantes, hizo posible aplicar la *teoría de los invariantes*, relacionada con otras partes de las matemáticas, en la *clasificación de objetos geométricos*.[1]

En el desarrollo de la geometría proyectiva, Poncelet y más tarde Möbius, Steiner y otros, utilizaron consideraciones métricas y la razón doble[2] en la de-

[1] Es oportuno recordar aquí, como lo señala Bell, que "con la *invariancia*, íntimamente relacionada con el *concepto de grupo*, la teoría de los grupos en el siglo XIX *transformó y unificó* partes muy separadas de las matemáticas, revelando insospechadas *analogías de estructura* en diferentes teorías" (Bell, 2002, p. 244). Por éstas y otras razones más, el concepto de *invariancia* ha sido considerado como un notable y elevado aporte del siglo XIX al desarrollo del pensamiento matemático.

[2] Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos de una recta, se designa la relación de las razones $(AC/CB)/(AD/DB)$ por el símbolo (AB,CD), y se llama *razón cruzada* o *doble* o *relación anarmónica* del intervalo de puntos A, B, C, D, en este orden. Se demuestra que la razón

finición de coordenadas proyectivas, manteniendo de esta manera la dependencia métrica. Esta brecha fue cerrada con la aparición de las obras: *Geometría de la posición (Geometrie der Lage)* y *Consideraciones sobre la geometría de la posición* de Von Staudt, sucesor de Steiner y profesor en Erlangen, quien se interesó por la fundamentación de la geometría. Von Staudt es considerado como el fundador de la geometría de posición pura, es decir, de una geometría completamente libre de relaciones métricas. Se esforzó por tratar de eliminar ciertas dificultades encontradas en la utilización de la geometría proyectiva e intentó reconstruir el conjunto de la misma, independientemente de toda noción métrica, con ayuda sólo de axiomas relativos a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Precisamente en la segunda de sus obras realizó un tratamiento de la *relación anarmónica*[3] exento de consideraciones métricas.

Las investigaciones de Poncelet tenían como propósito constituir una doctrina geométrica general en la que intervendrían principalmente la *relación anarmónica* que se conserva en una trasformación proyectiva, los puntos imaginarios y el principio de continuidad. A su vez, con Chasles y Steiner, después de constituida la doctrina proyectiva, surgieron dos ideas de gran relevancia como son: la distinción entre propiedades métricas y propiedades descriptivas, por una parte y, por otra, el papel de las transformaciones. Von Staudt, al igual que Poncelet y sus sucesores, se propuso desarrollar la geometría sin recurrir a los métodos analíticos pero, a diferencia de los anteriores, entendió que debía introducir las nociones proyectivas sin que intervinieran consideraciones métricas e inició la reconstrucción geométrica con base en los axiomas referidos únicamente a la posición o al orden de los elementos fundamentales. Poncelet, Chasles, Steiner y Von Staudt conocieron con nitidez la diferencia entre las propiedades proyectivas y las propiedades métricas, pero no llegaron a explicar las relaciones entre ellas. Más tarde, Laguerre, en 1853, encaminado a establecer las propiedades métricas de la geometría euclídea sobre la base de conceptos proyectivos, comenzó a desarrollar algunas investigaciones, relacionando la medida de un ángulo con la razón anarmónica de sus lados y de las dos rectas del mismo origen que unen su vértice a los puntos cíclicos. Las

---

doble de cuatro puntos es invariante en la proyección. La notación (*AB*, *CD*) fue introducida por Möbius en 1827.

[3] En la geometría proyectiva, el concepto de relación anarmónica se ha convertido en un concepto básico, por cuanto su poder y aplicabilidad son de fundamental importancia.

ideas de Laguerre fueron desarrolladas independientemente por Cayley, de tal manera que sus investigaciones generalizaron las de Laguerre. Entonces, la medida proyectiva, por ejemplo, fue definida claramente, en dos dimensiones, mediante la razón anarmónica de los cuatro puntos de una recta, de los cuales dos son los extremos del segmento medio y los otros dos son los puntos de intersección de la recta con una cónica sometida a la transformación. Al respecto, Cayley consideraba que la geometría métrica se manifiesta como una parte de la geometría proyectiva.

