Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana

Sherly Alfonso
Universidad Nacional de Colombia
spalfonsos@unal.edu.co

Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana es un trabajo de grado, en el nivel de pregrado en matemáticas, en el cual se describe la investigación acerca de la geometría no arquimediana, emprendida por Hilbert y continuada por su alumno Max Dehn. Tal investigación llevó a esclarecer el alcance del Axioma de Arquímedes y la importancia de la axiomática hilbertiana. En este trabajo se ahonda en el aporte hecho por Dehn en su disertación: *Los teoremas de Legendre acerca de la suma de los ángulos en un triángulo*, debido a que este no ha sido estudiado en profundidad a diferencia de la investigación hecha por Hilbert en *Fundamentos de la geometría*.

Motivación

En su obra *Fundamentos de la geometría*, Hilbert (1996/1899) presenta los veinte axiomas de su construcción en cinco agrupamientos; el quinto, referente a la continuidad, contiene el Axioma de Arquímedes. Se dice que una geometría es arquimediana si en ella es válido el Axioma de Arquímedes; se llama no arquimediana si en ella no se satisface tal axioma.

Aunque, en la obra antes citada, Hilbert logró demostrar resultados acerca de la independencia de los axiomas de continuidad, le confió varias preguntas pendientes al matemático alemán Max Dehn, quien las respondió en su disertación (tesis de doctorado), guiado por su director y maestro David Hilbert.

El meollo de la investigación emprendida por Dehn estaba en responder la siguiente cuestión: Dado que las demostraciones hechas por el matemático francés Legendre de sus teoremas se apoyan fuertemente en el Axioma de Arquímedes, ¿es necesario tal axioma para que sean válidos los teoremas mencionados?

Las respuestas de Dehn fueron:

Alfonso, S. (2011). Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 155-160). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

- Sin el axioma de Arquímedes no es posible demostrar el Primer Teorema de Legendre según el cual *la suma de los ángulos internos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos*.
- Sin el Axioma de Arquímedes es posible demostrar el Segundo Teorema de Legendre según el cual *si en un triángulo cualquiera la suma de los ángulos es igual a dos ángulos rectos, entonces lo es en todo triángulo*. Dehn demuestra este hecho mostrando un teorema más general.

Dehn, además de llegar a responder contundentemente mediante las dos afirmaciones anteriores, llega al siguiente resultado sorprendente:

La suma de los ángulos internos de un triángulo es:	A través de un punto exterior a una recta pasa		
	Ninguna paralela a ésta	Una única paralela a ésta	Infinitas paralelas a ésta
$> 2R$	Geometría elíptica	Imposible	Geometría no legendriana
$= 2R$	Imposible	Geometría euclidiana	Geometría semieuclidiana
$< 2R$	Imposible	Imposible	Geometría hiperbólica

Resultado general de Max Dehn

Las conclusiones de la investigación de Dehn fueron halagadas por su maestro Hilbert, ya que representaron un resultado capital para los fundamentos de la geometría.

Teniendo en cuenta dicho contexto, la propuesta inicial del director de este trabajo de grado, Alberto Campos Sánchez, consistía en escribir una apreciación a fondo del artículo: Cerroni, C. (2007). The contributions of Hilbert and Dehn to non archimedian geometries and their impact on the Italian school. *Revue d'histoire des mathématiques*, XIII, 259-299.

El artículo es un estudio histórico extenso acerca de la disertación de Max Dehn. Sin embargo, pronto se hizo manifiesto que Cinzia Cerroni no hizo explícitos muchos detalles matemáticos necesarios para el entendimiento total de dicha investigación. Este hecho motivó a que el trabajo de grado *Contribuciones*[1] (Alfonso, 2010) se enfocara en realizar un estudio directo de la disertación de Dehn, con el fin de poder entenderla y así exponerla con total claridad.

METODOLOGÍA

La metodología se describe a continuación. Primero se estudió de manera preliminar la investigación de Hilbert ya que Dehn utilizó posteriormente algunos de los resultados de aquél. Para esto se tomó como fuente su memorable obra *Fundamentos de la geometría*.

Luego se estudió en profundidad la disertación de Dehn, *Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck* (Los teoremas de Legendre acerca de la suma de los ángulos en un triángulo) (Dehn, 1900). Este estudio consistió en la traducción de la disertación del idioma alemán al español, su entendimiento y posteriormente la realización de una exposición escrita.

Así, *Contribuciones* resultó una exposición cuidadosa de los teoremas establecidos por Max Dehn, importantes para ilustrar una de las facetas del pensamiento axiomático de Hilbert: combinación y alcance de cada uno de los postulados en una axiomatización.

Con el fin de recordar dicha faceta, se recuerda que para la construcción de la geometría se necesitan proposiciones fundamentales, las cuales reciben el nombre de axiomas. El presentar de manifiesto dichos axiomas y estudiar sus conexiones fue un problema discutido desde los tiempos de Euclides. Más aún, en el siglo XIX con la creación de geometrías no euclidianas, los geómetras se vieron obligados a hacer un estudio del estatus de la geometría, la cual se consideraba una disciplina entre matemática pura y ciencia de la naturaleza. Varios geómetras intentaron arreglar el problema, pero sólo fue Moritz Pasch quien logró llegar a un avance en la investigación de los fundamentos de la geometría al dar a esta ciencia la categoría de sistema formal. Sin embargo, sólo Hilbert en *Fundamentos de la geometría* logra por primera vez exponer la geometría de manera completamente axiomática. Según la apreciación de Bourbaki (1974, citado en Campos, 1999),

> Y es que, en efecto, HILBERT no contento con suministrar un sistema completo de axiomas para la geometría euclidiana, clasifica los axiomas en diversos

[1] Se abrevia como *Contribuciones* el trabajo en el que se basa este artículo.

agrupamientos de naturaleza diferente y pone todo su interés en la determinación del alcance exacto de cada uno de tales agrupamientos, no solamente mediante el desarrollo de las consecuencias lógicas de cada axioma aisladamente, sino más aún mediante la discusión de las diversas "geometrías" obtenidas al suprimir o modificar algunos axiomas (las de LOBACHEVSKI o RIEMANN devienen apenas casos particulares). (pp. 155-156)

RESULTADOS

Exponiendo de manera global los procesos que llevó a cabo Dehn para poder responder la pregunta de Hilbert, se puede resaltar lo siguiente:

La demostración de Max Dehn se basó tanto en la obra citada de Hilbert como en la de Pasch, 1882, *Lecciones de geometría moderna.*

Dehn no sólo tuvo que ampliar la geometría de la obra de Hilbert sino que debió además construir una nueva geometría no euclidiana y otra geometría no legendriana.

En la geometría ampliada de Max Dehn vale el Teorema de Desargues y con base en este teorema, Dehn puede introducir nociones de pseudoparalelismo y de pseudocongruencia así como de pseudomayoración, pseudoigualdad y pseudominoración, junto con propiedades convenientes para poder resolver el problema (ver Figura 1).

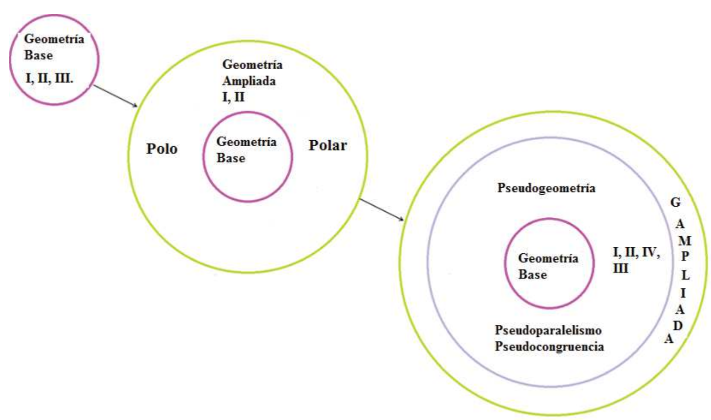

Figura 1. Construcción realizada por Dehn (Axioma de Arquímedes – Segundo Teorema de Legendre)

En *Contribuciones* se logra penetrar en los complejos razonamientos de Dehn; al explicitar algunos antecedentes o consecuentes meramente enunciados. Por ejemplo:

En el parágrafo 6 de su disertación, Dehn demuestra un teorema que relaciona la congruencia con la pseudocongruencia y al iniciar el parágrafo 7 afirma que dicha relación es la base para poder demostrar la independencia entre el Segundo Teorema de Legendre y el Axioma de Arquímedes. Sin embargo, al leer tal demostración no se observa fácilmente en qué momento se utiliza esta relación, por esto en la página 81 de *Contribuciones* se resalta el momento en el que ésta es necesaria.

