

GEOMETRÍA AFÍN Y TOPOLOGÍA DEL PRISMATOIDE PENTAGONAL

Luis-Enrique Ruiz-Hernández

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

leruizh@yahoo.es

Si \mathcal{P} es el prismoide pentagonal, se investiga la geometría y topología de $f(\mathcal{P})$, donde f es un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 , introduciendo una norma φ sobre \mathbb{R}^3 , respecto a la cual $f(\mathcal{P})$ es una esfera. La representación unificada de φ en términos de tres vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 (con la inefable presencia del número de oro), permite, en particular, describir a \mathcal{P} como un lugar geométrico cuyos puntos satisfacen ciertas condiciones de proyección ortogonal sobre las rectas perpendiculares a pares de caras opuestas de \mathcal{P} a través de sus centros. Al abordar la estereometría del sólido afín, se encuentra una representación del circunelipsoide y el volumen de $f(\mathcal{P})$, aplicando un importante resultado de las transformaciones afines. Específicamente se obtiene el volumen de \mathcal{P} en términos de su arista.

INTRODUCCIÓN

Por una ligera distorsión del prisma pentagonal recto de bases regulares, obtenemos un dodecaedro convexo de dos caras pentagonales regulares y paralelas, conectadas por 10 triángulos isósceles. La altura del poliedro siempre puede ajustarse de tal manera que los triángulos isósceles sean equiláteros. Entonces el sólido así obtenido (de caras regulares) recibe el nombre de anti-prisma (prismoide, prismoide o prisma oblicuo) pentagonal (ver Figura 1).

No hay hasta el presente un estudio, diferente al clásico, del prismoide pentagonal que aporte una nueva concepción sobre su geometría. Razón por la cual, en este documento, se emprende y se pone de manifiesto, la existencia de una metodología que abre nuevos caminos en esa dirección.

En efecto, articulando profusamente nociones de análisis funcional y convexo, se concibe un marco conceptual que permite abordar la topología y geometría afín del sólido. En general, se indaga sobre el prismoide pentagonal afín \mathcal{P} (ver Definición 1.1 y Figura 3), introduciendo una norma φ sobre \mathbb{R}^3 respecto a la cual \mathcal{P} es una esfera (Teoremas 1.3 y 2.1). La representación de φ se da en términos de tres vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , con la inefable presencia del número de oro (Lema 1.2). Se construye así un modelo matemá-

tico, riguroso y versátil, que unifica y describe minuciosamente la geometría de \mathcal{P} . El caso notable en que \mathcal{P} es un prismatoide pentagonal es tratado en el Corolario 3.2. Posteriormente veremos cómo la ilustración 2.2 permite avizorar el alcance de estos resultados.

Más adelante se aportan dos representaciones del prismatoide pentagonal en términos de los centros de seis caras no paralelas, como también en términos de las rectas perpendiculares a esas caras a través de sus centros (Corolario 3.1). Así, se describe (vía proyecciones ortogonales) el prismatoide pentagonal como un lugar geométrico de puntos en \mathbb{R}^3 , resultado hasta hoy desconocido.

Finalmente se estudian algunos aspectos relevantes de la estereometría de \mathcal{P} , y en particular, aplicando una importante propiedad de las transformaciones afines, se calcula el volumen de \mathcal{P} (Teorema 4.1).

Denotaremos con letra mayúscula los puntos o vectores (fila) de \mathbb{R}^3 , su producto interior usual por un punto \cdot y el producto vectorial con una cruz \times .

El Lema 1.2, los Teoremas 1.3, 2.1 y 4.1, como los Corolarios 3.1 y 3.2, consignados en la presente investigación son originales. Constituyen aportes concebidos y demostrados por el autor.

1. GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DEL PRISMATOIDE PENTAGONAL AFÍN

1.1. Definición. Un prismatoide (o prismoide o antiprisma o prisma oblicuo) pentagonal afín, es la imagen de un prismatoide pentagonal bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 (ver Figuras 1 y 3).

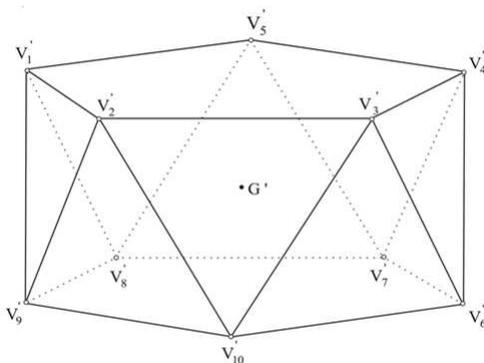


Figura 1. El prismatoide pentagonal $V_1 \dots V_{10}$ de centro $G' = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5})$, $i=1, \dots, 5$

De manera similar se define pentágono regular afín. El número

$$(1.1.1) \quad \tau = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\dots$$

fue llamado por los griegos el número de oro, y es la raíz positiva de la ecuación cuadrática

$$(1.1.2) \quad \tau^2 - \tau - 1 = 0$$

(Coxeter, 1989, pp. 160-168; Fuentes, 1991, pp. 19-38).

Es un hecho singular que en el pentágono regular, cada diagonal es paralela al lado opuesto y es τ veces dicho lado. Dado que las transformaciones afines preservan las combinaciones lineales promedio (la suma de cuyos coeficientes es 1) (Birkhoff y MacLane, 1970, pp. 417-423), entonces la propiedad anterior se mantiene en el pentágono regular afín $V_1 \dots V_5$. En otras palabras

$$(1.1.3) \quad V_4 = V_1 - \tau V_2 + \tau V_3 \quad V_5 = \tau V_1 - \tau V_2 + V_3$$

(ver Figura 2).

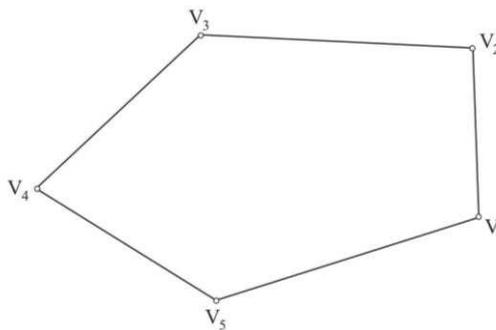


Figura 2. $V_1 \dots V_5$ es un pentágono regular afín, en el cual $\overline{V_1V_3} \parallel \overline{V_5V_4}$ y $V_1V_3 = \tau V_5V_4$

1.2. Lema. Sean A, B y C tres vectores dados en \mathbb{R}^3 , linealmente independientes, y hagamos

$$(1.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_k = \frac{1}{2} \{ (5-2\tau)k + 8\tau - 15 - 3\tau^{-2}|k-2| - 2\tau^{-3}|k-3| - 3\tau^{-2}|k-4| \\ + (5-2\tau)|k-5| \} A + \frac{1}{2} \{ -3\tau^{-1}k + 8\tau - 9 + \sqrt{5}\tau^{-2}|k-2| \\ - \tau^{-3}|k-3| + 2\tau^{-1}|k-4| - 2\tau^{-1}|k-5| \} B + \frac{1}{2} \{ (2-3\tau)k + 12\tau \\ - 8 + 2\tau^{-1}|k-2| - \tau^{-3}|k-3| + \sqrt{5}\tau^{-2}|k-4| + (3-4\tau)|k-5| \} C \end{array} \right.$$

para todo $k = 1, \dots, 6$. Entonces la función $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ representada por

$$(1.2.2) \quad \varphi(\mathbf{X}) = \max_{1 \leq k \leq 6} |A_k \cdot \mathbf{X}|$$

para todo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$, es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

Demostración. Según (1.2.2), la afirmación $\varphi(\mathbf{X}) = 0$ implica

$$|A_k \cdot \mathbf{X}| \leq \varphi(\mathbf{X}) = 0 \quad k = 1, \dots, 6$$

expresiones equivalentes al sistema de ecuaciones

$$\Lambda_k \cdot \mathbf{X} = 0 \quad k = 1, \dots, 6$$

por ser

$$\begin{aligned} & \det(A_1, A_2, A_3) \\ &= \det(\tau^{-1}A + \tau^{-1}B - C, 2A - \tau^{-1}B - \tau C, \sqrt{5}A - B - C) \\ &= -\det(A, B, C) \neq 0 \end{aligned}$$

el rango de la matriz de los coeficientes es tres, y el sistema tiene como solución única $\mathbf{X} = \mathbf{0}$. La misma representación de φ nos aporta

$$\varphi(\lambda \mathbf{X}) = |\lambda| \varphi(\mathbf{X}), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

y

$$\begin{aligned} & |A_k \cdot (\mathbf{X} + \mathbf{Y})| = |A_k \cdot \mathbf{X} + A_k \cdot \mathbf{Y}| \quad k = 1, \dots, 6 \\ & \leq |A_k \cdot \mathbf{X}| + |A_k \cdot \mathbf{Y}| \leq \varphi(\mathbf{X}) + \varphi(\mathbf{Y}) \end{aligned}$$

lo que implica

$$\varphi (X+Y) \leq \varphi (X) + \varphi (Y)$$

1.3. Teorema. Bajo todas las hipótesis del Lema 1.2, consideremos la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (1.2.1) y (1.2.2). Si $r > 0$, $G \in \mathbb{R}^3$ y

$$(1.3.1) \quad \Delta = \det (A, B, C)$$

hagamos

$$(1.3.2) \quad \begin{cases} V_1 = G + \frac{r}{\Delta} (\tau^{-3} A \times B + B \times C + C \times A) \\ V_2 = G + \frac{r}{\Delta} (A \times B + B \times C + \tau^{-3} C \times A) \\ V_3 = G + \frac{r}{\Delta} (A \times B + \tau^{-3} B \times C - \tau^{-3} C \times A) \\ V_4 = G + \frac{r}{\Delta} (\tau^{-3} A \times B - \tau^{-3} B \times C + \tau^{-3} C \times A) \\ V_5 = G + \frac{r}{\Delta} (-\tau^{-3} A \times B + \tau^{-3} B \times C + C \times A) \\ V_{i+5} = 2G - V_i, \quad V_i \quad i=1,\dots,5 \end{cases}$$

Entonces, $S_r [G]$ la esfera cerrada de centro G y radio r , respecto a la norma φ , es un prismaoide pentagonal afín, macizo y cerrado, centralmente simétrico en G , de vértices V_1, \dots, V_{10} dados en (1.3.2) y dispuestos como se muestra en la Figura 3.

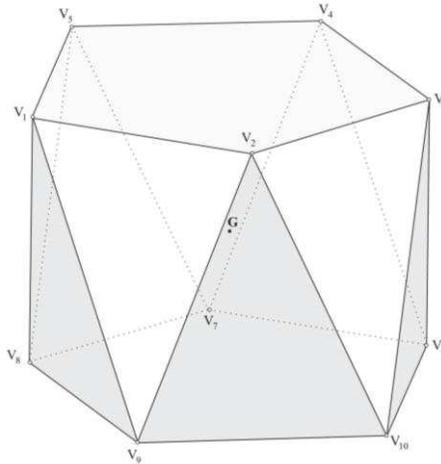


Figura 3. El prismaoide pentagonal afín $\text{conv} \{V_1, \dots, V_{10}\}$ es la esfera cerrada de centro $G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5})$, $i=1, \dots, 5$, y radio r , respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 .

Además, los planos faciales del poliedro tienen las siguientes representaciones. Las caras (triángulos y pentágonos regulares afines)

$$(1.3.3) \quad \begin{array}{lll} V_1V_5V_8, & V_1V_9V_8, & V_1V_2V_9, \\ V_2V_{10}V_9, & V_2V_3V_{10}, & V_6 \dots V_{10} \end{array}$$

están en los planos

$$(1.3.4) \quad \Lambda_k \cdot (X - G) = r \quad k = 1, \dots, 6$$

respectivamente, donde Λ_k está definido en (1.2.1).

Los planos faciales de sus correspondientes caras opuestas (y paralelas) respecto a G , tienen representaciones de la misma forma anterior, cambiando r por $-r$.

Demostración. Aplicando propiedades de los determinantes y la relación $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D) C - (A \times B \cdot C) D$, hallamos que

$$\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) = \frac{r^3}{\Delta} (35 - 22\tau) \neq 0$$

teniendo presente (1.3.1) y (1.3.2); es decir, G, V_1, V_2, V_3 son afinmente independientes en \mathbb{R}^3 , lo mismo que G', V'_1, V'_2, V'_3 en el prismaoide pentagonal de la Figura 1 (de hecho no degenerado).

Por tanto existe un único automorfismo afín $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$(1.3.5) \quad f(G') = G, \quad f(V'_k) = V_k, \quad k = 1, 2,$$

(Birkhoff y MacLane, 1970, p. 429; Rockafellar, 1972, p. 8).

Puede verificarse que los puntos V_4, V_5 en (1.3.2) son combinaciones lineales promedio de G, V_1, V_2, V_3 como las indicadas en (1.1.3). Análogas combinaciones lineales ocurren para V'_4 y V'_5 por ser $V'_1 \dots V'_5$ un pentágono regular, además de acuerdo al texto de la Figura 1,

$$V'_{i+5} = 2G' - V'_i \quad i = 1, \dots, 5$$

por lo cual, a la luz de (1.3.5) y de la última ecuación en (1.3.2)

$$f(V_i) = V_i \quad i = 1, \dots, 10$$

dato que f preserva tales combinaciones. Se sigue, según la Definición 1.1, que $V_1 \dots V_{10}$ es un prismoide pentagonal afin de centro G y vértices dispuestos como se muestra en la Figura 3.

A continuación trataremos con los planos faciales de $V_1 \dots V_{10}$:

$$\Lambda_1 \cdot (V_1 - G) = \frac{r}{A} (\tau^{-1} A + \tau^{-1} B - C) \cdot (\tau^{-3} A \times B + B \times C + C \times A) \quad \text{por (1.2.1) y (1.3.2)}$$

$$= r \quad \text{por (1.1.2) y (1.3.1)}$$

Análogamente se prueba que los vértices V_5 y V_8 satisfacen (1.3.4) para $k = 1$. Procediendo de este modo y según (1.3.2), se demuestra que las caras (1.3.3) del prismoide están, respectivamente, en los planos dados en (1.3.4). Similarmemente para los planos faciales de sus caras opuestas.

Consideremos ahora el dodecaedro $V_1 \dots V_{10}$ como un sólido macizo cerrado \mathcal{P} , esto es,

$$\mathcal{P} = \text{conv} \{V_1, \dots, V_{10}\}$$

la envolvente convexa de sus vértices (Rockafellar, 1972, p. 158 Teorema 17.2; p.12 Corolario 2.3.1). Siendo cada X en \mathcal{P} una combinación convexa de la forma

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^{10} \lambda_j V_j = \sum_{j=1}^5 \lambda_j V_j + \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} V_{j+5} \\ &= \sum_{j=1}^5 \lambda_j V_j + \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} (2G - V_j) && \text{Por (1.3.2),} \\ &= \sum_{j=1}^5 \lambda_j \{ (V_j - G) + G \} - \sum_{j=1}^5 \lambda_{j+5} \{ (V_j - G) - G \} && \text{última ecuación} \\ &= G + \sum_{j=1}^5 (\lambda_j - \lambda_{j+5}) (V_j - G) \end{aligned}$$

donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{10} = 1 \quad \text{y cada } \lambda_j \geq 0$$

Se desprende

$$(1.3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (X-G) \cdot A_k = r \left\{ \left(-\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| \right. \right. \\ \left. \left. - \tau^{-4} |k-5| \right) (\lambda_1 - \lambda_6) + \left(-2\tau^{-2}k - 3\tau + 10 + \tau^{-4} |k-2| \right. \right. \\ \left. \left. - \tau^{-2} |k-3| - |k-5| \right) (\lambda_2 - \lambda_7) + \left(-k + 5 + \tau^{-2} |k-2| \right. \right. \\ \left. \left. - \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| - \sqrt{5}\tau^{-1} |k-5| \right) (\lambda_3 - \lambda_8) \right. \\ \left. + \left(-2\tau^{-2}k + 15 - 8\tau + \tau^{-2} |k-2| + \tau^{-2} |k-4| \right. \right. \\ \left. \left. - 2\tau^{-2} |k-5| \right) (\lambda_4 - \lambda_9) + \left(-\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4} |k-2| \right. \right. \\ \left. \left. \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-2} |k-4| \right) (\lambda_5 - \lambda_{10}) \right\} \\ \text{para todo } k=1, \dots, 6, \end{array} \right.$$

relaciones en las cuales

$$\begin{aligned} & \left| -\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| - \tau^{-4} |k-5| \right| \leq 1, \\ & \left| -2\tau^{-2}k - 3\tau + 10 + \tau^{-4} |k-2| - \tau^{-2} |k-3| - |k-5| \right| \leq 1, \\ & \left| -k + 5 + \tau^{-2} |k-2| - \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| - \sqrt{5}\tau^{-1} |k-5| \right| \leq 1, \\ & \left| -2\tau^{-2}k + 15 - 8\tau + \tau^{-2} |k-2| + \tau^{-2} |k-4| - 2\tau^{-2} |k-5| \right| \leq 1, \\ & \left| -\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4} |k-2| - \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-2} |k-4| \right| \leq 1, \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, 6$, y por ende, de acuerdo a la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} & |(X-G) \cdot A_k| \leq r \left\{ \left| -\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| - \tau^{-4} |k-5| \right| |\lambda_1 - \lambda_6| \right. \\ & + \left| -2\tau^{-2}k - 3\tau + 10 + \tau^{-4} |k-2| - \tau^{-2} |k-3| - |k-5| \right| |\lambda_2 - \lambda_7| \\ & + \left| -k + 5 + \tau^{-2} |k-2| - \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| - \sqrt{5}\tau^{-1} |k-5| \right| |\lambda_3 - \lambda_8| \\ & + \left| -2\tau^{-2}k + 15 - 8\tau + \tau^{-2} |k-2| + \tau^{-2} |k-4| - 2\tau^{-2} |k-5| \right| |\lambda_4 - \lambda_9| \\ & \left. + \left| -\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4} |k-2| - \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-2} |k-4| \right| |\lambda_5 - \lambda_{10}| \right\} \\ & \leq r \left(|\lambda_1 - \lambda_6| + |\lambda_2 - \lambda_7| + |\lambda_3 - \lambda_8| + |\lambda_4 - \lambda_9| + |\lambda_5 - \lambda_{10}| \right) \\ & \leq r \left(\lambda_1 + \lambda_6 + \lambda_2 + \lambda_7 + \lambda_3 + \lambda_8 + \lambda_4 + \lambda_9 + \lambda_5 + \lambda_{10} \right) = r, \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, 6$, y por esto según (1.2.2), $\varphi(X - G) \leq r$, es decir $\mathcal{P} \subseteq S_r[G]$ la esfera cerrada de centro G y radio r respecto a la norma φ .

Por ser $\varphi(X - G)$ una función real convexa, propia y cerrada, para todo $X \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$F_r(S_r[G]) = \{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(X - G) = r \}$$

(Rockafellar, 1972, p. 59; Corolario 7.6.1)

Si $X \in \text{conv} \{V_1, V_5, V_8\} \subseteq \mathcal{P}$ existen $\lambda_1, \lambda_5, \lambda_8$ no negativos, $\lambda_1 + \lambda_5 + \lambda_8 = 1$, tales que

$$X = \lambda_1 V_1 + \lambda_5 V_5 + \lambda_8 V_8 + \sum_{j \in \{1, \dots, 10\} \setminus \{1, 5, 8\}} 0 V_j$$

reduciéndose las expresiones en (1.3.6) a

$$\begin{aligned} (X - G) \cdot A_k = r & \left\{ (-\tau^{-2}k + 6\tau^{-2} - \tau^{-2} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| - \tau^{-4} |k-5|) \lambda_1 \right. \\ & - \left(-k + 5 + \tau^{-2} |k-2| - \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-4} |k-4| - \sqrt{5} \tau^{-1} |k-5| \right) \lambda_8 \\ & \left. + \left(-\tau^{-2}k + \tau^{-2} + \tau^{-4} |k-2| - \tau^{-4} |k-3| + \tau^{-2} |k-4| \right) \lambda_5 \right\} \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, 6$, y en particular $(X - G) \cdot \Lambda_1 = r$, por lo cual según (1.2.2),

$$\varphi(X - G) = r$$

y

$$\text{conv} \{V_1, V_5, V_8\} \subseteq F_r(S_r[G])$$

Así, utilizando (1.3.6) en general se prueba que todas las caras de \mathcal{P} están contenidas en la frontera de $S_r[G]$. Por tanto

$$(1.3.7) \quad \mathcal{P} \subseteq S_r[G] \quad \text{y} \quad F_r(\mathcal{P}) \subseteq F_r(S_r[G])$$

Si $X \in S_r[G] \sim \mathcal{P}$ entonces X es un punto interior de $\mathbb{R}^3 - \mathcal{P}$ por ser \mathcal{P} cerrado, y el segmento $GX \subseteq S_r[G]$ interseca a $F_r(\mathcal{P})$ en un punto P entre G y X (por ser \mathcal{P} un poliedro convexo), esto es, $P \in \text{int}(S_r[G])$ (Rockafe-

llar, 1972, p. 45 Teorema 6.1) y además por (1.3.7) $P \in F_r(S_r[G])$ lo cual es imposible. Así que $S_r[G] \subseteq \mathcal{P}$.

2. REPRESENTACIÓN DE UN PRISMATOIDE PENTAGONAL AFÍN DADO

2.1. Teorema. Sea dado un prismaoide pentagonal afín \mathcal{P} , macizo y cerrado, de vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 3 y centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad i = 1, \dots, 5$$

Si

$$(2.1.1) \quad \nabla = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G)$$

hagamos

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} A = \nabla^{-1} \left\{ \tau^{-3}(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_1 - G) \times (V_3 - G) \right\} \\ B = \nabla^{-1} \left\{ -\tau^{-3}(V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) - \tau^{-3}(V_1 - G) \times (V_3 - G) \right\} \\ C = \nabla^{-1} \left\{ (V_1 - G) \times (V_2 - G) + \tau^{-3}(V_2 - G) \times (V_3 - G) - (V_1 - G) \times (V_3 - G) \right\} \end{cases}$$

Entonces, para dichos vectores, \mathcal{P} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (1.2.1) y (1.2.2).

Demostración. De acuerdo a la Definición 1.1, \mathcal{P} es un poliedro no degenerado y por tanto el determinante ∇ en (2.1.1) es no nulo. Además, teniendo en mente (2.1.2) hallamos

$$\Delta = \det(A, B, C) = -4\tau^{-5}\nabla^{-1} \neq 0$$

En otras palabras, los vectores A, B, C definidos en (2.1.2) satisfacen las hipótesis del Teorema 1.3 bajo los cuales consideramos la norma φ sobre \mathbb{R}^3 introducida en (1.2.1) y (1.2.2). Por tanto, su esfera cerrada unitaria $S_1[G]$ es un prismaoide pentagonal afín de centro G , de tal manera que remitiéndonos a las expresiones en (1.3.2) (después de cuidadosos cálculos vectoriales) se demuestra que V_1, V_2 y V_3 son también vértices de $S_1[G]$.

Ahora bien, dado que \mathcal{P} es la imagen automorfa afín de un prismoide pentagonal, entonces sus vértices (y los de $S_1[G]$, según se estableció en la demostración del Teorema 1.3) son combinaciones lineales promedio de G , V_1 , V_2 y V_3 como las indicadas en (1.1.3). Se dimana que los vértices de $S_1[G]$ son, justamente, V_1, \dots, V_{10} , es decir, $S_1[G] = \mathcal{P}$.

2.2. Ilustración. Consideremos el prismoide pentagonal de centro el origen 0 y arista 2, de vértices

$$\begin{array}{lll} V'_1 = (0, \tau, 1) & V'_2 = (0, \tau, -1) & V'_3 = (1, 0, -\tau) \\ V'_4 = (\tau, -1, 0) & V'_5 = (1, 0, \tau) & V'_{i+5} = -V'_i \end{array}$$

$i = 1, \dots, 5$, dispuestos como en la Figura 1, obtenido del icosaedro regular de Edmund Hess (1.843-1.903) al suprimir dos pirámides pentagonales opuestas de ápices $\pm (\tau, 1, 0)$ (Coxeter, 1973, p. 52). Entonces, aludiendo al Teorema 2.1 hallamos

$$\begin{array}{ll} \nabla = -2\tau, & V'_1 \times V'_2 = (-2\tau, 0, 0), \\ V'_2 \times V'_3 = (-\tau^2, -1, -\tau), & V'_1 \times V'_3 = (-\tau^2, 1, -\tau) \end{array}$$

y las expresiones en (2.1.2) se reducen a

$$A = \tau^{-3}(1, \tau^2, 0), \quad B = \tau^{-2}(1, 1, 1), \quad C = \tau^{-2}(1, 1, -1)$$

Por tanto, y de acuerdo a la norma φ en (1.2.1) y (1.2.2) el prismoide pentagonal como sólido cerrado, tiene la siguiente representación cartesiana,

$$\max \left\{ |x_2 \pm \tau^2 x_3|, \tau |x_1 - x_2 \pm x_3|, |x_1 - \tau^2 x_2|, \tau^2 |\tau x_1 + x_2| \right\} \leq \tau^3$$

condición necesaria y suficiente para que un punto (x_1, x_2, x_3) en \mathbb{R}^3 esté en el sólido. La igualdad sólo ocurre en la frontera del poliedro.

3. REPRESENTACIÓN DEL PRISMOIDE PENTAGONAL

Dado que el prismoide pentagonal se obtiene del icosaedro regular (ver ilustración 2.2), y observando así que los diez centroides de las caras triangulares del prismoide forman parte de los veinte vértices de un dodecaedro

regular (inscrito en dicho icosaedro), caracterizamos a continuación los puntos del sólido.

3.1 Corolario. Sea \mathcal{P} un prismaoide pentagonal dado, macizo y cerrado de centro G y arista a . Si C_1, \dots, C_5 son los centros de cinco caras triangulares no opuestas de \mathcal{P} , y C_6 el centro de una cara pentagonal, entonces

(i) La inecuación de \mathcal{P} es

$$(3.1.1) \quad \max \left\{ |(C_1 - G) \cdot (X - G)|, \dots, |(C_5 - G) \cdot (X - G)| \frac{\sqrt{5}\tau^3}{3} \mid |(C_6 - G) \cdot (X - G)| \right\} \leq \frac{a^2 \tau^4}{12}$$

donde la igualdad sólo ocurre en la frontera del poliedro

(ii) Sea S el conjunto de los veinte vértices del dodecaedro regular de centro G , diez de los cuales son los puntos $C_k, 2G - C_k, k = 1, \dots, 5$. Si \mathcal{L}_6 es el eje de simetría del dodecaedro a través de los centros de las caras pentagonales de vértices los puntos del conjunto $S \sim \{C_1, \dots, C_5, 2G - C_1, \dots, 2G - C_5\}$ (esto es, \mathcal{L}_6 es la recta que pasa por G y C_6), y \mathcal{L}_k es la recta que contiene la diagonal del dodecaedro que une a C_k y $2G - C_k, k = 1, \dots, 5$, entonces

$$(3.1.2) \quad \mathcal{P} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \max \left\{ \frac{5^{1/4}}{3^{1/2}} \tau^{3/2} \text{ (Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_6), \right. \right. \\ \left. \left. \max_{1 \leq k \leq 5} \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_k \right\} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} a \tau^2 \right\}$$

(ver Figura 4)

Demostración. De acuerdo al Teorema 2.1, \mathcal{P} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma φ sobre \mathbb{R}^3 representada en (1.2.1) y (1.2.2), bajo las condiciones en (2.1.2), donde V_1, \dots, V_{10} son los vértices de \mathcal{P} dispuestos como en la Figura 3.

Si C_1, \dots, C_6 son los centros de las caras de \mathcal{P} listadas en (1.3.3), respectivamente, y dado que \mathcal{P} se obtiene de un icosaedro regular \mathcal{P}_0 (Ver ilustración 2.2), entonces $C_1 - G, \dots, C_6 - G$ son vectores normales a estas caras, respectivamente (la insfera del icosaedro regular es tangente a cada cara (en este caso a las diez caras triangulares del prismaoide) en su centro).

