GEOMETRÍA EN EL ALFABETO LÓGICO DE ZELLWEGER

Leonardo Granados y **Norman Aya**
Universidad del Tolima
olgranados@ut.edu.co, ayaluar07@hotmail.com

Se presenta la geometría en el Alfabeto Lógico de Shea Zellweger a partir de la construcción de modelos de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^4$, y el correspondiente análisis algebraico que permite establecer grupos de simetría.

INTRODUCCIÓN

A lo largo del siglo XX, de manera desapercibida para las principales corrientes de la matemática, diversos autores propusieron notaciones para los conectivos proposicionales binarios de la lógica clásica. La primera de ellas fue la que diseñó en 1902 el notable científico y filósofo norteamericano Charles S. Peirce. Posteriormente aparecen muchas otras que, con el tiempo, pueden clasificarse en las *alfabéticas*, las que emplean las letras del alfabeto común u otros signos convencionales, y, por otro lado, las *geométricas* que, como la de Peirce, representan cada conectivo mediante un dibujo que procura sintetizar la definición del mismo.

La única notación que combina de manera armoniosa estas dos cualidades, alfabética y geométrica según investigaciones recientes, es la propuesta por el norteamericano Shea Zellweger[1] desde hace casi cincuenta años, tiempo que su autor ha dedicado a investigaciones profundas y progresivas sobre este sistema de signos y sobre el simbolismo en general (Zellweger, 1997a, 1997b, 2003).

La idea tiene lugar en la ciudad de Chicago alrededor del año 1953, cuando el profesor Zellweger se interesó por la lógica matemática, en un viaje maravi-

[1] Shea Zellweger nació el 7 de septiembre de 1925 en Chicago Illinois, USA; se desempeñó desde 1969-1993 como profesor y presidente del Departamento de Psicología en Mount Union College en Alliance, Ohio. Probablemente es mejor conocido por la creación del más sencillo y mentalmente intuitivo sistema de notación lógica, que bien llamó Alfabeto Lógico o Alfabeto Lógico X-tremidad (XLA) por su sigla en inglés. El sistema de notación XLA contiene un enfoque visual único e iconográfico para el aprendizaje y la realización de las operaciones lógicas. Disponible en Internet: http://www.logic-alphabet.net/

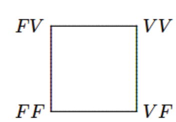
Granados, L. y Aya, N. (2011). Geometría en el alfabeto lógico de Zellweger. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 361-369). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

lloso y obsesivo que eventualmente lo llevaría a la invención y desarrollo guiado por su innato amor por los patrones, a una nueva notación para los conectivos proposicionales binarios como un sistema visual que llamó Alfabeto Lógico, el cual se compone de dieciséis ($16=2^{2^2}$) formas o letras cuya clave de interpretación está en las “extremidades”. Por ejemplo, la letra x del Alfabeto Lógico tiene cuatro extremidades, q tiene una, y o no tiene ninguna. Con la convención adecuada, se puede pasar del signo a la tabla de verdad del conectivo que representa y viceversa. Por otra parte, los movimientos rígidos de los signos corresponden a operaciones lógicas, por ejemplo, a partir de la expresión A d B se pasa a *N*A d B donde *N* denota la negación y es equivalente a A b B, de hecho en general *negar la primera proposición* corresponde a *reflejar el signo en el eje vertical*. Esto a su vez conduce a interpretar en la lógica las simetrías que tengan los signos, por ejemplo, un conectivo es conmutativo, si y solo si, su signo en el Alfabeto Lógico es simétrico respecto a la diagonal ascendente.

Zellweger en su larga investigación alrededor del Alfabeto Lógico demuestra una sugestiva originalidad en la construcción de modelos físicos para el sistema de signos. Elaboró modelos unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales que él insiste son proyecciones de modelos en cuatro dimensiones, y de esta manera la lógica se conecta con la geometría en la búsqueda de la verdad científica. Esa búsqueda nos ha permitido investigar y estudiar con mucho detalle los movimientos rígidos de los diversos modelos que revelan sorprendentes e insospechadas simetrías en el sistema de los conectivos binarios y su posible extensión a cuatro dimensiones. Asimismo establecer correspondencias explícitas de los movimientos rígidos de los modelos con los de las letras del Alfabeto Lógico, y la proyección de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ para la cual la imagen es un rombododecaedro (Granados y Aya, 2010).

ALFABETO LÓGICO

El Alfabeto Lógico se fundamenta en un “cuadrado básico”. A cada vértice del cuadrado se le asigna una combinación de valores de verdad teniendo en cuenta la configuración del diagrama que se presenta al lado:



Cuadro básico

Cuando en un conectivo alguna de las combinaciones de valores de verdad es verdadera, el vértice correspondiente se marca con un punto aumentado, dando lugar a 16 posibles casos, por ejemplo, . Estos diagramas a su vez se reducen a una forma cursiva que es propiamente el Alfabeto Lógico. (La forma cursiva de los diagramas está en la Tabla 1).

El mecanismo de construcción del Alfabeto Lógico consiste en ver la posición de los puntos en las esquinas del cuadrado para fijar el número de extremidades y, con ello, la letra misma. Por ejemplo, la ausencia de puntos en las esquinas del diagrama , le corresponde una letra que carece de extremidades como o; en este diagrama no hay combinaciones de los valores donde el conectivo es verdadero y sus valores son ***FFFF***. La presencia del punto en la esquina superior izquierda en el diagrama indica una extremidad que corresponde a ***FV*** y tiene asociada una letra con una extremidad que es b. Los valores de este conectivo son ***FFVF***. El diagrama tiene tres puntos que corresponden a una letra con tres extremidades: una en la esquina superior izquierda y dos en las esquinas inferiores. La letra que corresponde a este diagrama es la letra h. Los valores de este conectivo son ***FVVV***, que son los de la "barra de Sheffer". A continuación se expone la interrelación de los cuadrados con las formas de letras del Alfabeto Lógico.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*
VF	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*F*	*V*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*
FV	*F*	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*	*V*
FF	*F*	*V*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*V*	*F*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*F*	*V*
	o	p	b	q	d	c	u	s	z	n	ɔ	h	μ	ɗ	ɥ	x

Tabla 1. El Alfabeto Lógico de Shea Zellweger

La continua exploración lo lleva a considerar la dimensión o tamaño que adquiere cada letra, las dieciséis letras las divide en dos conjuntos (8, 8). Las primeras ocho las denomina "altas", tal vez porque tratan de ser alargadas con respecto a un eje vertical, ellas son: pbqdhμɗɥ. Considerando el número de extremidades, este grupo se divide en dos (4, 4), las de una y las de tres. Las otras sutilmente las llama "encogidas", en razón de ver ajustado su ancho: ocuszn ɔx, tienen un número par de extremidades organizadas de la siguiente manera (1, 6, 1).

Una característica propia a la anatomía tiene su origen en el instante de combinar la conversión, cuando $(A \ast B)$ cambia a $(B \ast A)$. El autor separa las letras en otro par de conjuntos (8, 8) tomando como criterio los puntos del cuadrado y las diagonales que pasan desde la esquina superior derecha a la inferior izquierda, de este modo las letras (p d h ɥ o z s x) adquieren la propiedad de simetría y conversión, mientras las otras (b q µ ɹ c u n ɔ) carecen de la propiedad de conversión. En ese sentido el criterio pone a todas las letras en cuatro niveles de simetría y asimetría.

En la interacción de las funciones del Alfabeto Lógico, las letras toman diferentes posiciones cuando participan en operaciones lógicas. Disponer de una elegante y sencilla anatomía permite ver cómo ambas cualidades interactúan de una forma armoniosa, para llevar a cabo las mismas operaciones de simetría. La idea conduce a crear al interior del Alfabeto Lógico, sencillas reglas que permiten llevar a cabo variados movimientos con las letras que generan interesantes y elegantes representaciones de simetría, integradas por los modelos a partir de las propiedades del Alfabeto Lógico y los conectivos proposicionales, como en los cálculos de simetría, porque al diseñar las letras se genera la interrelación entre la tabla, el punto en el cuadrado y la correspondiente letra.

Las cuatro reglas de simetría o de movimiento vistas en acción, consisten en general en tomar las letras y hacerlas girar o buscar su complemento (Zellweger, 2003). Ellas se aplican a todas las expresiones pero se trabaja con una genérica, denotada $(A \ast B)$. Las cuatro reglas de simetría a exponer se expresan como sigue:

- **R1** *Negar el miembro izquierdo del asterisco*. El movimiento resultante consiste en reflejar la letra de izquierda a derecha.
- **R2** *Negar la letra del Alfabeto*. $N\ast$ consiste en el complemento de las letras, es decir todas las posiciones de las extremidades se invierten.
- **R3** *Negar el miembro derecho del asterisco*. El movimiento consiste en reflejar la letra de arriba hacia abajo.
- **R4** *Convertir*. Consiste en hacer una reflexión en la diagonal en el cuadrado que viene desde la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda.

R1	(*NA* d *B*)	cambia a	(*A* b *B*)	
R2	(*A N*d *B*)	cambia a	(*A* h *B*)	
R3	(*A* d *NB*)	cambia a	(*A* q *B*)	
R4	(*A* d *B*)	cambia a	(*B* d *A*)	Porque el punto de la letra d permanece en el mismo lugar en el cuadrado al momento de aplicar el giro en la diagonal; la razón, la conjunción es conmutativa
	(*A* b *B*)	cambia a	(*B* q *A*)	

Tabla 2. Ejemplo de la aplicación de las reglas de simetría

Estas cuatro operaciones propuestas por Zellweger son casos particulares de los automorfismos lógicos (García, Gómez y Oostra, 2001) considerados ahora en el Alfabeto Lógico, donde la negación se convierte en una acción totalmente sometida a la simetría como el principal motor del Alfabeto.

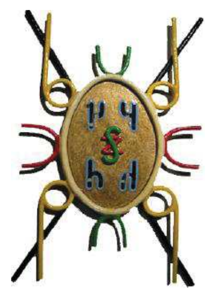
MODELOS DEL ALFABETO LÓGICO

Los modelos físicos de Zellweger encierran en su estructura propiedades de simetría que reflejan el potencial de su Alfabeto. La búsqueda se centra en la idea en que los diagramas deben ser claros, por lo menos más sencillos e isomorfos a aquello que representan (Oostra, 2001, 2004).

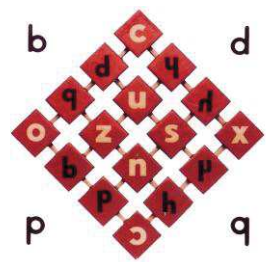
El modelo *Flipstick* o *Regla giratoria* está construido en una sola dimensión a partir de la Tabla 1, con las letras en las dos caras. Como se verá en los demás modelos, esta configuración es una proyección unidimensional de un plano, que a su vez es una sombra en el espacio de un hipercubo. El *Insecto lógico* es un modelo bidimensional con “brazos”(b d) y “piernas”(p q); que puede ser visto como una proyección en el plano de una sombra en el espacio de un cubo de cuatro dimensiones. Esto hace del Insecto lógico una proyección de una proyección, desde el cubo de cuatro dimensiones a la sombra en el espacio en un plano. El *Poliedro lógico*, aparece como un “esqueleto” en el espacio de un cubo de cuatro dimensiones diseñado a partir del conjunto de letras. Este modelo esconde maravillosas simetrías pues los movimientos rígidos coinciden con los movimientos de las letras y en sí con los de los conectivos. La figura es un rombododecaedro, un modelo de tres dimensiones construido de la misma forma en que un cubo en el espacio colapsa a lo largo de una de sus diagonales mayores. El modelo ordena los 16 vértices del cubo de cuatro dimensiones en los de un rombododecaedro. El rombododecaedro tiene 14 vértices, los otros dos conectivos se ubican en el centro. La importancia del Poliedro lógico está determinada en que incorpora todas las propiedades de simetría originadas por las reglas. A continuación se presentan modelos físicos del Alfabeto Lógico.

Flipstick

Insecto lógico

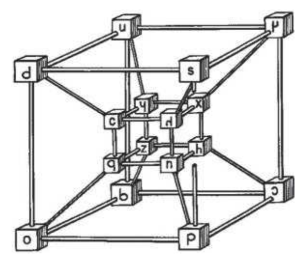


Reloj brújula



Poliedro lógico

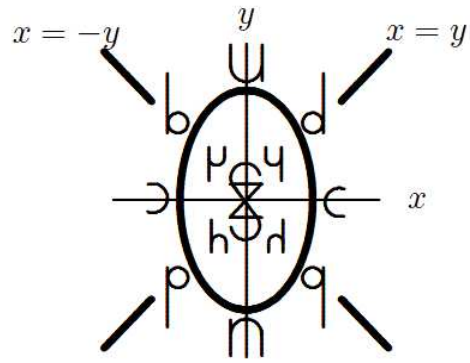
Hipercubo lógico



GEOMETRÍA EN EL ALFABETO LÓGICO

En el campo dimensional el Alfabeto Lógico permite maravillosos modelos geométricos que proporcionan simetrías partiendo de una adecuada configuración, dando la posibilidad de crear diseños y asimismo presentar de forma atractiva al explorador de notaciones diagramáticas, una herramienta muy útil para recorrer y conocer en detalle esta encantadora notación para los conectivos proposicionales binarios.

El modelo más simple para representar el Alfabeto Lógico es el modelo unidimensional *Flipstick* o *Regla giratoria*, que exhibe los conectivos lógicos con la limitación en sus posibles movimientos. Sin embargo el modelo *Insecto lógico* tiene algunas características especiales que generan mayor interés y curiosidad por la relación entre la lógica y la geometría bidimensional, el cual integra los 16 conectivos binarios de tal forma que permite observar con mayor facilidad los movimientos de cada signo según los cuatro ejes que en él se encuentran, uno horizontal x, uno vertical y, y dos oblicuos, $x = y$ (diagonal ascendente) $x = - y$ (diagonal descendente), como se muestran a continuación.



Así, los signos se pueden clasificar en seis diferentes grupos según el nivel de simetría y asimetría, que surgen al llevar a cabo los movimientos al interior del modelo. Es propio tener en cuenta la posibilidad de realizar las rotaciones desde cualquiera de los 4 ejes señalados en sentido contrario a las manecillas del reloj. Además todo conectivo tiene rotaciones, reflexiones y su complemento, sin embargo no todos al realizar los anteriores movimientos quedan invariantes como es el caso de los conectivos o y x.

De este modo, presentaremos una tabla con cada uno de los movimientos realizados por el modelo bidimensional para los signos, y la respectiva operación lógica. El análisis es similar para los otros modelos.

GRUPO	SIGNO	INVARIANTES
1	o x	. Reflexión respecto a los 4 ejes . Rotación según los ángulos 90º, 180º y 270º
2	s z	. Reflexión respecto a los ejes $x = y$ y $x = -y$. Rotación en un ángulo de 180º
3	c ɔ	. Reflexión respecto al eje x . Rotación según ningún ángulo
4	u n	. Reflexión respecto al eje y . Rotación según ningún ángulo
5	p d h y	. Reflexión respecto al eje $x = y$. Rotación según ningún ángulo
6	b q µ ɿ	. Reflexión respecto al eje $x = -y$. Rotación según ningún ángulo

Tabla 3. Clasificación de simetría en el modelo bidimensional

Movimiento del MODELO	Movimiento del SIGNO	Operación LÓGICA
Reposo	Reposo	A $*$ B
Rotación 90º	Rotación 90º	B $*$ NA
Rotación 180º	Rotación 180º	NA $*$ NB
Rotación 270º	Rotación 270º	NB $*$ A
Reflexión eje x	Reflexión eje horizontal	A $*$ NB
Reflexión eje y	Reflexión eje vertical	NA $*$ B
Reflexión eje $x = y$	Reflexión diagonal ascendente	B $*$ A
Reflexión eje $x = -y$	Reflexión diagonal descendente	NB $*$ NA

Tabla 4. Movimientos y operaciones lógicas para un modelo bidimensional

RESULTADOS

El Alfabeto Lógico combina de manera armoniosa las cualidades alfabética y geométrica de las notaciones para los conectivos proposicionales binarios. Los signos tienen nombres naturales pues (casi todos) son letras del alfabeto occidental; por otro lado, ellos tienen la forma adecuada para considerar sus movimientos rígidos, lo cual permite estudiar la simetría del sistema. Todos los movimientos rígidos de las letras del Alfabeto Lógico corresponden a operaciones lógicas efectuadas sobre la proposición compuesta. Más aún, todas estas operaciones lógicas se pueden generar a partir de la negación y el intercambio de las variables.

Los modelos físicos del Alfabeto Lógico permiten ver cómo, en algunos casos excepcionales, los movimientos rígidos del modelo coinciden en alguna medida con los movimientos rígidos de cada una de las letras y, en consecuencia, corresponden a ciertas operaciones lógicas. De esta manera, las simetrías del modelo muestran ciertas simetrías del Alfabeto Lógico y, por tanto, del sistema de conectivos que representa.

Un detallado análisis geométrico y algebraico a los diferentes modelos propuestos por Zellweger, permitió establecer distintos grupos de simetría según sus movimientos en los diagramas. Un caso particular es el Poliedro lógico que tiene la misma simetría de su figura envolvente, el rombododecaedro, cuyos movimientos rígidos a su vez son los mismos del cubo de dimensión 3. De estos 48 movimientos, 16 corresponden a las operaciones lógicas. Queda aún abierto el problema de dar una interpretación lógica a los otros 32 movimientos del poliedro. Por otro lado, la deficiencia de este modelo se concentra en los conectivos “centrales” **s** y **z**. Pues en todos los movimientos rígidos del Poliedro lógico permanecen ambos en el centro del modelo, luego es imposible saber si cierto movimiento los intercambia o los deja invariantes. Quizás el modelo físico más adecuado para el Alfabeto Lógico es el hipercubo o cubo de cuatro dimensiones, dado que la cantidad de sus vértices coincide con la de conectivos proposicionales binarios. Las dificultades para estudiar este modelo incluyen la imposibilidad de visualizar sus movimientos y la incógnita de cuál conectivo se debe asignar a cuál vértice. Una gran ayuda en este sentido lo constituyen las proyecciones del hipercubo al espacio, de hecho se pudo mostrar de manera explícita una proyección cuya imagen en el espacio es el rombododecaedro, sobre el cual Zellweger ya había elaborado el mejor de sus modelos tridimensionales. Se espera que este puente sirva como orientación para investigaciones futuras sobre el Alfabeto Lógico.

REFERENCIAS

García, M., Gómez, J.F. y Oostra, A. (2001). Simetría y lógica: la notación de Peirce para los 16 conectivos binarios. En *Memorias del XII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 1-26). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Granados, L. y Aya, R. (2010). *Acerca de la geometría del Alfabeto Lógico de Shea Zellweger*. Trabajo de pregrado en matemáticas, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia.

Oostra, A. (2001). Los diagramas de la matemática y la matemática de los diagramas. *Boletín de Matemáticas*, VIII, 1-7.

Oostra, A. (2004). La notación diagramática de C. S. Peirce para los conectivos proposicionales binarios. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas*, *Físicas y Naturales*, *XXVIII*(106), 57-70.

Zellweger, Sh. (1997a). On a deep correspondence between sign-creation in logic and symmetry in crystallography. En I. Rauch y G.F. Carr (Eds.), *Semiotics around the world: Synthesis in diversity* (pp. 821-824). New York: Mouton de Gruyter.

Zellweger, Sh. (1997b). Untapped potential in Peirce’s iconic notation for the sixteen binary connectives. En N. Houser, D.D. Roberts y J. Van Evra (Eds.), *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce* (pp. 334-386). Bloomington, Indianapolis: Indiana University Press.

Zellweger, Sh. (2003). Mathelogical semiotics: a lesson in constructing a shape – value notation for elementary logic. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, Sh. Zellweger y V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 285-356). Toronto: Legas.