

# LA CADENA FRACTAL DE FIBONACCI Y ALGUNAS GENERALIZACIONES

**José L. Ramírez<sup>1</sup> y Gustavo N. Rubiano<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones, Universidad Sergio Arboleda,*

<sup>2</sup>*Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia*

[josel.ramirez@ima.usergioarboleda.edu.co](mailto:josel.ramirez@ima.usergioarboleda.edu.co), [gnrubiano@unal.edu.co](mailto:gnrubiano@unal.edu.co)

El objetivo de la charla es introducir la cadena de Fibonacci y mostrar sus propiedades geométricas y combinatorias. Esta cadena o palabra se puede generar a partir de la iteración de un homomorfismo entre lenguajes, además, se le puede asociar una curva a partir de unas reglas de dibujo análogas a las utilizadas en los L-sistemas, dicha curva lleva el nombre de curva fractal de Fibonacci. Asimismo, se presentará una familia de cadenas infinitas que generalizan la cadena de Fibonacci y su curva fractal. Finalmente, se asociará una familia de poliminós a estas cadenas, los cuales resultan ser poliminós cuadrados dobles, y se obtendrán algunos tapetes geométricos, los cuales están programados con el software *Mathematica*<sup>®</sup>.

## INTRODUCCIÓN

La cadena infinita de Fibonacci,  $f=0100101001001010010100100101\dots$ , es sin duda una de las más estudiadas en la combinatoria sobre cadenas (Mignosi y Pirillo, 1992; Chuan, 1992, 1995; Cassaigne, 2008), en particular es una cadena de Sturm (Lothaire, 2002).

Entre muchas de sus propiedades, a esta cadena se le puede asociar una curva que tiene propiedades fractales, las cuales en su mayoría se obtienen a partir de las propiedades combinatorias de  $f$  (Monnerot, 2009; Blondin-Massé, Brlek, Garon y Labbé, 2011).

Asimismo, a esta cadena se le puede asociar una familia de poliminós que teselan el plano, en particular son poliminós cuadrados dobles, estos se denominan copos de nieve de Fibonacci (Blondin-Massé, Brlek, Labbé y Mendès France, 2011).

En esta charla presentaremos algunas formas para generar la cadena de Fibonacci, de manera recursiva, por homomorfismos entre lenguajes, por discreti-

zación de una recta y de manera aritmética (cadenas características o de Sturm), y mostraremos algunas de sus propiedades geométricas y combinatorias. Estas propiedades son ejemplos sencillos del tipo de cosas que se estudian en la combinatoria sobre cadenas, rama reciente de las matemáticas discretas, que estudia las cadenas finitas e infinitas de símbolos y tiene aplicaciones en la teoría de autómatas y lenguajes formales, en la teoría de números, entre otras. Asimismo se recopilan algunas propiedades gráficas de la curva fractal asociada a esta cadena de símbolos, la cual se puede generar a partir de unas reglas de dibujo análogas a las utilizadas en los L-Sistemas (Orjuela, Rojas, Páez y Ramírez, 2011).

También introducimos una familia de cadenas que generalizan la cadena de Fibonacci. A partir de esta familia construimos una familia de curvas que tienen como atractor la curva fractal de Fibonacci y tienen la misma dimensión fractal.

Por último, construimos una familia de poliminós que generalizan el copo de nieve de Fibonacci y estudiamos algunas de sus propiedades geométricas, como el perímetro y el área; tal familia está relacionada con una familia de números que generaliza los números de Pell. Estos poliminós son poliminós cuadrados dobles.

## LA CADENA DE FIBONACCI

Las cadenas o palabras son una sucesión finita de símbolos  $a_1 a_2 \dots a_n$ , tomadas de un conjunto finito no vacío  $\Sigma$  llamado alfabeto. Definimos  $\Sigma^*$  como el conjunto de todas las cadenas sobre un alfabeto  $\Sigma$ , incluyendo la cadena vacía. La longitud  $|u|$  de una cadena  $u \in \Sigma^*$  se define como el número de símbolos de  $u$ , incluyendo símbolos repetidos. Por  $|u|_a$  representamos la cantidad de veces que aparece el símbolo  $a$  en la cadena  $u$ . Por ejemplo la cadena *abbabbaabb* tiene longitud 10 y está formado por los símbolos  $a$ ,  $b$  y  $\epsilon$ .

Una cadena infinita  $u = a_1 a_2 a_3 \dots$  es una sucesión infinita de símbolos, por ejemplo la cadena  $p = (p_n)_{n \geq 0} = 0110101000101\dots$  es una cadena infinita, donde  $p_n = 1$  si  $n$  es un número primo y  $p_n = 0$  en caso contrario.

Sean  $\Sigma$  y  $\Delta$  dos alfabetos. Un homomorfismo es una función  $h: \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$  tal que  $h(xy) = h(x)h(y)$  para todo  $x, y$  en  $\Sigma^*$ .

La cadena  $n$ -ésima de Fibonacci,  $f_n$ , se define recursivamente por  $f_0=1$ ,  $f_1=0$  y  $f_n=f_{n-1}f_{n-2}$  para todo  $n>1$ . Definimos la cadena infinita de Fibonacci  $f$  como

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 010010100100\dots$$

Definimos el homomorfismo  $\mu$  de Fibonacci como  $\mu(0)=01$  y  $\mu(1)=0$ .

La siguiente propiedad permite generar la cadena de Fibonacci a partir de la iteración del homomorfismo  $\mu$ . Esta relación es clave para su implementación gráfica con software matemático.

La cadena de Fibonacci satisface que:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n(1)=f$ .

La relación entre la cadena de Fibonacci y los números de Fibonacci  $F_n$ , los cuales se definen recursivamente como  $F_0=1=F_1$  y  $F_n=F_{n-1} + F_{n-2}$  para todo  $n \geq 2$ , es que la cantidad de símbolos en  $f_n$ , es el  $n$ -ésimo número de Fibonacci  $F_n$ .

Algunas propiedades combinatorias de la cadena de Fibonacci, son las siguientes:

- Las cadenas 11 y 000 no son subcadenas de la cadena de Fibonacci.
- Si  $ab$  es un sufijo de la cadena de Fibonacci  $n$ -ésima, entonces  $ab=01$  si  $n$  es par y  $ab = 10$  si  $n$  es impar.
- $f_{n-1}f_{n-2}$  y  $f_{n-2}f_{n-1}$  tienen un prefijo común de longitud  $F_{n-2}$  para todo  $n \geq 3$ .
- $f_n$  es palíndromo salvo por los dos últimos símbolos.
- Para toda cadena finita  $f_n$  se tiene que  $f_n = f_{n-3}f_{n-3}f_{n-6}l_{n-3}l_{n-3}$ .

Estos dos últimos resultados son importantes ya que permiten descomponer la cadena de Fibonacci en términos de cadenas de Fibonacci de longitud menor, lo cual implica que la curva fractal de Fibonacci tiene características de auto-semejanza.

## Representación gráfica (Lenguaje LOGO)

Existe una interpretación gráfica de las cadenas de símbolos basada en lenguaje LOGO o Lenguaje de la Tortuga. Para convertir una cadena de símbolos en una curva, hay que recorrerla de una manera particular. Para ello a cada uno

de los símbolos de la cadena se le asigna un orden que será interpretado por una “tortuga” hipotética, la cual irá recorriendo el plano de un lado a otro, realizando una determinada acción que dependerá del símbolo que lea. Una vez que la tortuga ha recorrido toda la cadena, la imagen fractal quedará definida.

La presente regla de dibujo par-impar fue introducida por Monnerot (2009) y permite generar la cadena fractal de Fibonacci, ver el siguiente cuadro.

Símbolo	Función
1	Da un paso hacia adelante dibujando una línea de longitud $d$ .
0	Da un paso hacia delante y si el 0 está en una posición impar entonces gira a la derecha $90^\circ$ , y si está en una posición par gira $90^\circ$ a la izquierda.

La gráfica  $n$ -ésima de Fibonacci, denotada por  $\mathcal{F}_n$ , se obtiene al aplicar la regla de dibujo par-impar a la cadena  $n$ -ésima de Fibonacci. La curva fractal  $\mathcal{F}$  de Fibonacci se define como

$$\mathcal{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n$$

En la Figura 1 se muestra la gráfica de  $\mathcal{F}_{10}$ , generada con el software *Mathematica*<sup>®</sup> (Ramírez y Rubiano, 2012).

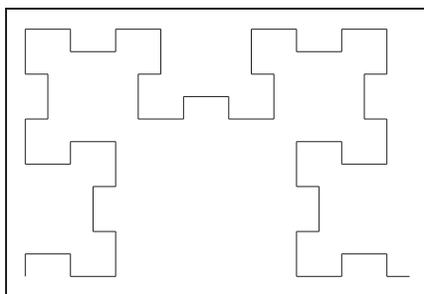


Figura 1: Gráfica de  $\mathcal{F}_{10}$

Algunas de las propiedades de la curva de Fibonacci, relacionadas estrechamente con la cadena de Fibonacci, son:

- La curva fractal de Fibonacci está compuesta únicamente por segmentos de longitud 1 o 2.
- El número de giros en la gráfica  $n$ -ésima de Fibonacci es el número de Fibonacci  $F_n - 1$ . En la figura anterior se verifica que el número de giros es  $F_9 = 55$  (número de esquinas).

- La curva  $\mathcal{F}_n$  es similar a la curva  $\mathcal{F}_{n-3}$  (autosimilaridad). Esta propiedad permite clasificar las curvas de Fibonacci en tres clases según la relación de equivalencia módulo 3, i.e., si  $n$  es de la forma  $3k$ ,  $3k + 1$  o  $3k + 2$ .
- La curva  $\mathcal{F}_n$  es simétrica (ver Figura 2).

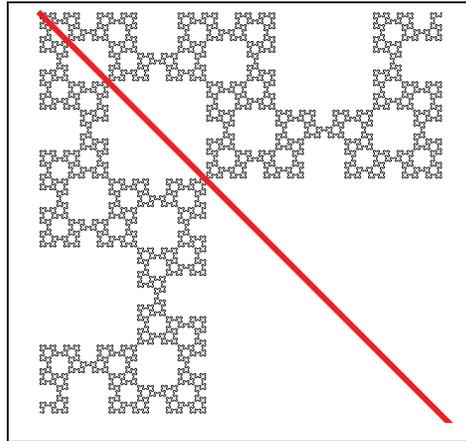


Figura 2: Simetría Curva  $\mathcal{F}_n$

## UNA GENERALIZACIÓN DE LA CADENA DE FIBONACCI

El objetivo de esta sección es hacer una generalización de la cadena de Fibonacci y por ende de la curva fractal de Fibonacci, y mostrar que sus propiedades se mantienen.

La cadena  $(n, i)$ -ésima de Fibonacci,  $f_n^{[i]}$  se define recursivamente por  $f_0^{[i]}=0$ ,  $f_1^{[i]}=0^{i-1}1$  y  $f_n^{[i]}=f_{n-1}^{[i]}f_{n-2}^{[i]}$  para todo  $n \geq 2$  y  $i \geq 1$ . Definimos la cadena infinita de Fibonacci  $f^{[i]}$  como

$$f^{[i]} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{[i]}$$

Las primeras cadenas de Fibonacci  $f^{[i]}$  aparecen en el siguiente cuadro:

$f^{[1]} = 10110101101 \dots$	$f^{[2]} = 01001010010 \dots$	$f^{[3]} = 00100010010 \dots$
$f^{[4]} = 00010000100 \dots$	$f^{[5]} = 00001000001 \dots$	$f^{[6]} = 00000100000 \dots$

Para algunas propiedades sobre estas cadenas ver Ramírez, Rubiano y de Castro (2013).

La gráfica  $(n,i)$ -ésima de Fibonacci, denotada por  $\mathcal{F}_n^{[i]}$ , se obtiene al aplicar la regla de dibujo par-impar a la cadena  $f_n^{[i]}$ . La Curva Fractal  $\mathcal{F}^{[i]}$  de Fibonacci se define como

$$\mathcal{F}^{[i]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n^{[i]}$$

Las propiedades de esta curva se pueden ver en (Ramírez, Rubiano y de Castro, 2013).

### COPO DE NIEVE ASOCIADO A LA CADENA DE FIBONACCI $f^{[i]}$

Recientemente la combinatoria sobre cadenas se ha utilizado en problemas de teselados en el plano con poliminós (ver, e.g., Beauquier y Nivat, 1991; Brlek, Fédou y Provençal, 2009; Blondin-Massé, Brlek, Garon y Labbé, 2011, 2012). Un poliminó es la unión finita de cuadrados unidades sobre el plano reticular, tal que su frontera es una trayectoria simple cerrada, sin huecos y tal que su frontera no se corta. Cada poliminó es codificado por una cadena sobre el alfabeto  $F = \{0,1,2,3\}$  los cuales representan los pasos  $\{\rightarrow, \uparrow, \leftarrow, \downarrow\}$  sobre el plano reticular.

En la Figura 3 se muestra un poliminó, tal que partiendo en  $S$  (en sentido anti-horario) su frontera  $b(P)$ , la palabra  $w = 2122323030103011$  la codifica. Además, denotaremos por  $\hat{w}$  la trayectoria recorrida en dirección opuesta. En este ejemplo  $\hat{w} = 3321232121010030$ .

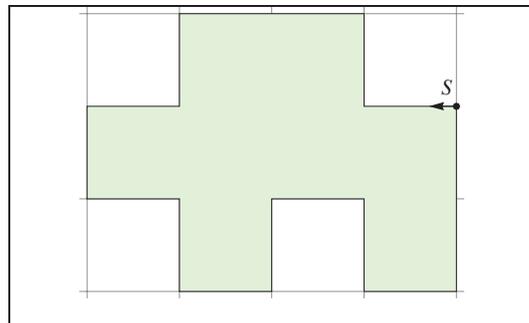


Figura 3: Poliminó

El problema de decidir si un poliminó dado tesela el plano por medio de traslaciones, lo estudió Wijshoff y van Leeuwen (1984), quienes acuñaron el término *poliminó exacto*. Beauquier y Nivat (1991) demostraron que la frontera  $b(P)$  de un poliminó exacto  $P$  satisface la siguiente factorización  $b(P) = A \cdot B \cdot C \cdot \hat{A} \cdot \hat{B} \cdot \hat{C}$  donde a lo más una variable es vacía.

El caso particular cuando una de las variables es vacía decimos que  $P$  es un poliminó cuadrado. En Blondin, Brlek y Labbé (2012) se demostró que un poliminó cuadrado puede tener a lo más dos factorizaciones diferentes. En el caso que tengan exactamente dos factorizaciones se llama *poliminó cuadrado doble*. En Blondin-Massé, Brlek, Garon y Labbé (2011), los autores construyeron dos familias de poliminós cuadrados dobles, llamados los poliminós de Christoffel y los de Fibonacci, sin embargo, existen poliminós que no pertenecen a ninguna de estas familias.

## Construcción poliminós generalizados de Fibonacci

A partir de  $f^{[i]}$  es posible derivar una trayectoria sobre  $F$  la cual tiene propiedades interesantes. La construcción es como sigue. Primero se reescribe la palabra sobre el alfabeto  $\{0,2\} \subseteq F$ . Específicamente aplicamos el morfismo  $0 \rightarrow 2, 1 \rightarrow 0$ . Luego aplicamos el operador  $\Sigma_1$  seguido por el operador  $\Sigma_0$ , donde

$$\Sigma_\alpha(w) = (\alpha \cdot (\alpha + w_1) \cdot (\alpha + w_1 + w_2) \dots (\alpha + w_1 + w_2 \dots + w_n))$$

con  $\alpha \in F$  y  $w = w_1 w_2 \dots w_n$ . Entonces se obtiene la cadena  $p^{[i]} = \Sigma_0 \Sigma_1(f^{[i]})$ .

Definimos la sucesión  $\{q_n^{[i]}\}_{n>0}$  como:

Si  $i$  es par:  $q_0^{[i]} = \lambda$ ,  $q_1^{[i]} = 1$ ,  $q_2^{[i]} = (13)^{i/2}$  y  $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} q_{n-2}^{[i]}$  si  $n \cong 1 \pmod 3$  o  $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} \overline{q_{n-2}^{[i]}}$  si  $n \cong 0, 2 \pmod 3$ .

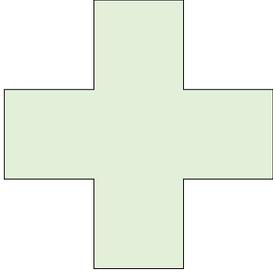
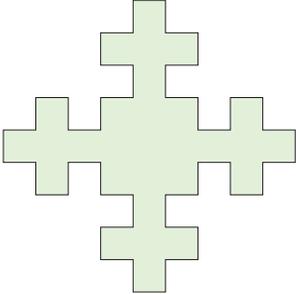
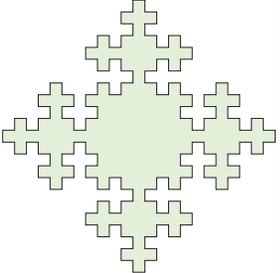
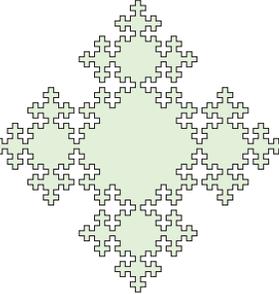
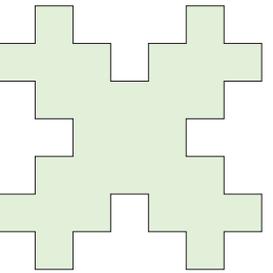
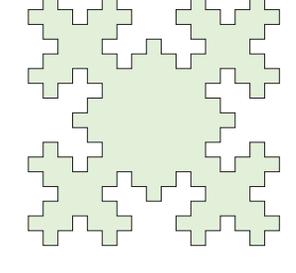
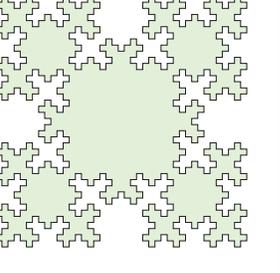
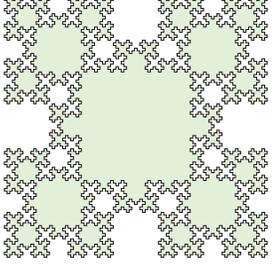
Si  $i$  es impar:  $q_0^{[i]} = \lambda$ ,  $q_1^{[i]} = 1$ ,  $q_2^{[i]} = (13)^{i-1/2} 1$  y  $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} q_{n-2}^{[i]}$  si  $n \cong 0 \pmod 3$  o  $q_n^{[i]} = q_{n-1}^{[i]} \overline{q_{n-2}^{[i]}}$  si  $n \cong 1, 2 \pmod 3$ .

Tenemos la siguiente propiedad: Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $\alpha \in F$  entonces

- La trayectoria  $\Sigma_\alpha q_n^{[i]}$  es simple.
- Si  $i$  es par, entonces la trayectoria  $\Sigma_\alpha (q_{3n}^{[i]})^4$  es una cadena acotada por un poliminó.
- Si  $i$  es impar, entonces la trayectoria  $\Sigma_\alpha (q_{3n+2}^{[i]})^4$  es una cadena acotada por un poliminó.

Otras propiedades de estas cadenas se pueden encontrar en Ramírez, Rubiano y de Castro (2013). A estos últimos poliminós los denotaremos por  $\prod_n^{[i]}$  y

los llamaremos copos de nieve generalizados de Fibonacci. A continuación se presentan algunas gráficas de los poliminós  $\Pi_n^{[i]}$  para  $i=2, 3$ .

$\Pi_1^{[2]}$	$\Pi_2^{[2]}$	$\Pi_3^{[2]}$	$\Pi_4^{[2]}$
			
$\Pi_1^{[3]}$	$\Pi_2^{[3]}$	$\Pi_3^{[3]}$	$\Pi_4^{[3]}$
			

Estos poliminós son cuadrados dobles. Algunas propiedades geométricas se pueden encontrar en Ramírez, Rubiano y de Castro (2013).

## REFERENCIAS

- Beauquier, D. y Nivat, M. (1991). On translating one polyomino to tile the plane. *Discrete & Computational Geometry*, 6(1), 575-592.
- Blondin-Massé, A., Brlek, S., Garon, A. y Labbé, S. (2011). Two infinite families of polyominoes that tile the plane by translation in two distinct ways. *Theoretical Computer Science*, 412(36), 4778-4786.
- Blondin-Massé, A., Brlek, S. y Labbé, S. (2012). A parallelogram tile fills the plane by translation in at most two distinct ways. *Discrete Applied Mathematics*, 160(7-8), 1011-1018.

- Blondin-Massé, A., Brlek, S., Labbé, S. y Mendès France, M. (2011). Fibonacci snowflakes (Número especial dedicado a Paulo Ribenboim). *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 35(2), 141-152.
- Brlek, S., Fédou, J. y Provençal, X. (2009). On the tiling by translation problem. *Discrete Applied Mathematics*, 157(3), 464-475.
- Cassaigne, J. (2008). On extremal properties of the Fibonacci word. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, 42(4), 701-715.
- Chuan, W. (1992). Fibonacci words. *Fibonacci Quarterly*, 30(1), 68-76.
- Chuan, W. (1995). Generating Fibonacci words. *Fibonacci Quarterly*, 33(2), 104-112.
- Lothaire, M. (2002). Algebraic combinatorics on words. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge, EUA: Cambridge University Press..
- Mignosi, F. y Pirillo, G. (1992). Repetitions in the Fibonacci infinite word. *RAIRO - Theoretical Informatics and Applications*, 26(3), 199-204.
- Monnerot, A. (2009). *The Fibonacci word fractal*. Recuperado de [http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/79/72/PDF/The\\_Fibonacci\\_word\\_fractal.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/79/72/PDF/The_Fibonacci_word_fractal.pdf)
- Orjuela, C., Rojas, C., Páez, J. y Ramírez, J. (2011). Reglas y símbolos con l-sistemas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 385-395). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Ramírez, J. y Rubiano, G. (2012). Generación de curvas fractales a partir de homomorfismos entre lenguajes [con Mathematica]. *Revista Integración*, 30(2), 129-150.
- Ramírez, J., Rubiano, G. y de Castro, K. (2013). *A generalization of the Fibonacci word fractal and the Fibonacci snowflake*. Recuperado de <http://arxiv.org/pdf/1212.1368v2.pdf>
- Wijshoff, H.A.G. y van Leeuwen, J. (1984). Arbitrary versus periodic storage schemes and tessellations of the plane using one type of polyomino. *Information and Control*, 62, 1-25.