Las obras de Escher y la geometría hiperbólica

Rafael Melo
Universidad Central
rmeloj@gmail.com, rmeloj@ucentral.edu.co

Casi todo el mundo ha visto, por lo menos una vez, alguna obra del famoso artista holandés M. C. Escher. La originalidad plasmada en sus trabajos atrapa de inmediato nuestra curiosidad y atención, pues sus figuras y/o personajes parecen vivir en otro mundo: uno, donde las leyes de la geometría euclidiana o intuitiva, no funcionan. Y así es; se trata de la geometría hiperbólica, un mundo gobernado por unas reglas tan diferentes, que permiten representar el infinito en un espacio finito. Una vez nos introduzcamos a este nuevo mundo, y entendamos la forma en que funciona, podremos ver las obras de Escher con otros ojos, y encontrar quizás, significados que antes no podíamos.

Introducción

M. C. Escher nació en Leewarden, Holanda, el 17 de julio de 1898. Desde joven se inclinó hacia las artes gráficas, y se dedicó a esto toda su vida, que terminó en Hilversum, Holanda, el 27 de marzo de 1972. Manejó varios temas en sus trabajos. Entre los principales tenemos los siguientes: perspectivas inusuales, transmutaciones graduales, ilusiones en dos y tres dimensiones, y, representaciones del infinito. Es en este último en el que se concentrará el curso.

Escher estaba fascinado con la representación del infinito en un espacio finito, pero para lograrla debía llegar a un paro brusco en alguna parte de la obra. Escher hizo varios intentos, y llegó, finalmente, a sus obras *Círculo límite III* y *Círculo Límite IV*, que son las más destacadas en este género. En la Figura1 se pueden apreciar.

Figura 1

Melo, R. (2013). Las obras de Escher y la geometría hiperbólica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 155-158). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Se observa que las figuras que componen cada una de las obras mencionadas decrecen paulatinamente del centro al perímetro, hasta perderse en el límite visual identificable. En este cursillo se describirá esto desde un punto de vista matemático. Para dichas figuras, la realidad es hiperbólica, razón por la cual cada una de ellas luce del mismo tamaño que las demás. Más aun, ninguna se siente limitada por la frontera, pues la distancia a ella es infinita. Dicho de otro modo, a pesar de que las figuras son de tamaño diferente en el sentido euclidiano, se verá que son, de hecho, congruentes bajo una métrica hiperbólica de distancia. Vistas de esta forma, las obras son simplemente un teselado[1] regular en el cual las piezas individuales han sido rotadas. O sea que si se tuviesen ojos hiperbólicos, el *Círculo Límite IV*, se vería así:

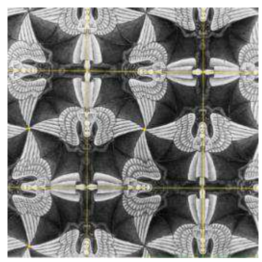

Figura 2

La representación del infinito en un teselado que tiene dos características fundamentales (Gupta, 2006, p. 69):

- La apariencia repetitiva de un elemento base, en desplazamientos espaciales y periódicos.
- La necesidad de incluir una red infinita en un plano finito, lo que implica que el tamaño y los desplazamientos del elemento base no pueden ser constantes.

El *Círculo Límite III* y el *Círculo Límite IV* presentan ambas características. Además, son el resultado de una serie de transformaciones, como traslaciones, rotaciones e inversiones. De aquí, viene la idea de que estas obras son el resultado de una o varias transformaciones de Möbius complejas, pues dichas transformaciones satisfacen propiedades que cumplen con estas características, como se verá a continuación.

[1] Un teselado es un patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana de tal forma que no queden huecos y no se superpongan las figuras.

TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS COMPLEJAS

En el cursillo se planea introducir las transformaciones de Möbius complejas (Hidalgo, 2012), usando varios ejemplos, con gráficas. También se mostrarán las propiedades de las transformaciones que se utilizarán. Entre ellas tenemos:

- Las transformaciones de Möbius son automorfismos conformes de $\hat{\mathbb{C}}$.
- Las transformaciones de Möbius mandan circunferencias de $\hat{\mathbb{C}}$ en circunferencias de $\hat{\mathbb{C}}$.
- Las transformaciones de Möbius no alteran las razones cruzadas. Por lo tanto, una transformación de Möbius será una isometría bajo cualquier métrica basada en una razón cruzada.[2]

Esas propiedades se expondrán formalmente durante el cursillo. Evidentemente estas propiedades ayudan a conservar la forma de una figura, además de proporcionar un escalamiento o cambio de tamaño. Estas son, precisamente, las dos características fundamentales que debe tener un teselado para representar el infinito. Ahora dótese al plano complejo de la métrica euclidiana. Como esta no es invariante bajo estas transformaciones, se generará una reducción en el tamaño de los elementos que se acercan a la frontera. Ahora dótese al plano complejo de otra métrica especial, la métrica hiperbólica, a la que notaremos d_H. Para poder entender la forma en que actúa esta nueva métrica, es necesario que nos sumerjamos en el mundo de la geometría hiperbólica.

GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

En el cursillo se hará una breve introducción histórica de la geometría; desde su formalización con la obra los *Elementos* de Euclides, alrededor del año 300 A. de C., hasta 1868, cuando se publicó la famosa conferencia que impartió Hilbert en 1854, acerca de la reformulación de la geometría, vigente en la actualidad. En este punto ya se sabrá que existen sólo tres tipos de geometría: la euclidiana, la elíptica y la hiperbólica. Se profundizará en la geometría hiperbólica (Cruz, 2009). Se hablará de su desarrollo, su utilidad, e incluso se expondrán resultados que muestran que la geometría hiperbólica es tan consistente como la euclidiana, y que además, ha jugado un papel importante en otras ramas de las matemáticas.

[2] Mostraremos que la métrica euclidiana del plano no funciona.

Para entender mejor la forma en que funciona esta nueva geometría, se explicará en detalle uno de los modelos que la describen bidimensionalmente: el modelo del disco de Poincaré (Kisbye, 2008). En este modelo se toma el disco abierto unitario del plano complejo, y se dota de una noción de distancia bastante particular, la métrica d_H (esta métrica, a diferencia de la euclidiana, se basa en una razón cruzada, causando que las transformaciones de Möbius sean isometrías). Se verán los conceptos básicos de puntos y rectas. También se expondrán algunos resultados sobre circunferencias y triángulos hiperbólicos, todo esto con el fin de contextualizar a los asistentes en este nuevo mundo, y de mostrarles las grandes diferencias con el euclidiano.

Para terminar

Con la geometría hiperbólica como referente, se retomará el tema de las obras de Escher que representan el infinito, en particular, las mencionadas inicialmente, para apreciarlas con "ojos hiperbólicos". Para ello, se superpondrán sobre el disco abierto unitario complejo D, ahora dotado de la métrica hiperbólica d_H. Utilizando las propiedades de d_H que ya conocemos, podrá sostenerse que dichas obras son simplemente teselados regulares. Tal vez esta descripción sea más sencilla, pero lo que sí es innegable es que la perfección y la hermosura de su diseño permanecerá invariante bajo cualquier transformación, y sin importar las reglas que gobiernen.

Referencias

Cruz, M. (2009). *Geometría hiperbólica y algo más*.. Departamento de Matemáticas, Universidad de Guanajuato, Guanajuato, México. Recuperado de http://www.smm.org.mx/emalca2010/sites/default/files/geometriahiperbolica.pdf

Gupta, M. S. (2006, octubre). El arte de Escher, la Gráfica Smith y la geometría hiperbólica (Roberto S. Murphy Arteaga, Tr.). *IEEE Microwave Magazine*. Recuperado de http://docsfiles.com/pdf_madhu_s_gupta.html

Hidalgo, R.A. (2012). *Transformaciones de Mobius: una introducción*. Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile. Recuperado de rhidalgo.mat.utfsm.cl/files/moebius.pdf

Kisbye, N.P. (2008). *El plano de Poincaré*. Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Recuperado de http://www2.famaf.unc.edu.ar/publicaciones/documents/serie_c/CMat35-1.pdf