

LA NOCIÓN DE ROTACIÓN EN PLANOS DESARGUESIANOS

Lorenzo Acosta

Universidad Nacional de Colombia

lmacostag@unal.edu.co

Se presenta la noción de plano afín de acuerdo con el libro *Algèbre Géométrique* de Artin y se explica el significado de plano desarguesiano. Siguiendo las ideas del *Mathématique Moderne 3* de Papy, se introduce una ortogonalidad en un plano afín desarguesiano, lo que permite definir simetrías ortogonales. A partir de estas simetrías se definen las rotaciones. Finalmente se da una explicación a la definición de ángulo de Papy: “Un ángulo es una rotación que ha perdido su centro”.

Este trabajo se desarrolla en el contexto de los planos afines, de acuerdo con la definición de *plano afín* dada en Artin (1957/1978). A partir de tres axiomas básicos sencillos se puede desarrollar toda una teoría geométrica en la que aparecen de manera natural transformaciones que conducen a la utilización del álgebra para obtener resultados geométricos. Estas transformaciones, que envían líneas en líneas paralelas, se llaman *dilataciones* y se dividen en *traslaciones* (aquellas que no tienen un único punto fijo) y *homotecias* (aquellas que tienen puntos fijos). Los planos afines, en toda su generalidad, no son lo suficientemente buenos para obtener resultados atractivos con herramientas algebraicas básicas. La situación se pone interesante si se exige que haya suficientes traslaciones, es decir, que el grupo de traslaciones actúe transitivamente sobre el conjunto de puntos. A cada plano afín con esta condición de simetría se le puede asociar un cuerpo (no necesariamente conmutativo) de tal manera que el plano tiene estructura de espacio vectorial sobre él. Recíprocamente, cada espacio vectorial de dimensión dos sobre un cuerpo es un plano afín. Los planos afines que se obtienen de los cuerpos mediante este mecanismo son los planos donde se cumple el Teorema de Desargues (*planos desarguesianos*) y aquellos que corresponden a los campos (cuerpos conmutativos) son los planos donde se cumple el Teorema del hexágono de Pappus (*planos pappusianos*).

Utilizando una idea de Papy (1967), en un plano afín se define la noción de *ortogonalidad* como una relación biyectiva, antirreflexiva y simétrica en el conjunto de las direcciones del plano. Un plano desarguesiano admite ortogonalidades siempre que sea de característica diferente de dos y, en este caso, hay en general varias de ellas. Una vez escogida una ortogonalidad, se definen las *simetrías ortogonales* y a partir de ellas las *rotaciones*. Se tiene que, en un plano desarguesiano con una ortogonalidad, el grupo de las traslaciones actúa por conjugación sobre el conjunto de las rotaciones, lo que permite dar significado a la definición de ángulo dada en Papy (1967): “Un ángulo es una rotación que ha perdido su centro”.

Las ideas básicas se tomaron del Capítulo II de Artin (1957/1978) y de Papy (1967). Estos dos textos son de naturaleza y objetivos completamente diferentes. El primero está dirigido a personas con una formación matemática avanzada mientras que el segundo es un texto para estudiantes de educación media. El espíritu, sin embargo, es el mismo: desarrollar la geometría a través de las transformaciones, utilizando herramientas algebraicas.

La exposición está dirigida a un público general con conocimientos elementales de teoría de grupos y álgebra lineal.

REFERENCIAS

- Artin, E. (1978). *Algèbre géométrique* (M. Lazard, Tr.). París, Francia: Gauthier-Villars (primera edición en inglés, 1957).
- Papy, G. (con la colaboración de F. Papy). (1967). *Mathématique moderne 3. Voici Euclide*. Bruselas, Bélgica: Marcel Didier.