

ACTIVIDADES COGNITIVAS ASOCIADAS A LAS REPRESENTACIONES EXTERNAS EN LA ENSEÑANZA DE LOS POLINOMIOS

Franklin J. Colina - Yaneth Ríos - Larry J. Mendoza
Universidad del Zulia - Universidad Nacional Experimental Politécnica
colina 2828@hotmail.com - yanriosgarcia@gmail.com - prodimat@gmail.com
Enseñanza de la Matemática. Nivel: Educación Secundaria.

En la educación de hoy en día se han dado grandes pasos, esto quizás debido a los cambios de todo tipo de índole, social, político, económico entre otros. La educación de forma general debe estar llena de ciertos requisitos exigidos y emanados por las autoridades educativas quienes son las encargadas de la estructuración del sistema educativo y del currículo.

El diseño de programas instruccionales forma parte de esa estructuración, y esta es uno de los requisitos que dicho sistema exige a los docentes y que pertenecen a lo que llamamos instrumentos didácticos de enseñanza, los cuales son utilizados por los docentes para realizar de forma amena una evaluación durante el proceso de enseñanza-aprendizaje a las competencias de cada uno de los estudiantes.

El propósito de este trabajo es presentar una propuesta didáctica basada en las actividades cognitivas asociadas a las representaciones externas que facilite el proceso de enseñanza-aprendizaje de los polinomios, en segundo año de bachillerato del Sistema Educativo Venezolano. Con esta unidad se desea que los docentes de Matemáticas cuenten con una herramienta que cumpla con las condiciones del sistema educativo y sobre todo que permita el aprendizaje de los estudiantes de forma dinámica y sencilla.

Esta unidad se fundamenta con teorías basadas en el esquema particular del currículo y para ello se toman en cuenta la teoría de las Representaciones Externas como Organizador Didáctico de Segovia y Rico, y los aportes que hacen sobre éstas, Duval y Gómez en referencia a las operaciones cognitivas tales como la creación, transformación y conversión de representaciones. Con dicha unidad se pretende completar dicha planificación la cual permitirá al docente y al estudiante facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje de los polinomios.

Además de lo antes mencionado se desea hacerle ver al docente y al mismo estudiante la vinculación que existe entre las Matemáticas y las aplicaciones del día a día de los mismos, es decir, establecer o proporcionar a los estudiantes de una cultura Matemática que les ayude a resolver situaciones reales, lo cual les permitirá desarrollar un pensamiento lógico Matemático.

Los Organizadores Didácticos.

En los libros de texto y en la propia práctica docente puede apreciarse que la organización de una unidad didáctica no se reduce a una secuenciación de conceptos y procedimientos sino que incorpora otras informaciones, que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático y lo enriquecen.

Denominamos Organizadores del Currículo, o simplemente Organizadores, a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para

articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Los organizadores son aquellos conocimientos que sostienen los significados contemplados para las matemáticas escolares (Segovia y Rico, 2.001).

Entre los organizadores relevantes se encuentra la fenomenología didáctica, cuyo objeto de estudio son los fenómenos de los que han surgido los conceptos como formas de organización, así como las aplicaciones prácticas de los conocimientos; los sistemas de representación de los conceptos y procedimientos, establecidos mediante convenios o por propia decantación de carácter práctico a lo largo de la historia de la matemática; los modelos matemáticos y los procesos de modelización usuales, mediante los cuales se asigna una estructura matemática a una familia de fenómenos que quedan representados mediante un sistema; los materiales y recursos que puedan emplearse en la enseñanza para manipular y experimentar; los errores, dificultades y obstáculos asociados a conceptos y procedimientos de cada unidad, que se han detectado en el aprendizaje y que se han puesto de manifiesto en estudios e investigaciones de psicología matemática; la historia de las matemáticas que nos muestra los momentos de interés relacionados con cada uno de los tópicos del currículo de las matemáticas escolares, también los estudios sobre resolución de problemas constituyen un conocimiento organizador relevante del currículo de matemáticas.

Todos estos conocimientos proporcionan una información que permite dar una nueva perspectiva a las componentes del currículo: Objetivos, Contenidos, Metodología y Evaluación y a las relaciones entre ellos. No cabe duda que, dependiendo de los casos, se hará más conveniente una mayor insistencia en unos organizadores que en otros, e incluso será conveniente la incorporación de algunos nuevos, lo cual constituye un elemento diferenciador.

Sistemas de representación (Las Representaciones Externas)

Los sistemas de representación o las representaciones externas constituyen un aspecto fundamental en la enseñanza, pues para pensar y razonar matemáticamente es necesario tener una representación en la mente (interna), la cual constituye una internalización de la representación externa.

Igualmente, las representaciones externas constituyen el medio para exteriorizar las representaciones internas. Estas representan el sistema de signos por medio del cual se designa un concepto matemático.

Así pues que para lograr los procesos del pensamiento y aumentar la capacidad cognitiva es adecuado que se logre una variedad de representaciones externas del mismo concepto. Eso lo sugiere Romero (2000) pues las representaciones se complementan y muestran diversos aspectos de un mismo concepto con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros (Blázquez y Ortega, 2001).

Definimos entonces las representaciones externas de la siguiente manera: Son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes.

El conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura Matemática han de responder a su carácter sistémico, por lo que

hablamos en general de sistemas de representación en vez de representación simplemente. Un sistema de representación lo constituyen los símbolos y gráficos mediante los que se expresan los diferentes conceptos y procedimientos matemáticos.

Los sistemas de representación constituyen un aspecto fundamental de la enseñanza en cuanto que el conocimiento se produce mediante el procesamiento de la información visual y su integración con procedimientos analíticos.

Las diferentes representaciones para los conceptos y procedimientos matemáticos se presentan explícitamente así como las conexiones entre ellas pero raras veces se insiste en que expresan diversas facetas y propiedades de un mismo concepto.

Hay que destacar que la tarea de enseñar y aprender las representaciones convencionales no es sencilla, por el hecho de que la relación entre el sistema de representación y la estructura matemática correspondiente es bastante más compleja de lo que parece tampoco son sencillas las traducciones entre diferentes sistemas de representación.

Gómez (2.007) se refiere a los sistemas de representación como a los signos por medio de los cuales se designa un concepto, la importancia de los sistemas de representación en el análisis del contenido que radica en que:

- ✓ Los sistemas de representación organizan los símbolos mediante los que se hace presentes los conceptos matemáticos.
- ✓ Los distintos sistemas de representación aportan distintos significados para concepto.
- ✓ Un mismo concepto admite y necesita de varios sistemas de representación complementarios.

Gómez además de establecer que dado un mismo concepto o estructura Matemática se puede representar en diferentes sistemas de representación, y que es posible agrupar y caracterizar en cuatro categorías, las operaciones que se pueden realizar sobre los signos que pertenecen a esos sistemas de representación, los cuales nombra de la siguiente manera:

1.-) Creación y representación de signos o expresiones.

Esta operación permite determinar expresiones validas e invalidas, por ejemplo la expresión $F(x) = 3X^2 + 4$ es un ejemplo de una expresión invalida en el sistema de representación simbólico (algebraico) de las funciones polinómicas.

2.-) Transformación sintáctica invariante.

Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, sin que el objeto matemático designado cambie. Por ejemplo podemos observar que en el siguiente ejemplo la función polinómica aunque es presentada de diferentes formas no cambia el objeto.

$$\begin{array}{ccc}
 F(x) = X^2 - 8X + 12 & \xrightarrow{\text{(Factorización)}} & F(x) = (X - 2)(X - 6) \\
 & \xleftarrow{\text{(Expansión)}} & \\
 & \downarrow & \\
 & \text{(Completación de cuadrados)} &
 \end{array}$$

$$F(x) = (X - 4)^2 - 4$$

3.-) Transformación sintáctica variante.

Esta operación se refiere a la transformación de un signo en otro, dentro de un mismo sistema de representación, en el que el objeto matemático designado cambia. Por ejemplo la traslación horizontal y vertical de una parábola (Función Cuadrática)

4.-) Traducción entre sistemas de representaciones.

Esta operación se refiere al procedimiento en virtud del cual se establece la relación entre dos signos de un mismo objeto pero que pertenece a diferentes sistemas de representación. Por ejemplo una función algebraica cuadrática y el gráfico de la misma en el plano cartesiano.

