UN ENFOQUE GEOMÉTRICO DEL TEOREMA DE SHARKOVSKII

Eduardo Martínez y Primitivo Acosta-Humánez
Universidad Sergio Arboleda
Oscare.martinez@correo.usa.edu.co, primi@ima.usergioarboleda.edu.co

A continuación se presenta cómo la geometría de las funciones primitivas permite evidenciar los comportamientos periódicos y establecer relaciones de tipo genealógico entre períodos relacionados por el Teorema de Sharkovskii, resultado fundamental en sistemas dinámicos discretos y, de manera particular, en la dinámica minimal.

1. PRELIMINARES

La dinámica combinatoria encuentra su génesis en el artículo "Co-existencia de ciclos de transformaciones continuas en un intervalo" de Oleksandr Mikailovich Sharkovskii. Esta rama de los sistemas dinámicos estudia las relaciones algebraicas y combinatorias de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con dinámica minimal. En este contexto, las permutaciones pueden ser utilizadas para describir órbitas minimales (primarias). Por tal razón para el estudio de la dinámica combinatoria se requieren algunas definiciones del álgebra y de los sistemas dinámicos.

1.1 Sobre sistemas dinámicos

Para comprender la dinámica minimal es necesario establecer previamente las definiciones de órbita, punto fijo, punto periódico y, a manera de noción, el caos (ver Devaney, 2003; Alseda, Llibre y Misiurewicz, 2005).

Definición 1.1.1. (Órbita): La órbita de x es el conjunto de puntos $x, f(x)$, $f^2(x), \ldots$ y se denota como $O^+(x)$. Si f es un homeomorfismo, definimos la órbita de $x, O(x)$, como el conjunto de puntos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$, y la órbita hacia atrás de $x, O^-(x)$, como el conjunto de puntos $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \ldots$.

Definición 1.1.2. (Punto fijo y periódico): El punto x se dice fijo para f si $f(x)=x$, es periódico de período n si $f^n(x)=x$. El menor entero positivo n que cumpla esta igualdad se denomina período primo de x. El conjunto de puntos

Martínez, E. y Acosta-Humánez, P. (2011). Un enfoque geométrico del Teorema de Sharkovskii. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 77-84). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

periódicos de período n se denomina $\mathrm{Per}_n(f)$. El conjunto de todas las iteraciones de un punto periódico forman una órbita periódica.

Por ejemplo, en la función $f(x)=x^3$, los puntos -1, 0 y 1 son puntos fijos. De manera similar, la función $g(x)=x^2-1$ tiene puntos fijos en -1 y 1 los puntos 0 y -1 forman una órbita periódica de período 2.

Si bien es cierto que el comportamiento caótico de una función se establece a través de transitividad topológica, dependencia sensible y densidad de sus puntos periódicos, los períodos de una función permiten entender también el comportamiento caótico de una función (este resultado se deriva del Teorema de Sharkovskii o del resultado encontrado por Li y Yorke sobre el período 3) (ver Block y Coppel, 1986).

1.2. Sobre álgebra y combinatoria

Definición 1.2.1. (Permutaciones): Si X es un conjunto no vacío, una permutación de X es una biyección $\alpha : X \to X$. Llamamos al conjunto de todas las permutaciones de X como S_X. Si $X=\{1, 2, \ldots, n\}$ se acostumbra denotar al conjunto de permutaciones de X como S_n.

Definición 1.2.2. (Partición): Se define la partición de un intervalo como el conjunto

$$\mathrm{P}_n = \{x_i, x_{i+1} \in \mathbb{R} : x_i < x_{i+1}, \forall i = 1, \ldots, n-1\}.$$

Definición 1.2.2. Partición de un intervalo

Estas definiciones son necesarias para establecer el conjunto de Permutaciones asociado a una función y el forzamiento entre conjuntos de permutaciones, concepto necesario para dar una interpretación algebraica al Teorema de Sharkovskii.

Definición 1.2.3. (Conjunto de permutaciones): El conjunto de permutaciones de una función f, denotado por $\mathrm{Perm}(f)$, está definido de la siguiente manera: Una permutación $\theta \in \mathrm{Perm}(f)$ si y sólo si existe una partición P_n tal que $f(x_i)=x_{\theta(i)}$, donde $x_i, x_{\theta(i)} \in P_n$. Es decir,

$$\mathrm{Perm}(f)=\left\{\theta : f(x_i)=x_{\theta(i)}, x_i, x_{\theta(i)} \in \mathrm{P}_n\right\}.$$

Definición 1.2.3. Conjunto de permutaciones de f

Definición (Forzamiento): Sean $\theta, \eta \in Sn$, P_θ y P_θ definidos como $\mathrm{P}_\theta=\{f:\theta \in \mathrm{Perm}(f)\}$, $\mathrm{P}_\eta=\{g:\eta \in \mathrm{Perm}(g)\}$. θ fuerza a η ($\theta \lhd \eta$) si y sólo si $\mathrm{P}_\eta \subset \mathrm{P}_\theta$.

2. Dinámica combinatoria

Un apartado importante de los sistemas dinámicos es aquel que corresponde al estudio del comportamiento caótico. Previamente establecimos la posibilidad de acercarnos a dicho comportamiento a través de órbitas periódicas. Veremos como el Teorema de Sharkovskii relaciona (fuerza) la existencia de órbitas periódicas y cómo estas pueden ser estudiadas a través de grafos de Markov y funciones primitivas.

2.1. Teorema de Sharkovskii

En marzo de 1962 se publicó el artículo "Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself". En este artículo Sharkovskii define una relación de orden para los números enteros positivos $(\prec)$ en la que $\eta_1 \prec \eta_2$ si la existencia de un ciclo de orden η_1 implica la existencia de uno de orden η_2 (ver Sharkovskii, 1964; Stefan, 1977; Misiurewicz, 1995).

Teorema 2.1.1. (Orden de Sharkovskii): La relación definida previamente $(\prec)$ transforma el conjunto de los enteros positivos en un conjunto ordenado de la siguiente manera:

$$3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec \ldots \prec 3\times 2 \prec 5\times 2 \prec \ldots \prec 3\times 2^2 \prec 5\times 2^2 \prec \ldots \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.$$

Teorema 2.1.1. Orden de Sharkovskii

Esto quiere decir que al encontrar un ciclo de orden n en una función, existen en ella ciclos de orden m, con $n \prec m$.

Los grafos de Markov son utilizados para estudiar la estructura de las órbitas periódicas. Estos describen a la órbita periódica a través de las relaciones existentes entre las particiones que la definen y sus imagines (ver Bernhardt, 1984; Acosta-Humánez, 2008).

Definición 2.1.2. (Grafo de Markov). Sean $x_i, x_i + 1 \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n-1$ tales que $x_i < x_i + 1$, y $\theta \in \mathrm{Perm}(f)$. El Grafo de Markov (también conocido como grafo dirigido) de f y θ tiene $n-1$ vértices $J_1, J_2, ..., J_{n-1}$. Existirá una flecha de J_k a J_i si y sólo si $\lfloor x_l, x_{l+1} \rfloor \subseteq f\left(\lfloor x_k, x_{k+1} \rfloor\right)$.

Si bien es cierto que el teorema de Sharkovskii establece la existencia de órbitas periódicas y garantiza la existencia de nuevos períodos a partir de períodos conocidos, no es tarea fácil encontrar funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con dichos comportamientos (el lector puede tratar de encontrar una función continua con un punto de período 10, por ejemplo). Las funciones primitivas permiten encontrar ejemplos de funciones con comportamientos periódicos a partir de una órbita establecida. Su construcción está inspirada en las funciones que Sharkovskii utilizó para la demostración de su teorema.

Definición 2.1.3. (Función Primitiva): Dada una permutación $\theta \in S_n$ la función primitiva $\overline{f}$ asociada está definida de la siguiente manera:

$(1) f(k) = \theta(k)$;

$(2) f(tk + (1-t)(k+1)) = t\theta(k) + (1-t)\theta(k+1)$;

$(3) f(x) = \theta(1)$, si $x < 1$;

$(4) f(x) = \theta(n)$, si $x > n$; donde $k = 1, ..., n$ y $0 \le t \le 1$.

Definición 2.1.3. Función primitiva $\overline{f}$ asociada a f

2.2. Aplicación al análisis de órbitas

A continuación aplicaremos los grafos de Markov y las funciones primitivas para interpretar el Teorema de Sharkovskii. Dada una permutación θ, estableceremos su función primitiva y a través de ella su grafo de Markov (ver Acosta-Humánez y Martínez, sometido a consideración), para así poder evidenciar en ella el Teorema de Sharkovskii.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos la permutación $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. La función primitiva asociada $\overline{f}$ es:

$$\overline{f}(x)=\begin{cases} 6 & \text{si} \quad x<1 \\ -2x+8 & \text{si} \quad 1\le x<2 \\ x+2 & \text{si} \quad 2\le x<3 \\ -4x+17 & \text{si} \quad 3\le x<4 \\ x-3 & \text{si} \quad 4\le x<6 \\ 3 & \text{si} \quad x\ge 6 \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.1. Función primitiva $\overline{f}$ asociada a $\theta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Y su gráfica es:

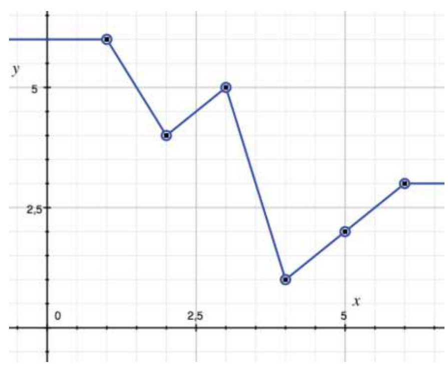

Figura 1. Gráfica de función primitiva $\overline{f}$ asociada a $\theta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Los intervalos para construir el Grafo de Markov de f y θ son: $J_1=[1,2]$, $J_2=[2,3]$, $J_3=[3,4]$, $J_4=[4,5]$, $J_5=[5,6]$.Se puede ver que: $\overline{f}(J_2)=J_4$, $\overline{f}(J_4)=J_1$, $\overline{f}(J_5)=J_2$, $\overline{f}(J_1)\supseteq J_4$, $\overline{f}(J_1)\supseteq J_5$, $\overline{f}(J_3)\supseteq J_1$, $\overline{f}(J_3)\supseteq J_2$, $\overline{f}(J_3)\supseteq J_3$, $\overline{f}(J_3)\supseteq J_4$.

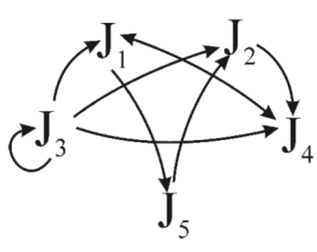

Figura 2. Grafo de Markov asociado a $\theta=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Gracias a estas representaciones es posible evidenciar, por ejemplo, la existencia de: un punto fijo en J_3, una órbita de segundo orden en J_1 y J_4 y una órbita de orden 4 en J_1, J_5, J_2 y J_4.

Ejemplo 2.2.2. Veremos a continuación un ejemplo en el que el grafo de Markov y la función primitiva nos permitirán conocer comportamientos no contemplados en el teorema de Sharkovskii y encontrar que una función es caótica. Consideremos la permutación $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. La función primitiva asociada $\overline{g}$ es:

$$\overline{g}(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < 1 \\ x+1 & si \quad 1 \leq x < 3 \\ 13-3x & si \quad 3 \leq x < 4 \\ 1 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

Ejemplo 2.2.2. Función primitiva $\overline{g}$ asociada a $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Y su gráfica es:

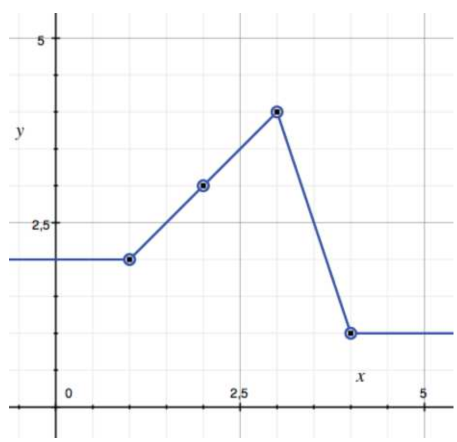

Figura 3. Función primitiva $\overline{g}$ asociada a $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Los intervalos para construir el grafo de Markov de g y η son: $J_1 = [1, 2]$, $J_2 = J_1 = [1, 2]$, $J_2 = [2, 3]$, $J_3 = [3, 4]$. Se puede ver que: $f(J_1) \supseteq J_2$, $f(J_2) = J_3$ y $f(J_3) = J_1 \cup J_2 \cup J_3$.

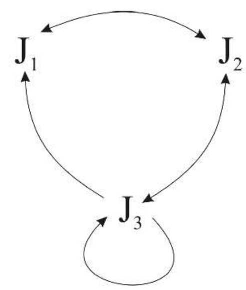

Figura 4. Grafo de Markov asociado a $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Gracias a estas representaciones es posible evidenciar la existencia de una órbita de orden 3 en J_1, J_2 y J_3. Si bien es cierto que el Teorema de Sharkovskii permite afirmar a partir de η la existencia de órbitas de período 2 y 1, el grafo de Markov permitió hallar una órbita de período 3 y, por ende, la existencia de órbitas de todos los períodos.

REFERENCIAS

Acosta-Humánez, P. (2008). Genealogía de permutaciones simples de orden una potencia de dos. *Revista Colombiana de Matemáticas, 42*(1), 1-13.

Acosta-Humánez, P. y Martínez, E. *Simple permutations with order 4n+2*. (Sometido a consideración). http://arxiv.org/abs/1012.2076

Alseda, Ll., Llibre, J. y Misiurewicz, M. (2005). *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. Singapur: World Scientific Publishing.

Bernhardt, C. (1984). Simple permutations with order a power of two. *Ergodic Theory and Dynamic Systems*, 2, 179-186.

Block, L. y Coppel, W. (1986). *Dynamic in one dimension*. Nueva York, USA: Springer Verlag.

Devaney, R. (2003). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Colorado, USA: Westview Press.

Misiurewicz, M. (1995). Thirty years after Sharkovskii's theorem. En Ll. Alseda, J. Llibre, F. Balibrea y M. Misiurewicz (Eds.), *Proceedings of the Conference "Thirty years after Sharkovskii's theorem: New perspectives"*. Singapur: World Scientific.

Sharkovskii, A. (1964). Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself, *Ukrain Math. Z*, 16, 61-71.

Stefan, P. (1977). A theorem of Sharkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line. *Communications in Mathematical Physics*, 54, 237-248.