Más aún, en la demostración de la relación entre congruencia y pseudocongruencia, Dehn razona por medio de ecuaciones con razones dobles cuyos cálculos no se presentan. Al explicitar los cálculos, no se logra la conclusión de Dehn. No obstante, en *Contribuciones* se complementa la argumentación obteniendo los consecuentes exigidos.

Más aún, en *Contribuciones* se logra hacer un trabajo expositivo detallado con más de 80 ilustraciones en 113 páginas, lo cual motiva a un mejor entendimiento de las construcciones hechas por Dehn. Por ejemplo, la siguiente ilustración (ver Figura 2) presentada en el Primer Teorema de pseudocongruencia, se desglosa en más de 15 figuras.

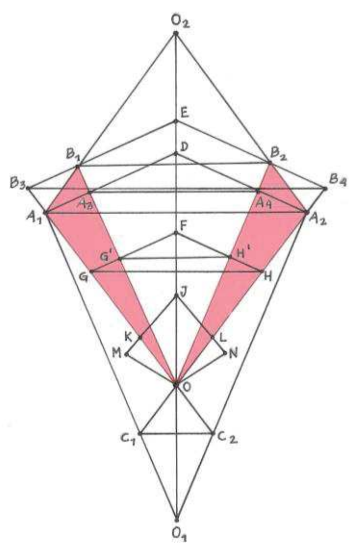

Figura 2. Ilustración del Primer Teorema de Pseudocongruencia

Conclusiones

Después de realizar el trabajo *Contribuciones* se logró reconocer la importancia de las investigaciones de estos dos matemáticos alemanes para los fundamentos de la geometría, en particular en el estudio de la geometría no arquimediana, ya que por medio del estudio de la combinación de axiomas se determina el alcance del Axioma de Arquímedes.

Es un trabajo que además permite entender y materializar el carácter axiomático de la matemática, en particular de la axiomática hilbertiana, como lo hace Dehn para demostrar la dependencia entre el Axioma de Arquímedes y el Primer Teorema de Legendre.

Las demostraciones de Max Dehn redactadas en alemán, en 35 páginas, en *Contribuciones* se presentan en español, explicadas de manera minuciosa y con ilustraciones en 113 páginas.

Contribuciones enfrenta puntos delicados de la investigación de Dehn por lo cual su estudio y redacción son provechosos para la investigación en geometría; más aún, es una invitación a retomar el estudio de los fundamentos de la geometría por parte de estudiantes interesados en la matemática.

En *Contribuciones* además de dar descripciones de los aportes a la geometría no arquimediana hechos por ambos matemáticos, se han hecho cálculos y razonamientos no explícitos en la disertación de Dehn, lo cual ha quedado consignado en material bibliográfico para todos aquellos interesados en los fundamentos de la geometría.

Además de esto, es un tema abierto ya que existen algunos hechos que fueron admitidos y que para un apasionado por la geometría resultaría grato desentrañar.

REFERENCIAS

Alfonso, S. (2010). *Las contribuciones de Hilbert y de Max Dehn a la geometría no arquimediana.* Trabajo de pregrado no publicado, Universidad Nacional del Colombia, Bogotá, Colombia.

Campos, A. (1999). 1899 Fundamentos de la geometría 1999. *Lecturas Matemáticas*, *20*(2), 153-174.

Dehn, M. (1900). Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. *Mathematische Annalen, 53*(3), 404-439.

Hilbert, D. (1996/1899). *Fundamentos de la geometría*. (Traducción de la séptima edición en alemán publicada en 1930). Madrid: Publicaciones del Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas.