POLITOPOS: UNA PRIMERA APROXIMACIÓN

Edward Latorre
Universidad Nacional de Colombia
edword183@hotmail.com

Los politopos son generalizaciones de un polígono o un poliedro a cualquier otra dimensión. Entre ellos se destacan los politopos convexos, los cuales están constituidos de forma iterativa, es decir mediante politopos de dimensiones menores; por ser convexos satisfacen la Fórmula de Euler-Poincaré, que describe propiedades topológicas sobre cada una de sus celdas (caras en cualquier dimensión). Como caso especial se presentan los politopos regulares: se exhiben los "triviales" para cualquier dimensión y se describen casos particulares para las dimensiones 3 y 4. Finalmente se hace mención de la posibilidad de representación de cualquier politopo regular mediante un *polígono Petrie*.

POLITOPOS CONVEXOS

Como *politopo convexo* definiremos a la envolvente convexa de algún subconjunto finito de un espacio afín de dimensión n. En bajas dimensiones tenemos: un punto (0-dim.), un intervalo (1-dim.), un polígono (a-dim.), etc.

Politopos regulares

Un politopo **P** (n-dim.) se dice *regular* si sus celdas son regulares, todas iguales y existe una figura de vértice en cada vértice (politopo (n-1)-dim.) iguales también. Gracias al geómetra suizo Ludwig Schläfli (1860), tenemos una simbología especial para cualquier politopo regular **P** (n-dim.), mediante un vector dirigido conocido como símbolo de Schläfli: (p, q,…, v), donde cada componente es un número entero mayor o igual a 3, el cual es único salvo una isometría o una homotecia. El símbolo de Schläfli de un n-gono es (n); su grupo simétrico es el grupo Dihedral **D** (n-dim).

En cada dimensión $n > 2$ existen tres politopos regulares "triviales" clasificados gracias a Schläfli, a saber: El *n-simplex estándar* cuyo símbolo de Schläfli es (3,…, 3) = (3($n-1$ veces)) auto dual, su grupo simétrico **S** asociado es el $n+1$; El *n-cubo* o *politopo de medida* generado por [-1,1] (n-dim.), con símbolo de Schläfli (4, 3,…, 3) = (4, 3($n-1$ veces)) ; el *n-octaedro* o *politopo cruz* con símbolo de Schläfli (3,…, 3, 4) = (3($n-2$ veces), 4), sobre los últi-

Latorre, E. (2011). Politopos: una primera aproximación. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 461-462). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

mos dos anotamos que uno es el dual del otro pues sus símbolos correspondientes son uno el inverso del otro, y como consecuencia comparten el mismo grupo simétrico: el grupo Octaedral **G** (*n*-dim.). En general, el símbolo de Schläfli de cualquier politopo regular permite describir una matriz simétrica (matriz de Coxeter) que determina un grupo de Coxeter finito con lo cual la clasificación de dichos politopos se centra en el estudio de estos grupos: generalizaciones de los grupos simétricos.

En particular para el caso 3-dim. existen otros dos politopos regulares además del *tetraedro*, el *cubo* y el *octaedro*: el *dodecaedro* y su dual el *icosaedro*. Sus símbolos de Schläfli respectivos son (5,3), (3,5). Para el caso 4-dim. existen otros tres politopos no triviales: el *24-celda* (3, 4, 3) auto dual; el *120-celda* (5, 3, 3) y su dual el *600-celda* (3, 3, 5). Todos los politopos regulares tienen, mediante proyección ortogonal, su representación en el plano conocida como *polígono de Petrie* que para los "triviales" permite la visualización de todos sus vértices. Como aporte estético e informativo presento los *polígonos de Petrie* del *120-celda* y el *600-celda*: