La proyección estereográfica y deformación conforme de métricas en la bola

Gonzalo García y **Álvaro Ortiz**
Universidad del Valle
Gonzalo.garcia@correounivalle.edu.co, alvaroortizlugo@yahoo.com

La proyección estereográfica de la esfera, desde uno de sus puntos N a un plano que toca a la esfera en un punto S, diametralmente opuesto al punto N, preserva ángulos y envía circunferencias a rectas o a circunferencias. En esta conferencia, conservando sus propiedades, extenderemos la proyección estereográfica a una función ϕ de la bola unitaria en un semiespacio σ de R^3. Usando la función ϕ construiremos una familia de métricas planas sobre la bola euclidiana conformes con la métrica euclidiana.

La proyección estereográfica

Definición. Consideremos la esfera unitaria S^2 y un punto N sobre ella. Sea S el punto en la esfera diametralmente opuesto a N y sea π el plano tangente a S^2 en el punto S. Sea M un punto de S^2 diferente de N y sea NM la recta determinada por los puntos M y N. Sea M' el punto de intersección de la recta NM con el plano π. Diremos que M' es la proyección estereográfica del punto M de S^2 al plano π. Esta correspondencia define una función biyectiva entre $S^2 / \{N\}$ y el plano π.

Las siguientes son dos propiedades fundamentales de la proyección estereográfica.

Proposición. La proyección estereográfica envía circunferencias que no pasan por el punto de proyección en circunferencias y envía circunferencias que pasan por el punto de proyección en rectas.

Proposición. La proyección estereográfica conserva ángulos; es decir, la proyección estereográfica envía los ángulos formados por curvas de la esfera en ángulos iguales formados por las curvas proyectadas por el plano π.

Sea R^3 el espacio euclidiano tridimensional y sea la esfera unitaria S^2 con ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Si tomamos la proyección estereográfica, con centro

García, G. y Ortiz, Á. (2013). La proyección estereográfica y deformación conforme de métricas en la bola. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 19-21). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

el polo norte $N(0,0,1)$, sobre el plano $Z=-1$, encontramos que la proyección envía un punto $M(x,y,z)$ en la esfera, distinto de N, en un punto $M'(\mathrm{u},\mathrm{v},-1)$, donde

$$u=\frac{2x}{1-z} \qquad v=\frac{2y}{1-z}$$

La proyección estereográfica es una función inyectiva sobre el plano $Z=-1$, con inversa la función

$$x=\frac{4u}{u^2+v^2+4} \qquad y=\frac{4v}{u^2+v^2+4} \qquad z=\frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}$$

DE LA BOLA A UN SEMIESPACIO DE R^3

En esta conferencia extenderemos la función estereográfica a una función definida sobre la bola unitaria 3-dimensional con centro en el origen, de tal forma que conserve las dos propiedades enunciadas de la proyección estereográfica.

Proposición. Sea B^3 la bola unitaria con centro en el origen y sea el semiespacio $R_-^3=\{(x,y,z)\in R^3 : z\leq -1\}$. La función $\phi = B^3 \to R_-^3$ definida por

$$\phi(x,y,z)=(\frac{4x}{x^2+y^2+(z-1)^2},\frac{4y}{x^2+y^2+(z-1)^2},\frac{x^2+y^2+(z+1)^2-4}{x^2+y^2+(z-1)^2})$$

es una extensión conforme de la proyección estereográfica.

MÉTRICAS CONFORMES A LA MÉTRICA EUCLIDIANA EN R^3

Si (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) son dos vectores de R^3 entonces el producto interno usual se define por $(x_1,y_1,z_1).(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$. Recordemos que los vectores $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ y $e_3=(0,0,1)$ forman una base de R^3 y que $e_i.e_j=\delta_{ij}$ donde δ_{ij} es igual a uno si $i=j$ e igual a cero si $i\neq j$; por esta razón denotaremos al producto interno anterior por δ_{ij}. Así, si (x_1,y_1,z_1) y (x_2,y_2,z_2) son dos vectores de R^3 entonces podemos escribir

$$\delta_{ij}((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2+\mathrm{y}_1\mathrm{y}_2+\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2\,.$$

En general, definiremos métricas riemannianas sobre R^3 así:

Definición. Diremos que g es una métrica riemanniana sobre R^3 si g es una función diferenciable que asigna a cada $p \in R^3$ un producto interno $g(p)$ simétrico y definido positivo entre pares de vectores de R^3 aplicados en el punto p.

Definición. Sea δ_{ij} la métrica euclidiana y sea $f: R^3 \to R^3$ una función diferenciable con $Df(p)$ biyectiva para todo $p \in R^3$. La función f define una nueva métrica en R^3, denotada por $f^*(\delta_{ij})$, por la fórmula

$$f^*(\delta ij)(u,v) = \delta ij(\mathrm{Df}(u), \mathrm{Df}(v))$$

donde u y v son vectores aplicados en un punto p de R^3 y Df envía vectores en p a vectores en $f(p)$. La restricción de la función f a la bola B^3 define una métrica sobre ella.

Definición. Diremos que una métrica g sobre la bola euclidiana es puntualmente conforme a la métrica euclidiana δ_{ij} si existe una función positiva f tal que $g = f\delta_{ij}$.

En esta conferencia, usando la función ϕ, construiremos una familia de métricas en B^3 conformes a la métrica euclidiana δ_{ij}, tal que si g pertenece a dicha familia entonces g se puede escribir de la forma $g = u^4 \delta ij$, donde u es una función positiva que satisface el siguiente problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{en} \quad B^3 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}u^3 \quad \text{sobre } S^2,$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}).(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$$

es la derivada con respecto a la normal exterior $\eta = (x, y, z)$.

Esto implica que, en particular, la esfera con la métrica g tiene la misma curvatura media de la esfera euclidiana S^2.

REFERENCIAS

Cannon, J., Floyd, W., Kenyon, R. y Parry, W. (1997). Hyperbolic geometry. En S. Levy (Ed.), *Flavors of geometry* (pp. 59-116). Cambridge, EUA: Cambridge University Press.

Ortiz, A. (2010). *Soluciones subcríticas en el problema de prescribir curvatura media sobre la bola* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.