DE LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS A LAS CATEGORÍAS TOPOLÓGICAS

Reinaldo Montañez
Universidad Nacional de Colombia
jrmontanezp@unal.edu.co

A partir de un espacio topológico y haciendo uso de las topologías iniciales y finales se muestra la manera de construir subcategorías topológicas de la categoría de los espacios topológicos Top. Las categorías construidas resultan además subcategorías reflexivas y correflexivas en Top.

INTRODUCCIÓN

La esencia de una categoría topológica es la existencia de estructuras iniciales y finales que generalizan los conceptos de topologías iniciales y finales.

Podemos decir que la topología categórica se inicia con los trabajos de Bourbaki; trabajos más recientes se encuentran en Adámeck, Herrlich y Streker (1990) y Preuss (1988). Las categorías de los espacios topológicos uniformes y de proximidad son ejemplos de categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos.

En este trabajo se pretende dar información acerca del uso de la estructura de categoría topológica para construir endofuntores idempotentes en la categoría de los espacios topológicos Top, que hemos denominado *elevadores de estructura*. Las imágenes de estos funtores dan origen a subcategorías topológicas, que además resultan reflexivas y correflexivas en Top. En particular, las categorías de los espacios secuenciales y los espacios completamente regulares resultan de estas construcciones. Es de anotar que este trabajo toma como base las referencias Montañez y Ruiz (2006) y Montañez (2007).[1]

---

[1] El autor agradece al Dr. Carlos Javier Luis Salguero los comentarios y sugerencias para la realización de este trabajo.

Montañez, R. (2011). De los espacios topológicos a las categorías topológicas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 85-91). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

La noción de categoría topológica

Definición: Sea $F : \mathcal{C} \to D$ un funtor. Se dice que F es un funtor topológico y que $\mathcal{C}$ es una categoría topológica relativa a F y a D, si cumplen las siguientes condiciones:

I) F es fiel.

II) F es apto para construir estructuras iniciales y finales de fuentes y sumideros unitarios.

III) Para cada objeto X de D, la fibra $Fib(X)$ tiene estructura de retículo completo.

Esta definición corresponde a una caracterización del funtor topológico dado en Adámeck, Herrlich y Streker (1990), (ver Ardila, Montañez y Ruiz, 2000). Para el caso de la categoría Top, la condición [II] se traduce de la existencia de topologías iniciales y finales.

Observación

(i) Para facilitar la comprensión de algunas definiciones y resultados del trabajo, los objetos y morfismo de una categoría topológica los notaremos en negrilla y su imagen por el funtor los escribiremos sin negrilla. Por ejemplo, en la categoría de los espacios topológicos $\boldsymbol{f : X \to Y}$ simboliza una función continua y $f : X \to Y$ su función correspondiente en la categoría de los conjuntos.

(ii) Este trabajo toma como punto de partida la categoría de los espacios topológicos. Así que en adelante estará implícito el funtor olvido de estructura y su codominio que corresponde a la categoría de los conjuntos. En particular la categoría de los espacios topológicos es un constructo topológico (Adámeck, Herrlich y Streker, 1990), lo cual significa que es una categoría topológica fibrada sobre la categoría de los conjuntos, en la cual sobre un conjunto unitario hay una única estructura. Decir que K es una subcategoría topológica de *Top*, significa que el funtor olvido restringido a K es un funtor topológico.

Ejemplos

1. La categoría *Top* de los espacios topológicos y funciones continuas es una categoría topológica fibrada con el funtor de olvido, sobre la categoría de los conjuntos. Este es el ejemplo que motiva la definición de categoría topológica.

2. Las categorías de los espacios uniformes, pretopológicos y pseudotopológicos son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos (Adámeck, Herrlich y Streker 1990).

Subcategorías reflexivas y correflexivas

Definición: Sea $\mathcal{C}$ una categoría y H una subcategoría de $\mathcal{C}$. Se dice que H es reflexiva en $\mathcal{C}$, si para todo objeto V en $\mathcal{C}$ existe un objeto V^* en H y un morfismo $r_V : V \to V^*$, llamado la reflexión de V, tal que para cualquier objeto U de H y cualquier morfismo $f : V \to U$ existe un único morfismo $f^* : V^* \to U$ tal que $f^* \circ r_V = f$ (Adámeck, Herrlich y Streker, 1990).

