AMBIENTES CATEGÓRICOS PARA LA TOPOLOGÍA

Alberto Donado, Jorge Hernández y Reinaldo Montañez
Universidad Pedagógica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas
y Universidad Nacional de Colombia
adonado@pedagogica.edu.co, jahernandezp@udistrital.edu.co, jrmontanezp@unal.edu.co

Las categorías topológicas aparecen como una generalización del estudio del funtor olvido de estructura, definido de la categoría de los espacios topológicos a la categoría de los conjuntos, en particular, de las propiedades relacionadas con las topologías iniciales y finales que tiene dicho funtor. En este trabajo se estudian algunas propiedades de las categorías topológicas y se muestran algunas formas de construcción. En particular, las categorías de las colecciones, de los espacios completamente regulares, de los espacios uniformes y los espacios de proximidad son categorías topológicas fibradas sobre la categoría de los conjuntos, y la categoría de los espacios topológicos punteados lo es sobre la categoría de los espacios topológicos punteados.

INTRODUCCIÓN

La teoría de categorías aparece como una rama de las matemáticas que unifica el trabajo de las diferentes áreas de la misma. Para el caso que nos ocupa, es posible realizar en muchas categorías construcciones propias de la categoría de los espacios topológicos, entre otras las relacionadas con la homotopía, homología y cohomología. En este punto, es de anotar que, en particular las teorías mencionadas no serán el centro de atención del trabajo sino que se constituye más bien en la motivación del mismo. Con un poco más de precisión, al retener algunas de las propiedades de la categoría de los espacios topológicos se generan otras categorías, donde es posible realizar algunas de las construcciones como las anotadas arriba. Por ejemplo, al relacionar conceptos como fibraciones, cofibraciones y equivalencias débiles se da origen a las llamadas categorías modelo donde se muestran ambientes distintos a la topología para rehacer la teoría de la homotopía (ver Dwyer y Spalinski, 1995). Ahora bien, al pensar en un universo donde existan exponenciación, un objeto de partes y ciertos tipos de límites, como por ejemplo uniones e intersecciones, se generan los topos; de esta manera un topos puede ser pensado como un espacio generalizado, en el que se estudian, entre otras cosas, aspectos de la homo-

Donado, A., Hernández, J. y Montañez, R. (2013). Ambientes categóricos para la topología. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 59-62). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

logía y la cohomología (ver Johnstone, 2002). Finalmente para citar otro ejemplo, al retener como concepto fundamental las topologías iniciales y finales, se generan las categorías topológicas. Es de anotar que las categorías topológicas son el centro de atención del trabajo.

Podría decirse que llevó tiempo a los investigadores encontrar una teoría de categorías apta para los topólogos, puesto que la disponible era apta para los algebristas, y la topología categórica inicia con Bourbaki y es en su primer libro donde aparecen las nociones que la inspiran como las de topologías iniciales y finales. Trabajos muy completos y más recientes se encuentran en Preuss (1988) y Adamek, Herrlich y Strecker (1990).

Finalmente, el cursillo que se propone es de carácter básico, se presenta de forma autocontenida y pretende solo mostrar algunos aspectos de la teoría general de las categorías topológicas, sus fundamentos, sus propiedades, algunos métodos de construcción y algunos ejemplos básicos. Para abordarlo solo se requieren conceptos básicos de la topología general y de la teoría de categorías y todos se presentarán a lo largo del cursillo.

CONTENIDO

1. Conceptos básicos en teoría de categorías: categorías, funtores. 2. Conceptos básicos en topología general: topologías iniciales y finales, ejemplos de construcciones, la cinta de Möbius, el toro y la botella de Klein. 3. Categorías topológicas: la estructura de categoría topológica de Top. La categoría de las colecciones, las categorías de las relaciones, la categoría de los espacios topológicos punteados, la categoría de los espacios uniformes. 4. Construcción de categorías topológicas. Construcción de categorías topológicas a partir de topologías iniciales y finales. La categoría de los espacios completamente regulares, la categoría de los espacios secuenciales.

ASPECTOS TEÓRICOS

En la categoría de los espacios topológicos tiene sentido hablar de topologías iniciales y finales, ejemplos de estas construcciones son por ejemplo el toro, la cinta de Möbius y la botella de Klein, además en particular, la colección de topologías sobre un conjunto arbitrario tiene estructura de retículo completo. Estas consideraciones hacen ver que la categoría de los espacios topológicos está fibrada sobre la categoría de los conjuntos mediante un funtor de olvido

$O: Top \to Conj$ y que poniendo las cosas en un contexto categórico es el funtor el que permite las construcciones mencionadas. Un funtor $F: C \to D$ es topológico si permite las construcciones mencionadas arriba por el funtor O; en tal caso se dice que C es una categoría topológica fibrada sobre D, o simplemente cuando no haya lugar a confusión se dice que C es una categoría topológica, en particular, cuando D es la categoría de los conjuntos se dice que C es un constructo topológico. Nociones equivalentes de categoría topológica se pueden encontrar entre otros en Ardila, Montañez y Ruiz (2000). Entre los resultados alrededor de las categorías topológicas, cabe mencionar en primer lugar que dado un funtor topológico, C es completa (cocompleta), si y solamente si, D es completa (cocompleta) y que si C tiene clasificador de subobjetos entonces el funtor en cuestión es un isomorfismo. Son ejemplos de constructos topológicos, la categoría de los espacios uniformes y la categoría de los espacios de proximidad (ver Adamek, Herrlich y Strecker, 1990; Willard, 1970), pero por ejemplo la categoría de los grupos no es una categoría topológica pues la construcción de estructuras iniciales y finales no dan estructura de grupo. En este punto es importante anotar que un ejemplo que consideramos importante lo constituye la categoría de las colecciones (ver Donado, 1999), pues como se verá es el contexto apropiado para hablar de una manera más general de los conceptos clásicos de la topología, abierto, cerrado, conexo etc. En este punto es importante anotar que no todas las subcategorías de Top son categorías topológicas, por ejemplo la categoría de los espacios de Haussdorf.

Ahora bien, haciendo uso de topologías finales se genera una clase especial de funtores que resultan idempotentes y que hemos denominado funtores *elevadores de estructura*. Los puntos fijos de estos funtores forman categorías topológicas (ver Hernández, 2012; Ruiz y Montañez, 2006), pero otro trabajo en esta dirección es el de Oostra (1995). De manera natural se tienen las construcciones duales y ejemplos de estas construcciones son las categorías de los espacios completamente regulares y de los espacios secuenciales (ver Ruiz y Montañez, 2006). Cabe anotar que los hechos mencionados antes son de un carácter más general, pues en el fondo un elevador es un funtor que asigna a un espacio topológico otro con el mismo conjunto subyacente, así que hay otros elevadores que son objeto de trabajo y que serán estudiados en particular en la categoría de los espacios topológicos punteados (ver Hernández, 2012).

Finalmente, la categoría de los espacios topológicos no tiene exponenciación, es decir no hay una manera natural de asignar a dos espacios topológicos X y Y un espacio topológico X^Y con la propiedad universal requerida (ver por ejemplo Adamek, Herrlich y Strecker, 1990); tampoco tiene un objeto clasificador, en otras palabras un objeto que rescate los subespacios de un espacio dado, hecho que sí sucede en la categoría de los conjuntos. Pues bien, por carecer de estas construcciones Top no es un topos, categorías que realmente unifican las diferentes áreas de las matemáticas. Sin embargo, hay categorías topológicas que tienen exponenciación y con más precisión son cartesianas cerradas pero no tienen objeto clasificador, estas son denominadas cuasitopos; algunas referencias para el estudio de estas categorías son Dubuc (1979) y Wyler (1991).

REFERENCIAS

Adamek, J., Herrlich, H. y Strecker, G. (1990). *Abstract and concrete categories*. Nueva York, EUA: John Wiley and Sons Inc.

Ardila, V., Montañez, J. y Ruiz, C. (2000). Nociones equivalentes de categorías topológicas. *Boletín de Matemáticas*, *7*(1), 19-28.

Donado, A., Luque, C. y Páez, J. (1999). *Topología y colecciones*. *Notas de Matemática y Estadística*, 39, 31-48.

Dubuc, E. (1979). Concrete quasitopoi. *Lecture Notes in Mathematics*, 753, 239-254.

Dwyer, W.G. y Spalinski, J. (1995). Homotopy theories and model categories. En James, I.M. (Ed.), *Handbook of algebraic topology* (pp. 73-126). North Holland, Holanda: Elsevier Science.

Hernández, J. (2012). *Sobre las subcategorías reflexivas y correflexivas en la categoría de los espacios topológicos* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Johnstone, P.T. (2002). *Sketches of an Elephant*. *A topos theory compendium* (vols. 1-3). Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Oostra, A. (1995). Subcategorías generadas mediante estructuras iniciales. *Lecturas Matemáticas*, 16, 63-72.

Preuss, G. (1988). *Theory of topological structures*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel.

Ruiz, C. y Montañez, R. (2006). Elevadores de estructura. *Boletín de Matemáticas*, *13*(2), 111-135.

Willard, S. (1970). *General topology*. Massachusetts, EUA: Adisson Wesley Publishing Company.

Wyler, O. (1991). *Lecture notes on topoi and quasitopoi*. Singapur: World Scientific Publishing.