LOS NIVELES DE VAN HIELE, EJEMPLO EN UN MODELO DE GEOMETRÍA EUCLÍDEA DONDE LAS RECTAS SON REDONDAS

Jhonathan Cuevas, Jonathan Gamba, Sandra Macana y John Puentes
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Jhonathan_2589@hotmail.com, Jogago_5@hotmail.com, Lavacana902@hotmail.com, John27_puma@hotmail.com

Se presentan algunos resultados del trabajo realizado por estudiantes del curso *Didáctica de la Geometría*, en el que se estudió la relación de las representaciones de algunos axiomas en un modelo diferente al euclídeo, donde cualquier recta debe pasar por un punto afín, con los niveles de razonamiento presentados por van Hiele y las habilidades propuestas por Hoffer para estos niveles.

REFERENTES TEÓRICOS

En 1957, los profesores holandeses de matemáticas Pierre, M. van Hiele y Dina van Hiele-Geldof presentaron en sus tesis doctorales, respectivamente, un modelo de enseñanza aprendizaje de la geometría (van Hiele, 1957 citado por Jaime, 1993) y un ejemplo concreto de la aplicación de ese modelo en unos cursos de geometría (Van Hiele-Geldof, 1957 citado por Jaime, 1993)

El modelo de van Hiele está dividido en dos partes: los niveles de razonamiento geométrico (aspecto descriptivo) y las fases de aprendizaje (aspecto instructivo). La descripción hecha por Wirszup (1957, citado en Jaime, 1993) de los niveles de razonamiento propuestos por van Hiele muestra que son cinco –aunque en un principio eran tres– y presenta un modo de estructurar el aprendizaje de la geometría de manera jerárquica –secuencial y ordenada. Estos niveles son:

Primer nivel: Visualización o reconocimiento

Los objetos sobre los cuales se razona en el nivel 0 son formas y se idean según su apariencia. Los estudiantes reconocen las figuras y las nombran basándose en las características visuales que tienen. Los estudiantes que razonan según este nivel no piensan explícitamente sobre las propiedades de las figuras. Lo que define una forma es su apariencia, lo cual hace que sea un factor dominante en este nivel.

Cuevas, J., Gamba, J., Macana, S. y Puentes, J. (2011). Los niveles de van Hiele, ejemplo en un modelo de geometría euclídea donde las rectas son redondas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 437-440). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Segundo nivel: Análisis

En este nivel se analiza el conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas. Estas propiedades van siendo comprendidas a través de la observación realizada durante trabajos prácticos como medición, dibujo, construcción de modelos, etc.

Tercer nivel: ordenamiento y clasificación

Las relaciones y definiciones empiezan a ser claras, pero sólo con ayuda y guía. Los estudiantes pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y son capaces de dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones; comienzan a establecerse las redes lógicas a través de la experimentación y el razonamiento.

Cuarto nivel: Razonamiento deductivo

En este nivel los estudiantes son capaces de observar y analizar algo más que las propiedades de las formas, además, se comprenden los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende completamente el significado de las demostraciones, pero aceptan la posibilidad de llegar a un mismo resultado por medio de diferentes formas de demostración, ya sea por el método directo, indirecto, inducción o por medio de un contraejemplo

Quinto nivel: Rigor

En este nivel el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Axiomas de Hilbert y los niveles de van Hiele en rectas redondas

A continuación se presenta como ejemplo el análisis de un axioma de Hilbert interpretado en el modelo de las rectas redondas. Se señalan los niveles de van Hiele y las habilidades propuestas por Hoffer: habilidades visuales, habilidades verbales, habilidades para dibujar, habilidades lógicas y habilidades de aplicación.

> **Axioma:** Un triángulo queda definido por tres segmentos de la forma AB, BC y CA. Dichos segmentos son los lados del triángulo, y los tres puntos A, B y C son sus vértices. El triángulo divide el plano definido por sus tres vértices en interior y exterior, con las mismas propiedades que en el caso de los ángulos. Al ángulo definido por los dos semirrayos que salen de A y pasan por B y C respectivamente se le denota por $\measuredangle BAC$, y su interior contiene todos los puntos del interior del triángulo ABC.

En el nuevo modelo, la representación del punto es el mismo que en la geometría euclidiana. Ahora, la recta se define como las circunferencias que pasan por un punto afín X; en este contexto un segmento sería un arco definido por dos puntos A y B sobre la recta. En la figura se muestran las representaciones realizadas por los autores del presente trabajo; una de ellas es la representación de un segmento en el modelo euclídeo y para elaborarla fue necesario pasar por el nivel 1 de van Hiele, así como también se pusieron en juego las habilidades visuales para dibujar y las lógicas.

Figura 1. Representación de un segmento AB en una recta euclídea y en una recta redonda

A partir de la representación de la Figura 1 se construyó la representación del axioma 3, nivel 3 de van Hiele (Figura 2).

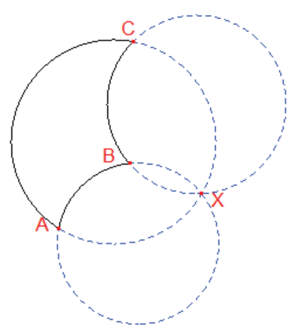

Figura 2. Representación de un triángulo ABC en el modelo de rectas redondas

Conclusiones

A partir de este trabajo se concluye que al realizar las representaciones en un modelo euclídeo donde cualquier recta debe pasar por un punto afín, se adaptan características de los niveles de van Hiele, realizando una transición que empieza en el primer nivel y llega hasta el cuarto. Además se desarrollan más las habilidades de visualizar, dibujo y lógica presentadas por Hoffer para los niveles de van Hiele.

Referencias

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*. Tesis doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, Valencia, España.