Puede observarse fácilmente que la reflexión de cada objeto es única salvo isomorfismos.

La siguiente proposición caracteriza las categorías reflexivas.

Proposición: H es una subcategoría reflexiva de C, si y solamente si, el funtor de inclusión $I : H \to \mathcal{C}$ admite adjunto a izquierda. (Adámeck, Herrlich y Streker, 1990)

De manera dual se tiene la definición de subcategoría correflexiva H y su caracterización correspondiente.

Ejemplos

La categoría de los espacios compactos de Hausdorff es una subcategoría reflexiva de la categoría de los espacios completamente regulares.

La noción de elevador de estructura

Definición: Sea $F : \mathcal{C} \to D$ un funtor topológico y sea $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un funtor. Diremos que E es un elevador de estructura si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $F \circ E = F$.

2. $\boldsymbol{X} \leq E(\boldsymbol{X})$ para todo objeto $\boldsymbol{X}$ *de* $\mathcal{C}$.

La condición (1.) implica, entre otros, que ***E*** es un funtor concreto y por lo tanto fiel, además que ***E*** respeta las fibras, esto es, $E(\boldsymbol{X}) \in Fib(X)$ para todo objeto ***X*** de $\mathcal{C}$.

Análogamente se dice que un funtor $C : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un *coelevador de estructura* si $F \circ C = F$ y para todo objeto ***X*** de C se tiene que $C(\boldsymbol{X}) \leq \boldsymbol{X}$.

En adelante, nos referiremos a los funtores elevadores (coelevadores) de estructura simplemente como elevadores (coelevadores).

Nota. Es de anotar que a pesar de la sencillez de la noción de elevador de estructura, no la hemos encontrado referenciada de manera explícita en la literatura.

Un funtor ***E*** definido en *Top* se dice idempotente si $E \circ E = E$. Nótese que en tal caso los puntos fijos de ***E*** coinciden con su imagen. La subcategoría plena de *Top* formada por los puntos fijos de ***E*** se notará $E(Top)$ y a esta nos referiremos como la subcategoría de *Top* generada por ***E***.

Como se verá más adelante los puntos fijos de elevadores y coelevadores idempotentes generan categorías topológicas. Sin embargo, el siguiente teorema que se constituye en uno de los resultados centrales usa funtores con menos propiedades.

Teorema: Sea $E{:}Top \to Top$ un funtor concreto e idempotente. Entonces, $E(Top)$ es una categoría topológica y una subcategoría correflexiva de Top.

De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores idempotentes definidos en *Top*.

Elevadores idempotentes generados por espacios topológicos y subcategorías asociadas

Haciendo uso de estructuras finales, los espacios topológicos definen elevadores como se ilustra a continuación.

Sean ***W*** y ***X*** espacios topológicos. En la colección de funciones continuas se obtiene el sumidero que notamos $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})} = \{f : \mathbf{W} \to X \mid \mathbf{f} \in [\mathbf{W},\mathbf{X}]_{Top}\}$. La estructura final para $S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}$ la notaremos $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$.

Es natural que $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ resulte un espacio con topología más fina que la de ***X***. Otro detalles que se pueden resaltar es que las funciones continuas de ***W*** en ***X*** y de ***W*** en $F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ coinciden. Estos hechos se consideran en los siguientes lemas, que finalmente van a permitir definir un elevador idempotente a partir de ***W***, haciendo uso de estructuras finales.

Lema. Sean ***W*** y ***X*** espacios topológicos entonces $X \leq F_{S_{(\mathrm{W},\mathrm{X})}}$.

Lema. Sean ***W*** y ***X*** espacios topológicos entonces

$$[W,X]_{Top} \cong \left[W, F_{S_{(W,X)}}\right]_{Top}$$

Nótese que este lema está diciendo que el proceso de tomar estructuras finales, con el proceso antes descrito, es idempotente.

Teorema: *Sea **W** un espacio topológico. La aplicación* $E_{\mathbf{W}} : Top \to Top$ *definida por* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{X}) := F_{S_{(\mathbf{W},\mathbf{X})}}$ *y* $E_{\mathbf{W}}(\mathbf{f}) := \mathbf{f}$ *define a* $E_{\mathbf{W}}$ *como un elevador idempotente en Top.*

De manera dual, haciendo uso de estructuras iniciales, un espacio topológico da origen a un coelevador idempotente, con lo que se obtienen los resultados duales a los del teorema anterior.[2]

[2] A. Oostra (1995) ha publicado otros trabajos que relacionan subcategorías generadas a través de estructuras iniciales y temas afines.

Observación

En general si $\{\mathbf{W}_i\}_{i\in J}$ es una familia de espacios topológicos, se determina un elevador idempotente $E_{(\mathbf{W}_i)}$, el cual se define asociando a cada espacio topológico X la estructura final para el sumidero $\{f:\mathbf{W}_i \to X | \mathbf{f} \in [\mathbf{W}_i,\mathbf{X}]_{Top}\}_{i\in J}$; en funciones continuas el funtor se define por $E_{(\mathbf{W}_i)}(\mathbf{f})=\mathbf{f}$.

Más aún, con este mismo método, una clase de espacios topológicos $\mathcal{C}$ determina un elevador idempotente $E_{\mathcal{C}}$ en *Top*. En efecto, puesto que para todo conjunto X la colección de topologías sobre X es un conjunto, para cada espacio topológico $\boldsymbol{X}$ se determina el conjunto $\{ E_{\mathrm{W}}(\mathbf{X}) | \mathbf{W} \in \mathcal{C}\}$; $E_{\mathcal{C}}(\mathbf{X})$ corresponde a la intersección de los elementos de este conjunto.

De manera dual se obtienen los resultados para coelevadores definidos en *Top*.

La siguiente proposición establece una adjunción entre las categorías generadas por un elevador y un coelevador representables por un mismo espacio topológico.

Proposición: Sea $\boldsymbol{W}$ un espacio topológico. Existe una adjunción entre las categorías $C_{\mathrm{W}}(Top)$ y $E_{\mathrm{W}}(Top)$, más exactamente el funtor

$$C_{\mathrm{W}} : E_{\mathrm{W}}(Top) \to C_{\mathrm{W}}(Top)$$

es adjunto a izquierda del funtor

$$E_{\mathrm{W}} : C_{\mathrm{W}}(Top) \to E_{\mathrm{W}}(Top)$$

Ejemplos

1. Consideremos el espacio de Sierpinski $\mathbf{S}=(S,\tau)$ donde $\tau=\{\emptyset,\{0,1\},\{1\}\}$. Entonces, $C_{\mathrm{S}}(Top)=Top$.

2. Sea C la clase de los espacios compactos. La categoría de los *k*- espacios corresponde a la categoría generada por el elevador determinado por C en *Top*.

3. Sea A la clase de los espacios compactos de Hausdorff. La categoría de los espacios de Kelley corresponde a la categoría generada por el elevador determinado por A en *Top*.

4. Consideremos $\mathbb{N}_\infty = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ como subespacio del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ con su topología usual. La categoría $E_{\mathbb{N}_\infty}(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios secuenciales.

5. Sea I el intervalo [0,1] con su topología usual. La categoría $C_I(Top)$ corresponde a la categoría de los espacios completamente regulares.

6. La categoría de los espacios de proximidad *Prox* es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, ver por ejemplo Willard (1970). Por lo tanto *Prox* es una categoría topológica.

7. La categoría de los espacios uniformes *Unif* es isomorfa a la categoría de los espacios completamente regulares, ver por ejemplo Willard (1970). Por lo tanto *Unif* es una categoría topológica.

REFERENCIAS

Adámeck, J., Herrlich, H. y Streker, G. (1990). *Abstract and concrete categories.* New York, USA: John Wiley and Sons Inc.

Ardila, V., Montañez, J. y Ruiz, C. (2000). Nociones equivalentes de categorías topológicas. *Boletín de Matemáticas*, *VII*(1), 19-27.

Montañez, R. (2007). *Funtores, elevadores y coelevadores de estructura.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Montañez, R. y Ruiz, C. (2006). Elevadores de estructura. *Boletín de Matemáticas,* 13, 111-135.

Oostra, A. (1995). Subcategoría generadas mediante estructuras iniciales. *Lecturas Matemáticas*, 16, 63-72.

Preuss, G. (1988). *Theory of topology structures.* Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

Willard, S. (1970). *General topology.* Londres, Gran Bretaña: Adison Wesley Publishing Company.