En este trabajo se pretende establecer o aplicar todas y cada una de las representaciones mencionadas a los polinomios.

Los polinomios son uno de los conceptos más abstractos que deben aprender nuestros jóvenes en aula. Quizás su alto nivel de abstracción se deba a que los docentes no tenemos conocimientos previos que nos sirvan de soporte para la enseñanza de estos. Por tal motivo, pensamos que utilizando los diversos sistemas de representación externas, utilizados en niveles inferiores podemos facilitar la enseñanza y el aprendizaje de los polinomios. La Geometría, por su carácter gráfico, nos ofrece una herramienta que puede ser utilizada para interpretar, a través del concepto de área, algunos productos notables.

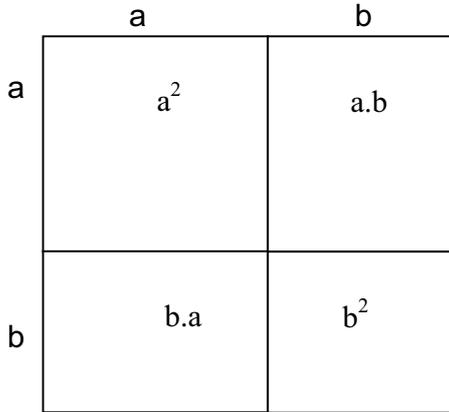
Pensamos que para trabajar algunas igualdades algebraicas, relacionadas a los productos notables, podemos usar diferentes sistemas de representación externa, los cuales se muestran a continuación:

Lenguaje verbal	Aritmética	Gráfico	Expresión algebraica
El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadro del primero mas el doble del producto de ambos mas el cuadrado del segundo	$(2 + 3)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2$	El área de un cuadrado es igual a la suma de las áreas de la figuras que contiene Gráfico 1	$(X + Y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
El cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadro del primero menos el doble del producto de ambos mas el	$(5 - 3)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2$	El área de un cuadrado es igual a la suma y diferencia de las áreas de la figuras que contiene Gráfico 2	$(X - Y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

cuadrado del segundo			
El producto de la suma de dos números por su diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados de ambos números	$(5-3) \cdot (5+3) = 5^2 - 3^2$	El área de un rectángulo es igual a la suma y diferencia de las áreas de la figuras que contiene Gráfico 3	$(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$
El producto de un número por la suma de otros dos números es igual a la suma del producto del primer número por los otros dos (propiedad distributiva)	$2(3+4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$	La suma de las áreas de dos rectángulos que tengan en común un lado es igual al área de un rectángulo que tenga por lados, el lado común a los dos dados y el otro lado es la suma de los otros dos lados, no comunes Gráfico 4	$a(b+c) = ab + ac$
El producto de dos factores, donde cada uno es la suma de dos números, es igual a la suma de cuatro sumandos, donde cada uno es el producto de dos factores. Estos factores son las combinaciones dos a dos, de los sumandos de los dos factores iniciales.	$(2+3) \cdot (4+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$	El área de un rectángulo, donde cada lado está conformado por dos segmentos, es igual a la suma de las áreas de los cuatro rectángulos, cuyos lados son las combinaciones dos a dos de los segmentos que conforman los lados del rectángulo previo. Gráfico 5	$(a+b) \cdot (c+d) = ac+ad+bc+bd$

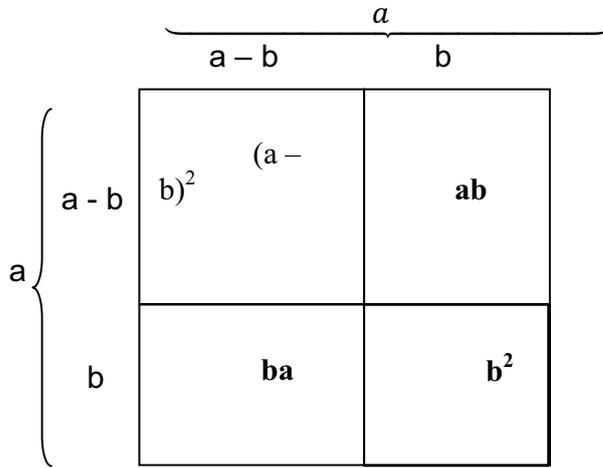
A continuación mostramos los gráficos obtenidos de acuerdo a los ejemplos mencionados anteriormente:

Grafico # 1:



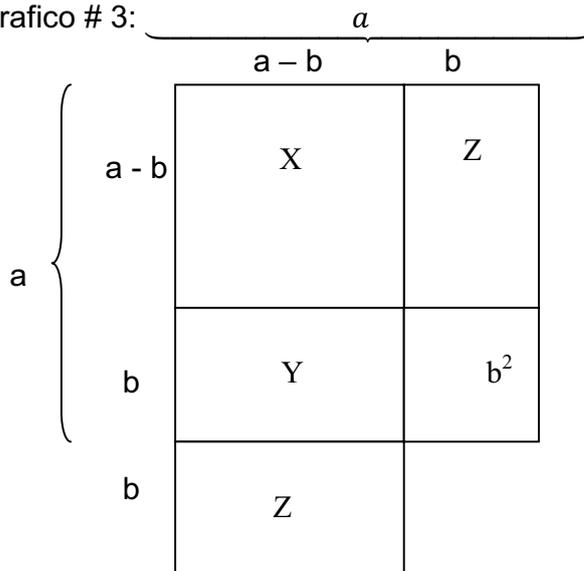
El área de un cuadrado $(a+b)^2$ es igual a la suma de las áreas de la figuras que contiene $a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Grafico # 2:



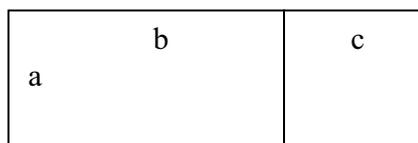
El área de un cuadrado $(a-b)^2$ es igual a la suma y la diferencia de las áreas de la figuras que contiene $a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$
(Se suma b^2 pues se resta dos veces, en ab y ba)

Grafico # 3:



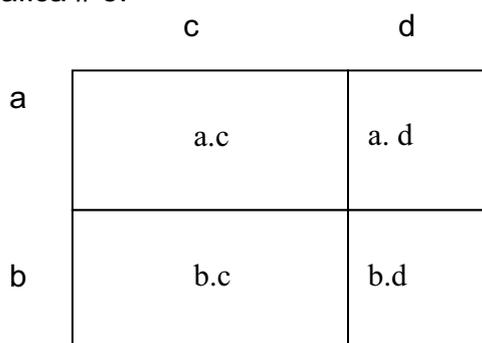
El área de un rectángulo $(a-b) \cdot (a+b)$ es igual a $X + Y + Z$, la cual corresponde a la diferencia de las áreas de la figuras dos cuadrados contenidos, es decir, $a^2 - b^2$

Gráfico # 4:



La suma de las áreas de dos rectángulos que tengan en común un lado $ab + ac$, es igual al área de un rectángulo que tenga por lados, el lado común a los dos dados y el otro lado es la suma de los otros dos lados, no comunes, es decir, $a(b+c)$

Gráfica # 5:



El área de un rectángulo, donde cada lado está conformado por dos segmentos $(a+b).(c+d)$, es igual a la suma de las áreas de los cuatro rectángulos, cuyos lados son las combinaciones dos a dos de los segmentos que conforman los lados del rectángulo previo, es decir, $ac+ad+bc+bd$

Bibliografía

- 1.-) Ardila, Víctor H. Supermat, Matemáticas. Editorial Excelencia. Caracas 2.005.
- 2.-) Salcedo A, Guía para el docente de Matemáticas. Editorial Larousse, Caracas.
- 3.-) Torres B y otros, Supermat Matemáticas. Editorial Excelencia. Caracas 2.005.
- 4.-) Unidades Didácticas: Organizadores Rico L, Segovia I. Didáctica de la Matemática en Educación primaria. / Coord. Por De Castro E, 2.001, ISBN 84 – 7739 – 919 – 5.
- 5.-) Gómez, P. (2.007). Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de la Matemática.
- 6.-) Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigación en Matemáticas Educativa II.*, pp. 173- 202. México. CINVESTAV.