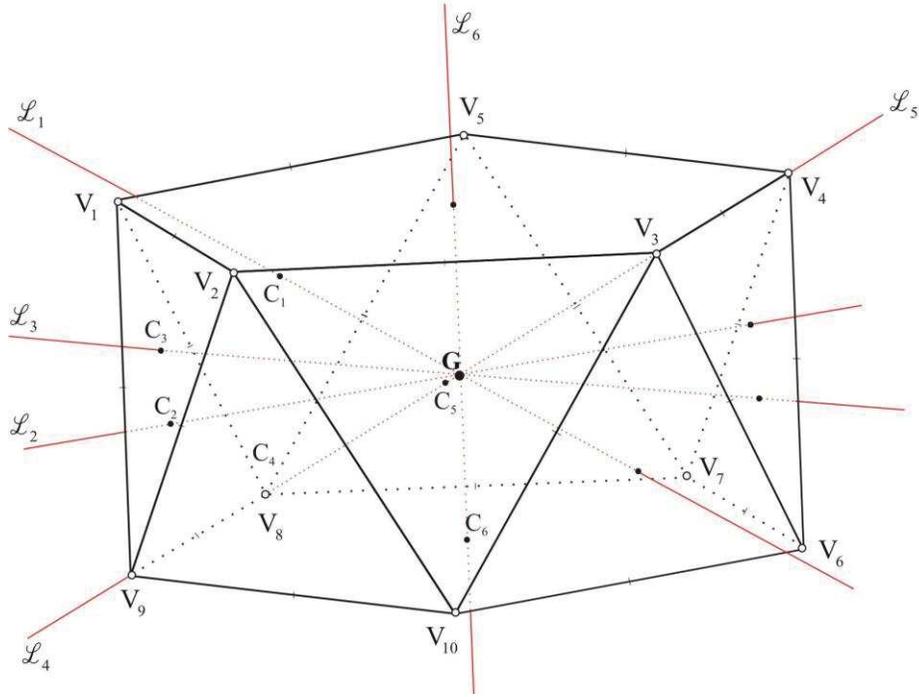


Figura 4. Si \mathcal{P} es un prismoide pentagonal, macizo y cerrado de arista a , vértices $V_1 \dots$

V_{10} y centro $G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5})$, $i=1, \dots, 5$, entonces $\mathcal{P} = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \max \left\{ \frac{5^{1/4}}{3^{3/2}} \tau^{3/2} \right. \right.$

$\left. \left. \begin{array}{l} \text{(Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_6), \max_{1 \leq k \leq 5} \text{ Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_k \end{array} \right\} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} a \tau^2 \right\}$,

donde C_1, \dots, C_5 son los centros de cinco cara triangulares no opuestas y paralelas, y C_6 el centro de una cara pentagonal

De acuerdo a la última parte del Teorema 1.3 y a las relaciones en (1.3.4) con $r=1$, existen escalares t_k tales que

$$(3.1.3) \quad A_k = t_k(C_k - G) \quad \text{y} \quad (-1)^{i_k} t_k(C_k - G) \cdot (V_{j_k} - G) = 1$$

$k = 1, \dots, 6$, donde

$$i_1 = i_3 = j_3 = 2, \quad i_2 = i_4 = i_5 = i_6 = j_1 = 1, \quad j_2 = 3,$$

$$j_4 = 4, \quad j_5 = j_6 = 5$$

teniendo en mente que $V_{i+5} = 2G - V_i$, $i = 1, \dots, 5$, como se consigna en (1.3.2). De este modo,

$$(3.1.4) \quad \begin{aligned} \text{Inradio de } \mathcal{P}_0 &= \text{La distancia de } G \text{ a los planos de las caras triangulares de } \mathcal{P} \\ &= \|C_K - G\| = \frac{3^{-1/2}}{2} a \tau^2 \end{aligned}$$

y

$$(3.1.5) \quad \text{Circunradio de } \mathcal{P}_0 = \|V_k - G\| = \frac{5^{1/4}}{2} a \tau^{1/2}$$

para todo $k = 1, \dots, 5$ (Coxeter, 1973, pp. 292 - 293, Tabla I), por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{3^{-1/2}}{2} a \tau^2 &= \frac{|A_k \cdot (V_{j_k} - G)|}{\|A_k\|} \\ &= \frac{|(-1)^{i_k} t_k (C_k - G) \cdot (V_{j_k} - G)|}{\|(-1)^{i_k} t_k (C_k - G)\|} && \text{Por (3.1.3)} \\ &= \frac{1}{|t_k| \|C_k - G\|} = \frac{2\sqrt{3}}{a \tau^2 |t_k|} \end{aligned}$$

y por ende

$$|t_k| = \frac{12}{a^2 \tau^4} \quad k = 1, \dots, 5$$

Además, teniendo presente que el circunradio del pentágono regular $V_1 \dots V_5$ (de lado a) es

$$(3.1.6) \quad \|V_k - C_6\| = 5^{-1/4} a \tau^{1/2} \quad k = 1, \dots, 5$$

entonces

$$\begin{aligned} \text{La distancia de } G \text{ al plano de una cara pentagonal de } \mathcal{P} &= \|C_6 - G\| \\ &= \frac{|A_6 \cdot (V_{j_6} - G)|}{\|A_6\|} = \frac{|(-1)^{i_6} t_6 (C_6 - G) \cdot (V_{j_6} - G)|}{\|(-1)^{i_6} t_6 (C_6 - G)\|} && \text{Por (3.1.3)} \\ &= \frac{1}{|t_6| \|C_6 - G\|} \end{aligned}$$

o bien, de acuerdo al Teorema de Pitágoras ($V_k C_6 G$ es un triángulo rectángulo, recto en C_6 , para todo $k = 1, \dots, 5$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{|t_6|} &= \|C_6 - G\|^2 = \|V_k - G\|^2 - \|V_k - C_6\|^2 \\ &= \frac{a^2 \sqrt{5} \tau}{20} \end{aligned} \quad \text{Por (3.1.5) y (3.1.6)}$$

y por tanto

$$(3.1.7) \quad |t_6| = \frac{4\sqrt{5}}{a^2 \tau} \quad \text{y} \quad \|C_6 - G\| = \frac{a}{2} 5^{-1/4} \tau^{1/2}$$

reduciéndose $\varphi(X - G) \leq 1$ a la expresión (3.1.1), o bien,

$$(3.1.8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\max \left\{ \|X - G\| \|C_1 - G\| |\cos \theta_1|, \dots, \right. \\ &\|X - G\| \|C_5 - G\| |\cos \theta_5| \\ &\left. \frac{\sqrt{5}\tau^3}{3} \|X - G\| \|C_6 - G\| |\cos \theta_6| \right\} \leq \frac{a^2 \tau^4}{12} \end{aligned} \right.$$

donde θ_k es el ángulo entre los vectores $X - G \neq \mathbf{0}$ y $C_k - G$, $k = 1, \dots, 6$. Ahora, teniendo presente (3.1.4) y (3.1.7), y percibiendo que

$$\left\{ \begin{aligned} &|X - G| |\cos \theta_k| = \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } \mathcal{L}_k, \\ &\text{para todo } k = 1, \dots, 6. \end{aligned} \right.$$

Entonces la relación (3.1.8) es equivalente a la condición que define al poliedro \mathcal{P} en (3.1.2).

3.2. Corolario. Sea \mathcal{P} un prismoide pentagonal, macizo y cerrado, de arista a y vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 3, y centro

$$G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad k = 1, \dots, 5$$

Hagamos

$$(3.2.1) \quad \begin{cases} A = b \left\{ \tau (V_1 - G) + (V_3 - G) \right\} \\ B = b \left\{ \tau^2 (V_1 - G) - \tau V_2 + \tau V_3 \right\} \\ C = b \left\{ (V_1 - G) + \tau (V_3 - G) \right\} \end{cases}$$

Entonces A, B, C son linealmente independientes en \mathbb{R}^3 , para los cuales obtenemos en (1.2.1)

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} A_1 = b \left\{ \tau (V_1 - G) - (V_2 - G) \right\} \\ A_2 = b \left\{ (V_2 - G) - \tau (V_3 - G) \right\} \\ A_3 = b \left\{ \tau (V_2 - G) - (V_3 - G) \right\} \\ A_4 = b \left\{ -\tau (V_1 - G) + \tau^2 (V_2 - G) - \tau (V_3 - G) \right\} \\ A_5 = b \left\{ -(V_1 - G) + \tau (V_2 - G) \right\} \\ A_6 = b \left\{ -\tau^3 (V_1 - G) + \tau^2 (V_2 - G) - \tau^3 (V_3 - G) \right\} \end{cases}$$

vectores que a su vez definen la norma φ sobre \mathbb{R}^3 en (1.2.2), respecto a la cual, \mathcal{P} es la esfera cerrada unitaria de centro G, donde $b = 4a^{-2} \tau^{-3}$.

Demostración. Si $V'_1 \dots V'_{10}$ es el prismaoide pentagonal de centro 0 de la ilustración 2.2, según se estableció en la demostración del Teorema 1.3, existe un automorfismo afín f de \mathbb{R}^3 tal que $f(V'_i) = V_i$ $i = 1, \dots, 10$ y $f(0) = G$. En este caso $\theta_{ij} = \angle V_i G V_j$ implica $\theta_{ij} = \angle V'_i 0 V'_j$, por lo cual cálculos directos (con los vértices V'_i) nos aportan que en general

$$\cos \theta_{12} = -\cos \theta_{13} = \cos \theta_{23} = -5^{-1/4} \tau^{1/2} \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $V'_1 \times V'_2$ y V'_3 , esto es, entre $(V_1 - G) \times (V_2 - G)$ y $V_3 - G$. Entonces

$$\begin{aligned}
(3.2.3) \quad \nabla &= \det (V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) \\
&= \left\{ (V_1 - G) \times (V_2 - G) \right\} \cdot (V_3 - G) \\
&= \| (V_1 - G) \times (V_2 - G) \| \| V_3 - G \| \cos \theta \\
&= R^2 \sqrt{1 - \cos^2 \theta_{12}} R \cos \theta && \text{(Identidad de Lagrange)} \\
&= -2 \cdot 5^{-3/4} R^3 = -\frac{a^3}{4} \tau && \text{por (3.1.5)}
\end{aligned}$$

donde $R = \| V_k - G \|$, $k = 1, \dots, 5$, es el circunradio de \mathcal{P} . Así, existen escalares s, t y u tales que

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = s(V_1 - G) + t(V_2 - G) + u(V_3 - G)$$

Multiplicando interiormente ambos miembros de esta ecuación, sucesivamente por $V_i - G$, $i = 1, 2, 3$, obtenemos, respectivamente, las siguientes tres ecuaciones simultáneas

$$\begin{cases}
5s + \sqrt{5}t - \sqrt{5}u = 0 \\
\sqrt{5}s + 5t + \sqrt{5}u = 0 \\
\sqrt{5}s - \sqrt{5}t - 5u = \sqrt{5}a
\end{cases}$$

resolviendo el sistema obtenemos

$$s = -t = \frac{\tau}{2} u = -\frac{a}{2} \tau^2$$

es decir,

$$(V_1 - G) \times (V_2 - G) = \frac{a}{2} \tau \left\{ -\tau (V_1 - G) + \tau (V_2 - G) - 2 (V_3 - G) \right\}$$

Procediendo análogamente encontramos

$$(V_2 - G) \times (V_3 - G) = \frac{a}{2} \tau \left\{ -2(V_1 - G) + \tau (V_2 - G) - \tau (V_3 - G) \right\}$$

y

$$(V_1 - G) \times (V_3 - G) = \frac{a}{2} \tau \left\{ -\tau (V_1 - G) + 2(V_2 - G) - \tau (V_3 - G) \right\}$$

sustituyendo estos valores y vectores en (2.1.2) arribamos a (3.2.1), y por ende de acuerdo al Teorema 2.1, \mathcal{P} es la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma ϕ sobre \mathbb{R}^3 representada en (3.2.2) y (1.2.2).

4. ESTEREOMETRÍA DEL POLIEDRO AFÍN

4.1. Teorema. Sea \mathcal{P} un prismoide pentagonal afín, de vértices V_1, \dots, V_{10} dispuestos como en la Figura 3 y centro

$$(4.1.1) \quad G = \frac{1}{2}(V_i + V_{i+5}) \quad k = 1, \dots, 5$$

Hagamos

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} W_1 &= (V_1 - G) \times (V_2 - G) \\ W_2 &= -\tau (V_1 - G) \times (V_3 - G) + \tau (V_2 - G) \times (V_3 - G), \\ W_3 &= -\tau (V_1 - G) \times (V_2 - G) + (V_1 - G) \times (V_3 - G) + (V_2 - G) \times (V_3 - G) \end{aligned}$$

y denotemos por \mathcal{L} a la matriz cuadrada no singular de orden tres cuya i -ésima columna es w_i^T . Entonces

(i) La ecuación del circunelipsoide de \mathcal{P} (el elipsoide donde está inscrito \mathcal{P}) es

$$(4.1.3) \quad (X - G) \mathcal{L} \mathcal{L}^T (X - G)^T = \sqrt{5} \tau \nabla^2$$

donde \mathcal{L}^T (y similares) es la transpuesta de \mathcal{L} y ∇ es el determinante (2.1.1).

(ii) Si f es el automorfismo afín de \mathbb{R}^3 representado por

$$(4.1.4) \quad f(X) = \nabla^{-1} (X - G) \mathcal{L} \quad X \in \mathbb{R}^3$$

entonces $f(\mathcal{P})$ es ¡justamente! el prismoide pentagonal de vértices $f(V_i) = V'_i$, $i = 1, \dots, 10$, de la ilustración 2.2.

(iii) El volumen de \mathcal{P} es $\frac{2}{3} \sqrt{5} \tau^2 |\nabla|$

En particular, si \mathcal{P} es un prismoide pentagonal de arista a , entonces su volumen es $\frac{\sqrt{5}}{6}a^3\tau^3$

Demostración. Dado que

$$\det \mathcal{L} = \det \mathcal{L}^T = \det (W_1, W_2, W_3) = -2\tau \nabla^2 \neq 0$$

entonces \mathcal{L} es no singular y $\mathcal{L}\mathcal{L}^T$ es una matriz simétrica positivamente definida, por lo cual (4.1.3) es, en efecto, la ecuación de un elipsoide de centro G (Strang, 1982, pp. 282 - 285).

Las expresiones

$$\begin{aligned} (X-G) \mathcal{L} \mathcal{L}^T (X-G)^T &= \|(X-G) \mathcal{L}\|^2, \\ (X-G) \mathcal{L} &= ((X-G) \cdot W_1, (X-G) \cdot W_2, (X-G) \cdot W_3) \end{aligned}$$

y las dadas en (4.1.2) pueden utilizarse para probar que los vértices V_1, V_2 y V_3 satisfacen la ecuación (4.1.3). Para verificar que los otros vértices V_4, \dots, V_{10} de \mathcal{P} también la satisfacen, nos remitimos a (1.1.3) y (4.1.1).

Procediendo así también se demuestra, teniendo presente (4.1.4), que $f(V_i) = V'_i, i = 1, \dots, 10$, los vértices del prismoide pentagonal de la ilustración 2.2.

Ahora consideremos en la Figura 1 la pirámide de ápice $G' = 0$ y base el triángulo equilátero $V'_1 V'_2 V'_9$ de centro C_3 , según se acordó en la demostración del Corolario 3.1. Su volumen es, de acuerdo al prismoide pentagonal de la ilustración 2.2, con $G = 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} (\text{área de } V'_1 V'_2 V'_9) \cdot \|C_3 - G'\| \\ &= \frac{\tau^2}{3} \end{aligned} \quad \text{por (3.1.4) con } a = 2$$

Además, el volumen de la pirámide de ápice $G' = 0$ y base el pentágono regular $V'_6 \dots V'_{10}$ de centro C_6 , según se convino en la demostración del Corolario 3.1, es de acuerdo a la ilustración 2.2.

$$\frac{1}{3} \cdot (\text{área de } V'_6 \dots V'_{10}) \cdot \| C_6 - G' \|$$

por (3.1.7) con $a = 2$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \tau^2$$

Por esto el volumen del prismaoide pentagonal $V'_1 \dots V'_{10}$ es

$$10 \cdot \frac{\tau^2}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \tau^2 = \frac{2}{3} (5 + \sqrt{5}) \tau^2$$

y por ende

$$\frac{2}{3} (5 + \sqrt{5}) \tau^2 = v | \det (\nabla^{-1} \mathcal{K}) | = 2 v \tau | \nabla |^{-1}$$

donde v es el volumen de \mathcal{P} (Birkhoff y MacLane, 1965, p. 243; Corolario). En particular $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}_3$ un prismaoide pentagonal de arista a , entonces, según (3.2.3), $\nabla = -\frac{a}{4} \tau$.

REFERENCIAS

- Birkhoff, G. y MacLane, S. (1965). *A brief survey of modern algebra*. (Segunda edición.) New York, USA: The Macmillan Company.
- Birkhoff, G. y MacLane, S. (1970). *Algebra*. (Cuarta reimpresión.) Londres, Gran Bretaña: The Macmillan Company.
- Coxeter, H.S.M. (1973). *Regular polytopes*. (Tercera edición.) New York, USA: Dover Publications.
- Coxeter, H.S.M. (1989). *Introduction to geometry*. (Segunda edición.) New York, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Fuentes, A. (1991). Desarrollo en fracción continua simple infinita de las potencias enteras del número de oro. *Educación Matemática*, 3(1), 19-38.
- Rockafellar, R.T. (1972). *Convex analysis*. New Jersey, USA: Princeton University Press.
- Strang, G. (1982). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Bogotá, Colombia: Fondo Educativo Interamericano S.A.