La base de la geometría de Steiner estaba constituida por la relación proyectiva entre las formas fundamentales en una dimensión. Por su parte, Von Staudt se propuso desarrollar esta relación de una manera puramente descriptiva, esto es, independiente del concepto de distancia. Así mismo, antes de Von Staudt, fueron utilizados en geometría los llamados *elementos imaginarios*, de los cuales sólo se sabía que no eran reales, como el punto en el infinito; no obstante, Von Staudt intentó definirlos adecuadamente como elementos esenciales de la geometría proyectiva. Así, en su segunda obra los definió como elementos dobles de involuciones elípticas y demostró que satisfacían los axiomas fundamentales. En este orden de ideas, Von Staudt, con su teoría, llegó a eliminar el concepto de longitud de la geometría proyectiva y en el mismo sentido las operaciones usuales de la aritmética se traducían en construcciones geométricas que operaban sobre las coordenadas de acuerdo con las leyes de la aritmética. De este modo construyó una parte importante de la geometría proyectiva clásica y la presentó como un tema independiente del concepto de distancia. Sin embargo, su obra fue objeto también de análisis críticos debido, principalmente, a que no aparecía en ella el postulado euclidiano de las paralelas e igualmente a que la formulación del axioma de continuidad adolecía de imprecisiones. Por último, Von Staudt resolvió expulsar los imaginarios de la geometría, para lo cual los reemplazó por infinidades de puntos reales asemejándose, en este caso, al pensamiento matemático de Dedekind de recurrir a conjuntos infinitos para resolver un problema finito en aritmética, como en el tema de los ideales.

El programa de Erlangen y las geometrías no euclidianas

Hacia 1871, Klein presentó una definición no métrica de coordenadas proyectivas, basándose en la razón doble, lo cual solventó la exigencia, debida a consideraciones metodológicas, de un desarrollo, de esta temática, estrictamente proyectiva. Como se verá más adelante, sería a partir de este punto de vista, o nueva forma de pensamiento, relacionado con la búsqueda y/o identificación de propiedades que permanecen invariantes bajo trasformaciones proyectivas, que Félix Klein llegaría a plantear su célebre *Programa de Erlangen* de 1872, en virtud del cual se pudo, entre otras cosas, clarificar la conexión interna entre geometría métrica y geometría proyectiva, lo mismo que hacer uso explícito de la teoría de grupos. De esta manera Klein logró la unificación de las diversas geometrías por medio de la teoría de grupos. Así mismo entre 1870 y 1874, Klein hizo aportes complementarios importantes a los trabajos fundamentales y muy originales de Von Staudt. Posteriormente los esfuerzos de los matemáticos se orientaron esencialmente hacia la revisión de los principios y de la estructura en la geometría. Klein, en su *Programa*, mostró cómo el concepto de grupo podía ser aplicado de manera conveniente en la caracterización de las diferentes geometrías elaboradas durante el siglo XIX. Este programa contiene ideas maestras provenientes de diversas fuentes. Tal es el caso de la noción de aplicación de una superficie sobre otra, de correspondencia entre conjuntos geométricos, así como de la teoría general de los invariantes. Volviendo a emplear las ideas de Cayley acerca de la formulación de nociones métricas como las de ángulo y distancia entre dos puntos, en términos proyectivos, a partir de las relaciones entre las geometrías euclídea y proyectiva, se propuso generalizarlas de tal manera que incluyeran las geometrías no euclidianas. El concepto de grupo de transformaciones le permitió elaborar una síntesis extraordinaria en la cual propuso la definición de una geometría como el estudio de aquellas propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos del mismo se someten a las transformaciones de un cierto grupo, también de transformaciones. A partir de estas ideas planteó un programa que constituía una concepción orgánica de la geometría con fundamento en una jerarquización de los grupos de transformaciones. El advenimiento de las primeras geometrías no euclidianas constituyó una etapa importante en la génesis del *Programa de Erlangen.* Tales geometrías no sólo dieron lugar al surgimiento de otras geometrías diferentes a la clásica de Euclides, sino también a las ideas que permitirían llegar a la matemática moderna. Las geometrías no euclidianas fueron el punto de partida de un análisis más profundo tanto del método axiomático como de la relación de la geometría con el mundo exterior. Igualmente, al parecer fue Klein quien puso de manifiesto la naturaleza proyectiva de las geometrías no euclidianas, que por otra parte, en el caso de Lobachevski, hizo posible la concepción del espacio como concepto *a posteriori* consecuencia del movimiento de los cuerpos físicos, en oposición a la concepción kantiana del espacio como noción a priori.

En cuanto al tema de la extensión del concepto de coordenadas, Wussing (1998) señala que el desarrollo de la geometría proyectiva en profundidad estuvo estrechamente vinculado a descartar la visión tradicional que limitó el concepto de coordenadas al de coordenadas (cartesianas) paralelas. Para el surgimiento del punto de vista sobre la teoría de grupos fue especialmente significativa la extensión del concepto de coordenadas de puntos más allá de la tradición euclidiana que consideraba el punto como el elemento fundamental de toda la geometría.

EL APORTE DE PLÜCKER

Plücker, considerado el mayor especialista del enfoque algebraico de la geometría, en una memoria titulada *Sobre un nuevo sistema de coordenadas* (1829), marcó una nueva etapa de la geometría con el concepto de sistema de coordenadas, entendido como todo procedimiento particular para fijar la posición de un punto con respecto a puntos o líneas considerados como de posición conocida. En esta memoria dejó de utilizar las coordenadas cartesianas e introdujo las nuevas coordenadas homogéneas que posteriormente las aplicó, de manera sistemática, al estudio de curvas en general. Así, Plücker encontró lo que se podría llamar la contraparte analítica del principio geométrico de dualidad, que había sido examinado detalladamente por Poncelet y Gergone. Entonces, al sustituir, en geometría pura, el *punto* por la *recta* y viceversa, se tendría el equivalente a intercambiar, en álgebra, las expresiones *constante* y *variable* con respecto a la ecuación de una recta en coordenadas homogéneas. Consecuencia lógica importante de esta radicalmente novedosa idea de Plücker es que tanto el punto como la recta son elementos igualmente fundamentales para la geometría plana. Para el caso del espacio de tres dimensiones los elementos fundamentales son el punto y el plano.

Hacia 1831, en el segundo tomo de una de sus obras, sobre el desarrollo de la geometría analítica (*Analytisch–geometrische Entwickelungen*), hizo la precisión y generalización de los conceptos de ecuación, de coordenadas tangenciales y de clase de una curva. Observó, en particular, que una misma curva puede ser considerada como una colección de puntos o como una colección de rectas tangenciales a la curva porque, según él, las tangentes determinan la forma de una curva tanto como los puntos. La familia de las tangentes es una curva de líneas y posee una ecuación en términos de coordenadas de líneas. La clase de la curva la hacía corresponder al grado de la ecuación, mientras que el grado de la ecuación, expresado en términos de coordenadas de puntos, lo denominó el *orden de la curva*. Posteriormente, en sus obras *Sistema de geometría analítica*, de 1835 y *Teoría de las curvas algebraicas*, de 1839, desarrolló ampliamente el estudio y la clasificación de las curvas algebraicas utilizando como nuevo principio la *enumeración de las constantes*, basado en sus fórmulas duales que relacionan el orden, la clase y los números de los diferentes tipos de singularidades ordinarias de una curva de un género dado. Así mismo, realizó un completo análisis de todos los sistemas lineales posibles de coordenadas de punto en el espacio de tres dimensiones, expresado en términos de que cada sistema de coordenadas planas está dado mediante ecuaciones lineales. La notable obra de Plücker, que con la extensión del concepto de coordenadas dio una nueva orientación y contribuyó a la renovación de la geometría analítica, fue proseguida por Hesse, en Alemania, mediante los determinantes e igualmente aplicando la teoría de las formas algebraicas y la teoría de los invariantes a la ordenación de los razonamientos de dicha geometría. De la misma manera, en Inglaterra, Cayley y Salmon continuaron en esta nueva dirección, para lo cual utilizaron ampliamente los conceptos y procesos del álgebra lineal, y así, además de realizar trabajos sumamente originales, aportaron a la difusión de los nuevos métodos que el matemático italiano Chelini, enriqueció y extendió. Igualmente, Hesse, Cayley, Salmon, Jordan, Klein, Cremona entre otros, al emprender la utilización de la teoría de las formas algebraicas y de los invariantes, posibilitaron el avance en el estudio de las curvas y de las superficies algebraicas. También, como ya se ha dicho, Laguerre, Cayley y Klein establecieron las propiedades métricas de la geometría euclídea mediante conceptos proyectivos. En este orden de ideas, el desarrollo de la geometría después de Plücker comprendería una complejidad de trabajos relacionados con los comienzos de la geometría algebraica, con el surgimiento de la topología, con las geometrías en *n dimensiones*, así como con la geometría infinitesimal y diferencial entre otros.

