HIPERSUPERFICIES MÍNIMAS

Ana Marín, Rubén Ortiz y Joel Rodríguez
Universidad de Cartagena, Instituto Tecnológico de Morelia
amarinr@unicartagena.edu.co, rortizo@unicartagena.edu.co, joel@ifm.umich.mx

Proponemos una versión geométrica del principio del maximo, la cual nos permite comparar las hipersuperficies a nivel local que coinciden en un punto y mostrar una versión geométrica del principio del máximo para hipersuperficies minimas.

Debido a la relación existente entre las ecuaciones diferenciales parciales (Protter y Weinberger, 1984) y la geometria diferencial (Carmo, 1992), se observa que las hipersuperficies con curvatura media constante son automáticamente elípticas, y esto permite aplicar el Principio del máximo a dichas curvaturas. También, a operadores como el de la curvatura media H para una hipersuperficie M, como sigue:

> Supongamos que H_1, H_2 son las curvaturas medias de las hipersuperficies M_1, M_2 respectivamente, si M_1 es la gráfica en $\mathbb{R}^{n+1}$ de una función f de clase C^2 y M_2 es la gráfica $\mathbb{R}^{n+1}$ de una función g de clase C^2 donde f y g están definidas en un abierto V acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave ∂V. Supongamos que $f(0) = g(0)$ y $f \geq g$ en ∂V. Si $H_1 = 0$ y $H_2 = 0$ en V, entonces $f = g$ en V.

Nuestro objetivo general es encontrar una generalización del enunciado anterior para un operador L más general que el de la curvatura media H, es decir, nos concentraremos en demostrar el siguiente resultado:

> Sea V un abierto acotado y conexo de $\mathbb{R}^n$ con frontera suave. Sean f y g dos soluciones de clase C^2 de la ecuación diferencial
>
> $$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i = 0, \quad \text{en } V$$
>
> Si a_{ij}, b_i dependen de los valores $u_i(x)$, la matriz (a_{ij}) es definida positiva, $f(0) = g(0)$ y $f \geq g$ en ∂V, entonces $f = g$ en V.

Marín, A., Ortiz, R. y Rodríguez, J. (2013). Hipersuperficies mínimas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 219-220). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Para resolver tal problema proponemos construir una variante de la demostración del Principio del máximo, estudiar algunas de las versiones más importantes del Principio del máximo en el caso general de dimensión $\boldsymbol{n}$. Construir un operador así:

Tomamos $u = f - g$. Obtenemos el operador

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i = 0,$$

por último, demostramos que el operador L es elíptico; y aplicamos el Principio del máximo.

Algunos de los resultados de geometría para problemas elípticos con condición de Dirichlet y de Neumann sobre la frontera son susceptibles de extensión a operadores elípticos más generales que la curvatura media. Este hecho es un punto de partida para futuras investigaciones.

Referencias

Carmo, M. do. (1992). *Riemannian geometry*. Boston, EUA: Birkhäuser.

Protter, M. y Weinberger, H. (1984). *Maximun principle in differential equations*. NewYork, EUA: Springer Verlag.