Cabe recordar que la teoría de grupos se desarrolló, en primer lugar, a nivel de teoría de grupos finitos de permutaciones, a raíz de la publicación que hizo Hermite de los manuscritos de Galois. En 1870, Jordan publicó su *Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas*, en el cual resumió y perfeccionó los trabajos de sus antecesores sobre propiedades especiales de los grupos de permutaciones y estudió también grupos particulares, los grupos lineales y sus subgrupos. Introdujo además la noción de representación de un grupo en otro y demostró parcialmente el denominado Teorema de Jordan-Hölder. Entre 1868 y 1869 emprendió el primer estudio importante de los grupos infinitos en su obra *Memoria sobre los grupos de movimientos*, en la cual estudió las traslaciones y las rotaciones, dando origen así a los estudios de las *transformaciones geométricas* por medio del *concepto de grupo*. Pero no hay que olvidar la advertencia que hace Wussing cuando afirma que el avance logrado por Cayley hacia 1854, orientado a la definición de *grupo abstracto,* resultó históricamente prematuro, ya que no se habían desarrollado plenamente las condiciones para una apreciación favorable de una aproximación abstracta y formal. Igualmente, mientras los grupos de permutaciones eran los únicos en investigación, no había interés en la generalización de dicho concepto, ni motivos para obrar en tal sentido. De tal modo que los artículos de Cayley de 1854 no tuvieron impacto inmediato en marcha hacia la abstracción.

EL ESTUDIO DE LAS TRANSFORMACIONES

Con respecto a las investigaciones por el ordenamiento, en geometría, de los principios a través del examen de las relaciones geométricas, Wussing señala que en el estudio de estas relaciones, la geometría descriptiva y la geometría proyectiva, hicieron énfasis en aquellas relaciones entre figuras geométricas que estaban asociadas con formaciones particulares. Afirma además, que Carnot en su *Géométrie de position* expresó este punto de vista, el cual se reflejaba en el principio fundamental del método de Carnot que establecía que *dos figuras geométricas, conectadas por una proyección, comparten un cuerpo de propiedades*. Sin embargo, interesaba que tales propiedades compartidas fueran trasladadas a las transformaciones mismas, lo que implicaba especiales relaciones entre figuras. Este principio que ya había sido aplicado tácitamente por Monge, se transformó en una tendencia que claramente tomó forma reconocible en el *principio de continuidad* de Poncelet, quien enfocó su uso sobre el problema de las transformaciones continuas incluyendo en todo caso proyecciones centrales y, a partir del mismo, asignó estatus equivalente a dos figuras conectadas por una transformación continua. Así las cosas, el estudio de las *relaciones geométricas entre figuras* se convirtió en el *estudio de las transformaciones asociadas*. Según Wussing, entre 1830 y 1870, las transformaciones se convirtieron en objeto de prolíficas investigaciones especializadas e independientes, las cuales dieron origen a las teorías de transformaciones circulares, transformaciones esféricas, inversiones, afinidades, colineaciones, entre otras. Desde luego que algunas de estas transformaciones no eran enteramente nuevas, por cuanto ya se había hecho uso esporádico de ellas desde el siglo XVI.

A medida que se realizaban estos avances, el estudio de las relaciones geométricas entró gradualmente a una tercera fase, en la cual se investigó las conexiones lógicas entre transformaciones. Esto condujo al *problema de la clasificación de las transformaciones* y hacia la síntesis "*grupo-teorética*" de la geometría. Es importante tener en cuenta, en este caso, los esfuerzos de clasificación de Möbius en geometría. Al respecto, Wussing observa que a pesar de que Möbius se había mantenido alejado de la comunidad matemática, sus investigaciones en geometría abarcaban todos los desarrollos de su tiempo en este campo, razón por la cual en sus comienzos su trabajo fue ignorado, pero posteriormente alcanzó la más alta consideración cuando se reconoció que sus ideas, a pesar de haber sido desarrolladas silenciosa y aisladamente, anticiparon la posterior evolución de la geometría y aún del mismo *Programa de Erlangen*. Precisamente Wussing destaca dos elementos del pensamiento geométrico de Möbius que dan testimonio de la lógica interna y la inevitabilidad del desarrollo matemático. En primer lugar, hizo una significativa contribución a la remoción del concepto tradicional de coordenadas y, en segundo lugar, aunque sin tomar consciencia del concepto de grupo, condujo, como guiado por instinto, la *organización grupo-teorética de la geometría que más tarde sería resuelta de manera clara en el Programa de Erlangen* de 1872. Rasgos distintivos estos, que estaban ya presentes en su principal trabajo inicial sobre el *cálculo baricéntrico*. Sostiene además Wussing que la actividad creativa de Möbius, en una segunda fase, estuvo dedicada principalmente a las matemáticas aplicadas en temas que comprendían sistemas de lentes, mecánica celeste, sistemas de cristales y *equilibrio de fuerzas*. Este último tema constituiría la base de su texto sobre estática hacia 1837. El gran interés por los problemas prácticos y las preguntas específicas relacionadas con los mismos, lo impulsaron a continuar en la investigación acerca de relaciones geométricas más amplias. Con tal motivo se interesó por la generalización del tradicional concepto de *adición*.

Es oportuno recordar aquí que a comienzos del siglo XIX, Argand, Wessel y Gauss, independientemente, introdujeron la representación geométrica de los números complejos, la cual no sólo hizo posible efectuar las *operaciones fundamentales* realizando sencillas construcciones, sino que contribuyó a disipar la desconfianza y a clarificar las ideas sobre los que se consideraban números ficticios o irreales, es decir, *imaginarios*, y además, anunciaba el principio de una futura teoría científica rigurosa. En particular, la suma de números complejos se construyó, desde entonces, utilizando la llamada *regla del paralelogramo* para la suma de vectores.

MOVIMIENTOS Y COMPOSICIÓN DE FUERZAS

Möbius pudo observar, mediante la *regla del paralelogramo*, que la *composición de fuerzas* produce una *fuerza*, *la composición de movimientos* produce un *movimiento*. En estos términos, observa Wussing, que la *composición* de *operaciones sucesivas* de una clase determinada, involucra el uso de una *regla de composición*, y la difícil tarea matemática, implícita en los precitados ejemplos físicos, consistía en expresar la *regla de composición* dentro de un cálculo apropiado. Lo arduo de esta tarea, advierte Wussing, está ilustrado por los esfuerzos extremos de Grassmann para entender la esencia de la adición de segmentos; esfuerzos que eventualmente condujeron al concepto de vector y al cálculo vectorial. Agrega, además, que el interés de Möbius en las matemáticas aplicadas lo condujo hacia *varias reglas de composición* y así, entre 1838 y 1850, publicó varios trabajos sobre el tema. Si bien estos trabajos promovieron en gran medida el *concepto de composición*, en el sentido de que ellos ayudaron a crear un completo espectro de *leyes de composición* para una diversidad de operaciones, sin embargo, ellos hicieron muy poco en forma directa para preparar el, más tarde, *concepto general de grupo*, y menos aún, llevar hacia adelante los *métodos de la teoría de grupos*. En ese tiempo, la *composición de operaciones* no pudo por sí misma inducir el *concepto de grupo*. Lo que faltaba en este nivel de desarrollo de la geometría, según Wussing, era el reconocimiento del hecho de que una *composición* sobre un conjunto determina un *subconjunto cerrado* relativo a la *composición*, hecho que después resultó decisivo en el estudio de las permutaciones.

El problema de las *reglas de composición* dio origen al tercer período creativo de Möbius y, comenzando en 1853, publicó trabajos sobre transformaciones geométricas especiales. Dice Wussing, que luego siguieron numerosos artículos que versaban sobre involución de puntos y que, además, se ocupó de algunas transformaciones especiales. En estos trabajos, Möbius se propuso, como parte de un proyecto o programa, asignar su propio lugar a cada una de las *geometrías* asociadas con transformaciones particulares de congruencia, semejanza, afinidad y colineación. Finalmente, agrega Wussing, que por carecer de recursos técnicos, estos intentos no pudieron llegar a feliz término; no obstante, ellos proporcionaron un amplio impulso a la síntesis conceptual del edificio de la geometría. Además, a partir de 1858, Möbius se aventuró en un estudio de las llamadas "*relaciones elementales*", más generales que las colineaciones, razón por la que tales transformaciones, desde el punto de vista moderno, estarían más o menos cercanas a la topología.

Referencias

Bell, E.T. (2002). *Historia de las matemáticas*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías* (tomo 1). México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Ortega, V. E. (2010). *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica. A partir del estudio histórico-epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind*. Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Wussing, H. (1984). *The genesis of the abstract group concept*. Londres, Inglaterra: The MIT Press.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid, España: Siglo XXI.