Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo

Anderson Javier Mojica Vargas

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática

Facultad de Ciencias y Educación

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá, Octubre de 2014

Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo

Anderson Javier Mojica Vargas

20122184014

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de Magíster en Educación con Énfasis en Educación Matemática

Director

Doctor Rodolfo Vergel Causado

Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática

Facultad de Ciencias y Educación

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá, Octubre de 2014

DEDICATORIA

A Juan Gabriel y Valentina por prometer futuros cada día

A Johana por su constante apoyo, su amor y comprensión

A mis padres Mauricio y Jackelin ejemplos de sacrificio y humildad

AGRADECIMIENTOS

A mi director Doctor Rodolfo Vergel Causado por su constante apoyo, su sabio consejo y el compromiso que asumió con la dirección de este trabajo

A mi colega y amigo Magíster John Gómez Triana por invitarme a conocer esta visión de la educación matemática y apoyar constantemente el desarrollo de esta investigación

A los niños del curso 602 del Instituto Técnico Industrial Piloto por permitirme escudriñar sus maneras de ser y saber

RAE

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

BOGOTÁ, D.C.

1. TÍTULO

Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo

AUTOR

Anderson Javier Mojica Vargas

LUGAR DE ELABORACIÓN

Bogotá – Colombia.

TIPO DE DOCUMENTO

Monografía – Tesis de maestría – Reporte de investigación

2. PALABRAS CLAVES

Medios semióticos de objetivación, procesos de objetivación, pensamiento multiplicativo, contracción semiótica, unitización y normación.

3. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Identificar y estudiar los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto (10 – 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar una serie de tareas de tipo multiplicativo, adaptarlas e implementarlas bajo los principios de la Teoría Cultural de la Objetivación en un grupo de estudiantes de grado sexto.
- Describir los medios semióticos de objetivación movilizados por un grupo de estudiantes de sexto grado cuando resuelven las tareas adaptadas de tipo multiplicativo.
- Describir y analizar la evolución de los medios semióticos de objetivación conforme resuelven las tareas adaptadas de tipo multiplicativo.

4. DESCRIPCIÓN

Situados en la Teoría Cultural de la Objetivación se presenta el análisis realizado a un grupo de estudiantes de grado sexto de educación básica cuando resuelven ciertas tareas de tipo multiplicativo. El análisis multimodal de la actividad matemática de los niños cuando se involucran en la labor de resolver las tareas propuestas da cuenta de la existencia de medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en el pensamiento multiplicativo a través de la exploración y extrapolación de las herramientas analíticas de la teoría y permite sugerir vectores hipotéticos del pensamiento multiplicativo, así como posibles estratos de generalidad factual, contextual y simbólico.

5. FUENTES

Para la realización de la investigación se usaron ciento cuarenta referencias bibliográficas. De las cuales destacamos:

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. Lester, (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40,* 83-96.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 132 - 150.*

Rojas, P., Romero, J., Mora, L., Bonilla, M., Rodríguez, J., & Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

6. CONTENIDO

Para presentar el informe de esta investigación consideramos la siguiente estructura: En el capítulo uno, titulado La investigación presentamos un posicionamiento teórico a partir del cual planteamos la investigación, describimos los antecedentes, la delimitación del problema y planteamos la pregunta y los objetivos de la investigación. En el capítulo dos denominado Marco teórico presentamos los principales referentes teóricos de la investigación. En primer lugar exponemos con cierto detalle los principios de la teoría de la objetivación y luego presentamos un amplio panorama de estudios referidos a la comprensión del fenómeno de la enseñanza aprendizaje de la multiplicación. En el capítulo tres titulado Metodología presentamos los aspectos metodológicos de la investigación, el contexto del estudio y su diseño metodológico. En el capítulo cuatro titulado Análisis multimodal presentamos el análisis multimodal realizado de la labor de los estudiantes cuando se resolvieron ciertas tareas de tipo multiplicativo y en el capítulo cinco titulado Conclusiones presentamos las conclusiones del estudio así como algunas cuestiones abiertas.

7. METODOLOGÍA

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa de tipo exploratorio, descriptivo y explicativo (Latorre, Del Rincón & Arnal, 2003). Se complementa con un análisis microgenético (Martínez,1999). Simultáneamente se consideró como un estudio de caso (Martínez, 2006). Para el desarrollo de la investigación se adaptaron las fases metodológicas de Radford (2010b). Para el análisis de los datos asumimos una perspectiva multimodal del pensamiento (Arzarello (2006). Para la intervención de aula realizada se siguió la metodología de clase propuesta en Radford (2013a).

El estudio se desarrolló en el colegio Instituto Técnico Industrial Piloto de la localidad de Tunjuelito, Bogotá- Colombia y en éste participaron 36 niños y niñas del curso 602 jornada mañana cuyas edades oscilan entre los 10 y 13 años. La investigación se desarrolló entre el 02 de Octubre y el 18 de Noviembre de 2013, una sesión de 100 minutos por semana.

8. CONCLUSIONES

Documentamos la existencia de medios semióticos de objetivación de tipo kinestésico y lingüístico en la resolución de tareas de tipo multiplicativo. Presentamos evidencia empírica con respecto a los procesos de objetivación contracción semiótica e iconicidad en el desarrollo del pensamiento multiplicativo, los cuales requieren mayor estudio con el fin de poder caracterizarlos a través del seguimiento a la evolución de los medio semióticos de objetivación, de igual manera consideramos que hace falta mayor documentación con respecto a la posible configuración de estratos de generalidad factual, contextual y simbólico en el desarrollo del pensamiento multiplicativo y sus vínculos con los hipotéticos vectores de unitización y normación en cada estrato de generalidad. La información obtenida sugiere empíricamente que los constructos de la teoría cultural de la objetivación no son exclusivos del pensamiento algebraico y que pueden ser usados en otros dominios como el pensamiento multiplicativo siempre y cuando se provea a la clase las tareas necesarias para emprender labores conjuntas que encaminen a los niños a comprender la multiplicación como un cambio de unidades.

Contenido

Índice de figuras

Introducción

Parte de la investigación en didáctica de las matemáticas hace posible distinguir en el tiempo una tendencia que durante algunas décadas estuvo orientada a describir las dificultades presentadas por los estudiantes cuando tienen contacto con algunos objetos matemáticos, esta información, que si bien, aporta a la comprensión de diversas situaciones del aula al parecer no ha logrado transformar radicalmente algunas maneras y procederes en la enseñanza de las matemáticas. Este hecho, acompañado de una conciencia colectiva que concibe el aula como un complejo entramado de relaciones, imaginarios, saberes, intenciones y sujetos concretos hace que las investigaciones en didáctica de las matemáticas empiecen a centrarse en otros fenómenos que generan a su vez nuevos paradigmas de investigación.

Las aproximaciones socioculturales consideran el aula y los fenómenos de enseñanza y aprendizaje como dinámicos y emergentes, por lo cual nos situamos desde una postura sociocultural, asumimos los preceptos de la perspectiva histórico cultural de Vigotsky y nos ubicamos puntualmente en la teoría cultural de la objetivación (Radford. 2006, 2013a, 2014) para explorar algunas formas de pensamiento multiplicativo en estudiantes de grado sexto de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo.

El estudio de este fenómeno puede llegar a dar cuenta de diversos aspectos del aprendizaje de la multiplicación, de cómo se manifiesta el pensamiento multiplicativo de los estudiantes, la anatomía de sus razonamientos, el reconocimiento de sus potencialidades, de aquello que pueden hacer los estudiantes con lo que saben, del tipo de acercamiento a saberes construidos histórico-culturalmente y las maneras de comprender por qué hacen lo que hacen. De tal suerte que desde estos hallazgos puedan generarse estrategias de enseñanza que teniendo en cuenta las maneras de aprender de los niños, apunten a transformar las prácticas de enseñanza aprendizaje de la multiplicación.

El complejo ambiente del aula esconde en su interior un sin número de acciones y expresiones dadas por los estudiantes cuando aprenden, que a veces nos parecen naturales, pero tradicionalmente no pensamos en la información que ellas nos pueden ofrecer; centrarnos en su análisis ofrece la posibilidad, poco explotada, de tomar conciencia de estas expresiones o signos como hechos latentes de comprensión que pueden llegar a transformar, por ejemplo, la manera como juzgamos o “evaluamos” las comprensiones o aprendizajes de los estudiantes. Por ello, asumimos como problema el reconocimiento de los signos o medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes durante su actividad matemática de manera que permita traducir estas expresiones y acciones en posibles orientaciones para la enseñanza.

En términos de Radford (2013a) los seres humanos llevamos a cabo operaciones a través de signos que modifican de manera fundamental la manera en que llegamos a pensar y conocer. Estos signos hacen su aparición en el plano material (i.e. son observables) a través de la implicación en una labor conjunta que conmina a los sujetos a ser y a saber con otros y en esa comunión de conciencias es donde emergen los signos que dan cuenta de la elaboración de significados, que se van instanciando o actualizando en formas de pensamiento particulares con respecto a los objetos matemáticos que las tareas propuestas llevan implícitos.

El presente estudio analiza los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación desarrollados por estudiantes de grado sexto en un colegio público de la ciudad de Bogotá – Colombia cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. Tal análisis se realiza utilizando los constructos de la teoría cultural de la objetivación, pues aunque se han generado abundantes pronunciamientos frente a dificultades y posibilidades en el campo multiplicativo aún no se han explorado cuales serían los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes cuando afrontan este tipo de tareas, de manera que esta información permita comprender las formas de acción, reflexión y expresión de los estudiantes frente al objeto cultural de la multiplicación.

Situados desde una postura que comprende el aprendizaje y la enseñanza desde una perspectiva semiótico cultural, nos posicionamos teóricamente y operamos metodológicamente con los principios de la teoría, entre los cuales se asume una concepción particular de saber, de conocimiento, de labor o actividad, de objetos matemáticos, se concibe el aula como un espacio multi semiótico y se considera el aprendizaje como un proceso de objetivación. Pragmáticamente la teoría sugiere prestar atención a los medios semióticos de objetivación que utilizan los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas, en un esfuerzo que es, a la vez, elaboración de significados y toma de conciencia de los objetos conceptuales.

Simultáneamente encontramos necesario comprender las maneras en que los niños elaboran significados en torno a la multiplicación de cantidades por la presencia que tiene esta operación en la conformación del sistema de numeración decimal y por su estrecho vinculo con otros objetos matemáticos como las proporciones y las funciones, además de ser una necesaria habilidad para desenvolverse en una cultura hecha de transacciones comerciales y de mediciones que necesariamente evocan la multiplicación de cantidades.

A partir de estos planteamientos realizamos una investigación que estudia los procesos de objetivación desarrollados por niños de sexto grado cuando se involucran en la labor de resolver tareas asociadas al pensamiento multiplicativo, y en consecuencia nos preguntamos ¿Cuáles son los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto (10 – 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo? El intento de dar respuesta a dicha pregunta nos llevo a estudiar los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación que desarrolla un grupo de estudiantes de grado sexto de un colegio oficial de la ciudad de Bogotá cuando se involucran en la labor de resolver ciertas tareas de tipo multiplicativo.

Los estudios desarrollados a partir de la Teoría Cultural de la Objetivación han sido realizados principalmente en el campo del pensamiento algebraico, es decir, existen evidencias de los medios semióticos y procesos de objetivación presentes en este tipo de pensamiento. Este hecho nos motivó a explorar cuales son los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación presentes en el desarrollo del pensamiento multiplicativo, en otras palabras, asumimos como hipótesis que los constructos de la teoría no son exclusivos del pensamiento algebraico y que pueden ser usados en otros dominios como el pensamiento multiplicativo. En el desarrollo de esta investigación encontramos posible sugerir que estos medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación perfilan modos de significación de la multiplicación escolar, y por lo tanto pueden llegar a definir formas prototípicas de pensar multiplicativamente.

Para presentar el informe de esta investigación consideramos la siguiente estructura: En el capítulo uno presentamos un posicionamiento teórico a partir del cual planteamos la investigación, describimos los antecedentes, la delimitación del problema y planteamos la pregunta y los objetivos de la investigación. En el capítulo dos presentamos los principales referentes teóricos de la investigación. En primer lugar exponemos con cierto detalle los principios de la teoría de la objetivación y luego presentamos un amplio panorama de estudios referidos a la comprensión del fenómeno de la enseñanza aprendizaje de la multiplicación. En el capítulo tres presentamos los aspectos metodológicos de la investigación, el contexto del estudio y su diseño metodológico. En el capítulo cuatro presentamos el análisis multimodal realizado de la labor de los estudiantes y en el capítulo cinco presentamos las conclusiones del estudio así como algunas cuestiones abiertas.

Capítulo 1. La investigación

La matemática es una actividad humana
H. Freudenthal

1.1 Posicionamiento teórico y contexto problemático

La educación matemática entendida como una epistemología del aprendizaje de las matemáticas (D´Amore, 1999, 2006a) nos sitúa en un escenario que ofrece nuevos paradigmas e intereses de investigación, nos invita a replantear algunos objetos de investigación y ofrece información y conocimiento acerca de los procederes de maestros y estudiantes en torno a la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas. Parte de la investigación en educación matemática hace posible distinguir en el tiempo una tendencia que durante algunas décadas estuvo orientada a describir las dificultades presentadas por los estudiantes cuando tienen contacto con algunos objetos matemáticos, esta información, que si bien, aporta a la comprensión de diversas situaciones del aula al parecer no ha logrado transformar radicalmente algunas maneras y procederes en la enseñanza de las matemáticas. Este hecho, acompañado de una conciencia colectiva que concibe el aula como un complejo entramado de relaciones, imaginarios, saberes, intenciones y sujetos concretos hace que las investigaciones en didáctica de las matemáticas empiecen a centrarse en otros fenómenos que generan a su vez nuevos paradigmas de investigación (Radford, 2011a) y que pretenden dar cuenta de los diversos aspectos del aprendizaje de las matemáticas, de cómo piensan los estudiantes, la anatomía de sus razonamientos, el reconocimiento de sus potencialidades, de lo que pueden hacer los estudiantes con lo que saben, del tipo de acercamiento a saberes construidos histórico-culturalmente y ayuda a comprender por qué hacen lo que hacen. De tal suerte que desde los hallazgos de estas investigaciones puedan empezar a generarse estrategias de enseñanza que teniendo en cuenta las maneras de aprender de los estudiantes, apunten a la necesaria interrelación entre procesos de enseñanza y aprendizaje y puedan así llegar a transformar las prácticas de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas.

En este cambio de paradigmas, una de las tendencias está centrada en prestar atención al carácter semiótico de la actividad matemática. Comprender la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva semiótica implica fomentar la sensibilidad ante la convergencia de registros semióticos de distinta naturaleza, en un esfuerzo que requiere tomar conciencia del proceso de elaboración de significados de los estudiantes y del proceso de reflexión que les permite acercarse a la lógica cultural de los objetos matemáticos.

En esta investigación asumimos un posicionamiento teórico que nos sitúa en una aproximación sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, de donde asumimos los preceptos de la perspectiva histórico cultural y puntualmente nos situamos en la Teoría cultual de la Objetivación (Radford, 2006a, 2013a, 2014).

*Figura 1***.** Ubicación de la teoría de la objetivación en las corrientes socioculturales

Cambiar la concepción de aprender por transmisión de información, asimilación y reiteración es una necesidad que lleva tiempo reclamándose y ante la cual existen experiencias innovadoras que proponen superar este tipo de prácticas de enseñanza. Las corrientes socioculturales de la educación matemática permiten concebir el fenómeno enseñanza-aprendizaje de forma distinta y desde distintos enfoques (e.g. educación matemática crítica, etnomatemáticas, socioepistemología) consideran la educación como una construcción social e histórica permeada por la cultura. Algunas de estas corrientes consideran los postulados de Vigotsky, quien en su teoría del desarrollo enfatiza en el origen social de los fenómenos psicológicos (Vygotski, 2000; Wertsch, 1988; Martínez, 1999; Chaves, 2001) y cuyos planteamientos teóricos adquieren un nuevo sentido al ser reinterpretados en escenarios contemporáneos que dan origen a nuevos constructos teóricos. Tal es el caso de la Teoría Cultural de la Objetivación (TCO) que asumiendo la perspectiva histórico cultural de Vigotsky considera como aspecto fundamental la acción semióticamente mediada como uno de sus principios. Esta teoría, que ha ido evolucionando, ha incluido en sus planteamientos aspectos antropológicos, filosóficos, ontológicos y por supuesto epistemológicos que le brindan sustento y legitiman sus pronunciamientos no solo en la comprensión de las formas de conocer de los individuos sino en sus posibles incidencias en el ámbito educativo y particularmente en el campo de la educación matemática.

La TCO como teoría fenomenológica concibe el aprendizaje como un fenómeno de carácter semiótico cultural que se gesta en el seno de ciertas prácticas, que inicialmente fueron consideradas desde la Teoría de la Actividad de Leontiev (1993, citado en Radford, 2006a), pero que actualmente se conciben desde la idea de labor en un sentido hegeliano, es decir dialéctico materialista. La teoría "aboga por una concepción no mentalista del pensamiento y por una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados" (Radford, 2006a, p. 105). Aquí el aprendizaje es considerado, en términos muy generales, como un proceso de objetivación del saber, proceso en el cual la teoría, en tanto considera la acción semióticamente mediada, sugiere prestar atención a los Medios Semióticos de Objetivación (MSO), emergentes cuando los niños afrontan tareas matemáticas. Estos MSO que son consustanciales a la actividad matemática corresponden a los objetos, artefactos, recursos lingüísticos y extralingüísticos, gestos y signos en general, que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidentes sus intenciones y llevar a cabo un despliegue de acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (Radford, 2003, 2010a).

La postura teórica mencionada ha sido ampliamente explorada en el dominio del pensamiento algebraico, particularmente en tareas asociadas a generalización algebraica de patrones y solo hasta hace muy poco ha empezado a trascender otros escenarios de la educación matemática e inclusive a otras áreas de conocimiento como la enseñanza de otros idiomas. Como producto de tales concreciones la teoría a través de una metodología que concibe el pensamiento desde su carácter multimodal (Arzarello, 2006) ha encontrado aspectos característicos del pensamiento algebraico, ha definido estratos de generalidad por los cuales evolucionan los niños para llegar a pensar algebraicamente acerca de las secuencias y ha definido algunos aspectos propios de los procesos de objetivación en torno a la generalización algebraica de patrones (Radford, 2002, 2010c, 2011b, 2012).

En algunos estudios realizados desde la perspectiva semiótico cultural (Villanueva, 2012; Gómez, 2013; Vergel, 2014a) se encuentra la invitación a explorar desde la TCO los procesos de objetivación en otros escenarios como el pensamiento numérico, geométrico, aleatorio, entre otros, de manera que dichos estudios aporten a la comprensión de los procesos de objetivación en éstos y permitan extender los alcances de la TCO para seguir comprendiendo los procesos de objetivación o toma de conciencia que realizan los estudiantes de los objetos matemáticos.

El complejo ambiente del aula esconde en su interior diversas expresiones dadas por los estudiantes cuando aprenden, que pasan desapercibidas y a veces nos parecen naturales, pero no nos detenemos a pensar en la información que ellas nos pueden ofrecer; centrarnos en su análisis ofrece la posibilidad, poco explotada, de tomar conciencia de estos signos y expresiones como hechos latentes de comprensión que pueden llegar a transformar, por ejemplo, la manera como juzgamos o "evaluamos" las comprensiones o aprendizajes de los estudiantes. Radford (2014) sostiene que "deberíamos hacer un esfuerzo para entender la producción de saberes y de subjetividades en el aula y promover aquellas formas de acción pedagógica que puedan llevar a un aprendizaje significativo, es decir, no alienante" (p.5). En Vergel (2014a) Radford manifiesta que es mucho lo que falta por conocer acerca del pensamiento algebraico (p. 11-12) y en consecuencia podemos colegir que en el campo de lo numérico faltaría aún más por conocer, empezando porque aún no se reportan trabajos en este tipo de pensamiento, desde esta perspectiva teórica, y porque miembros de la comunidad académica legitiman la exploración de la teoría en otros escenarios.

Atendiendo entonces a las cuestiones abiertas de otras investigaciones y teniendo en cuenta que aún no se han explorado cuales serian, desde esta teoría, los aspectos característicos o el tipo de manifestaciones o signos desplegados por los niños cuando se involucran en la labor de resolver tareas en otros escenarios como el pensamiento numérico, consideramos pertinente iniciar tal exploración.

Ahora bien, el escenario a considerar en el pensamiento numérico es tan extenso como se quiera, por lo cual nos concentramos en un aspecto que consideramos clave dentro del pensamiento numérico: la multiplicación. La comprensión de la multiplicación, inmersa dentro del pensamiento numérico, resulta de vital importancia en la formación matemática escolar de los individuos de nuestra cultura en tanto las relaciones comerciales, particularmente las de intercambio de bienes y servicios, en las que nos vemos cotidianamente involucrados están mediadas por el uso del dinero, lo cual nos convoca necesariamente a hacer cuentas; cuentas que generalmente van más allá de la suma y que en su mayoría requieren de algunos significados particulares del objeto matemático multiplicación.

En el campo educativo encontramos que la multiplicación en tanto objeto de la didáctica y de la matemática revierte en sí misma una gran variedad de significados que nos permiten considerarla como una de las piedras angulares en la formación matemática escolar de los individuos, pues en ella se sostienen significados atribuidos a las fracciones, a las funciones lineales, a las proporciones, entre otras. Desde un punto de vista neurológico la resolución de problemas que implican la multiplicación suele activar la circunvolución angular izquierda del cerebro, cuyo desarrollo ontogenético, el del cerebro, está fuertemente ligado al contexto sociocultural (Radford & André, 2009).

Tan polisémico resulta el término multiplicación que es preciso aclarar que, para efectos de este estudio, estamos considerando la multiplicación como objeto de enseñanza y aprendizaje en la escuela, como una operación que se realiza generalmente entre cantidades en los universos numéricos de los enteros positivos, las fracciones, los números con coma y las proporciones, es un contenido curricular vinculado con diversos contenidos matemáticos y es una forma culturalmente codificada de acciones con respecto a los números, que posteriormente intentaremos detallar, y que en consecuencia genera una forma particular de pensamiento que consideramos pensamiento multiplicativo.

¿Por qué en el pensamiento multiplicativo? Aparte de las razones anteriormente aludidas consideramos particularmente problemática la comprensión del pensamiento multiplicativo desde una perspectiva semiótico cultural, por el reconocimiento que hacemos de su importancia en la formación escolar de los estudiantes, por la necesidad de prestar atención a algunas dificultades reportadas en sus procesos de enseñanza-aprendizaje, tal como la preocupante tendencia a confinar el aprendizaje de la multiplicación a las tablas de multiplicar, y por la intención de comprender las maneras en que los niños elaboran significados de la multiplicación.

En el estado del arte realizado para esta investigación se indagó acerca de diversos estudios asociados al pensamiento multiplicativo entre los cuales no se encontró ningún estudio que refiriera a los aspectos semiótico culturales del aprendizaje de la multiplicación, no obstante dicha consulta si nos permitió considerar un panorama complejo en torno a la necesidad de continuar indagando acerca de las maneras en que los niños se acercan a las formas semiótico culturales históricamente constituidas de la multiplicación.

Desde las políticas públicas en educación de nuestro país, encontramos los preceptos del ministerio de educación nacional, quienes a través de los lineamientos curriculares (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 1998) y los estándares curriculares para el área de matemáticas (MEN, 2006) definen un panorama de la formación matemática escolar pretendida para los estudiantes colombianos, particularmente con el objeto multiplicación se reconocen sus diversos significados, los retos que plantea su enseñanza, algunas estrategias usadas por los niños para resolver distintos tipos de problemas y algunas sugerencias a tener en cuenta en la enseñanza de este concepto. Sin embargo los resultados de estas pretensiones parecieran quedarse en el papel y es muy poca su trascendencia a los escenarios escolares, hechos que son evidenciados en la propia práctica docente cuando estudiantes de último grado manifiestan serias dificultades no solo en realizar multiplicaciones, sino en comprender algunos significados asociados a la multiplicación tales como el establecimiento de relaciones entre cantidades, así como la incomprensión de situaciones que requieren de la multiplicación para su resolución. Estas situaciones encontradas en la práctica parecen tener cierto eco en los resultados de algunas pruebas externas realizadas a nuestros estudiantes. Por ejemplo, los resultados de los estudiantes que representaron a nuestro país en las pruebas Pisa 2012 muestran que en el área de matemáticas el 73,8% de los estudiantes son insuficientes para acceder a estudios superiores y para las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento (ICFES, 2012). En 2014 ante un test optativo de esta misma prueba PISA, sobre solución creativa de problemas, los estudiantes que representaron a nuestro país fueron los menos afortunados ocupando el último lugar. Sin embargo estos resultados no son nuevos para nosotros, en el 2006 los resultados de las pruebas TIMSS y PISA arrojaron resultados similares (Rojas, et al., 2011). Simultáneamente hallamos que el promedio de los estudiantes de grado once en el área de matemáticas durante el último lustro es inferior a 50 puntos de 80 posibles en las pruebas Saber 11.

Estos datos numéricos con los cuales se suelen “evaluar” los aprendizajes de nuestros niños, pueden tener diversas interpretaciones, no obstante creemos que estos resultados sirven para cuestionar en primer lugar el tipo de evaluación, pero es aun más importante percatarnos que estas pruebas son indicios de que, en general, algo estamos haciendo mal. Rojas et al. (2011) plantean una reflexión muy pertinente al respecto; estos investigadores arguyen una deuda social acerca del sentido de lo multiplicativo con nuestro niños, reclamación que cobra validez en tanto los estudios acerca de las comprensiones en torno al objeto multiplicación en estudiantes universitarios y en docentes en ejercicio (MESCUD, 2005,

2007) demuestran una carencia de significados de la multiplicación en individuos con una formación matemática escolar culminada.

Es común encontrar en la literatura en educación matemática, estudios e investigaciones que pretenden aportar a la resolución de problemas específicos de la disciplina, desde el reconocimiento de tensiones entre lo esperado y lo acontecido, sin embargo el escenario planteado hasta el momento parece sugerir no una, sino multitud de tensiones en torno al aprendizaje de las matemáticas y particularmente en torno a la multiplicación, por ello no consideramos necesario definir puntualmente el problema desde una de estas tensiones. Consideramos que de acuerdo a los resultados generales de los estudiantes en las evaluaciones internaciones y nacionales, sumados a los resultados de investigaciones en torno al objeto matemático escolar multiplicación, se manifiesta una ausencia de sentido multiplicativo en nuestros estudiantes, por lo que sería deseable estudiar formas alternativas de entender como aprenden nuestros niños a multiplicar, qué tipo de tareas hacen posible el acercamiento a formas prototípicas de pensar multiplicativamente y desde allí explorar posibles rutas de acción para aportar a la elaboración de significados más amplios de la multiplicación.

A partir de este panorama general queremos situar el problema que convoca la investigación aquí reportada desde dos perspectivas: en primer lugar existe un reconocimiento del potencial, el impacto y la trascendencia que engendra en sí misma la TCO. De otro lado consideramos que existen formas alternativas de comprender el fenómeno de las maneras en que los niños elaboran significados en torno a la multiplicación escolar y considerando la multiplicación como una necesaria forma de reflexión de los individuos para desenvolverse en nuestra cultura quisimos explorar precisamente allí los constructos de la TCO con el fin de aportar a la comprensión de las maneras en que los niños producen significados en torno a la multiplicación, los cuales pueden evidenciarse a través de las manifestaciones que éstos hacen cuando se involucran en la labor de resolver tareas de tipo multiplicativo, es decir que se topan o se encuentran con el objeto cultural de la multiplicación que los objeta, les opone resistencia y los hace adoptar formas de reflexión y expresión corpóreamente mediadas que les permiten acercarse a la lógica cultural de los objetos y producir significados en torno a ellos.

El camino que hemos adoptado para sustentar nuestro hecho problemático, distinto a la tensión esperado – encontrado, corresponde a su vez en prestar atención a las sugerencias realizadas por algunos investigadores acerca de la necesidad de indagar los aspectos propios de la TCO en dominios distintos al pensamiento algebraico, que sumado a nuestro interés en indagar sobre aspectos asociados al pensamiento multiplicativo configuran la necesidad de estudiar las formas de acción y reflexión de los estudiantes cuando elaboran significados de las formas prototípicas (histórico culturalmente constituidas) de pensar multiplicativamente; hecho que va de la mano con la inexistencia de estudios referidos al aprendizaje de la multiplicación desde la perspectiva semiótico cultural.

Asumiendo entonces como problemática, la ausencia de información en un aspecto particular del vasto espectro de investigación en educación matemática, queremos estudiar sí y de qué manera los hallazgos realizados desde la postura semiótico cultural adoptada por Radford (2006a, 2010a, 2010b, 2010c, 2013a, 2014), ampliamente explorada en el pensamiento algebraico, puede replicarse en otros campos de la educación matemática, particularmente se desea estudiar sí existen y cuáles son los medios semióticos y procesos de objetivación que podrían llegar a caracterizar el pensamiento multiplicativo.

En conclusión, no queremos centrarnos en posibles tensiones, consideramos la existencia de un fenómeno complejo que se puede estudiar de diversas maneras, que acepta otros puntos de vista y en tanto problemático es susceptible de ser analizado desde diversas perspectivas, de manera que el problema radica en comprender y aportar elementos para la comprensión, de las maneras en qué los niños se acercan a la lógica cultural de la multiplicación, estudiando sus formas de reflexión, acción y expresión, las maneras de producir significados en torno al objeto, los medios semióticos y los procesos de objetivación de esas formas prototípicas (histórico culturalmente constituidas) de pensar multiplicativamente ya que consideramos necesario una nueva comprensión de la multiplicación centrada en la actividad y las acciones de los individuos.

1.2 Antecedentes

Para exponer los trabajos que consideramos previos a este estudio, asumimos tres frentes particulares, el primero de ellos corresponde a los trabajos desarrollados en la perspectiva semiótico cultural, el segundo corresponde a los estudios realizados desde la perspectiva multimodal del pensamiento y el tercero aquellos referidos a la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación.

La TCO tiene sus orígenes en los años noventa (Radford, 2014) en los cuales, según Radford, el interés estaba centrado en pensar de manera diferente el aprendizaje de las matemáticas y con el paso del tiempo se ha venido configurando una teoría a partir de una investigación longitudinal con estudiantes jóvenes, en el estudio del pensamiento algebraico, particularmente en tareas asociadas a la generalización de patrones. En algo más de 140 publicaciones Luis Radford ha reportado no solo una concepción sociocultural del aprendizaje de las matemáticas sino una teoría que da cuenta de los aspectos semiótico culturales que median la actividad matemática de los individuos, entre otros importantes aportes, que se utilizan en este estudio y por lo tanto hacen parte del marco teórico.

No obstante es necesario reseñar algunos estudios que han considerado la TCO como marco de referencia para su posicionamiento teórico y en consecuencia para sus subsiguientes análisis; es así como encontramos diversos ejercicios de investigación en el terreno de estudios post graduales entre los cuales destacamos los siguientes: Cadavid (2011) estudia el proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos, Lasprilla & Camelo (2012) presentan los medios semióticos de objetivación emergentes en niños de 8 y

9 años al abordar una tarea sobre generalización de patrones, Villanueva (2012) describe y analiza los medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado cuando resuelven tareas sobre secuencias figurales, Gómez (2013) reporta los medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes de grado décimo cuando resuelven tareas de generalización de patrones y Cisneros, Castro & Cadavid (2013) analizan la objetivación del número racional desde los procesos de medición que generan razón.

En investigaciones doctorales se han reportado los trabajos de: Miranda (2009) en donde se analiza el proceso de producción de significados en la explicación del movimiento lineal de objetos llevada a cabo por estudiantes de bachillerato cuando interpretan gráficas cartesianas. En Vergel (2013, 2014a) se identifican y estudian las formas de pensamiento algebraico temprano que emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de educación Básica primaria (9 – 10 años) como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones y actualmente se desarrolla el estudio de Quintero & Jaramillo (2013) que tiene como propósito analizar la objetivación del concepto de limite de una función, de alumnas de grado once, a través del desarrollo de su pensamiento teórico. Por último queremos comentar que tenemos noticias de otros trabajos en curso que utilizan los constructos de la TCO en otros dominios como el pensamiento aditivo, el pensamiento proporcional y la derivada.

Dado que nuestro sustento teórico (la TCO) va ligado a una metodología de análisis (multimodal) consideramos necesario mencionar que en esta línea se hallan diversos estudios, (Lemke, 1990; Kress & Van Leeuwen, 2001; McNeill, 2000; Bezemer & Jewitt, 2010) que incluso han sido utilizados en otras áreas de la educación (Tamayo, 2001; Tamayo et al., 2010; Flewitt, 2011). Sin embargo nos parece importante señalar que en el campo de la educación matemática este tipo de estudios va sumando adeptos y ofrece la posibilidad de investigar por ejemplo los recursos semióticos del profesor (Mangui, 2009, 2010; Bjuland, 2012; Alibali et al., 2013) e incluso ya es usado para indagar algunos objetos matemáticos particulares (Miranda, 2009; Thomas, Yoon & Dreyfus, 2009). Particularmente queremos destacar que a partir de los postulados de Arzarello (2006) se generó toda una línea de investigación desde esta perspectiva principalmente en Italia (Sabena, 2007, 2011, 2012, Arzarello & Domingo, 2007).

Ahora, en el terreno del pensamiento multiplicativo queremos destacar que los estudios realizados acerca del fenómeno de aprendizaje-enseñanza de la multiplicación consideran varios enfoques y objetos de estudio, en tal sentido la literatura en educación matemática contiene una considerable cantidad de estudios que examinan porciones de todo el complejo fenómeno concerniente al aprendizaje-enseñanza de la multiplicación.

Aunque desde los estudios de Piaget (1952) se hallan referencias al estudio del razonamiento proporcional, es solo hasta finales de la década de los ochenta y principio de los noventa que encontramos las primeras producciones acerca de la comprensión de la manera en que los estudiantes elaboran significados de la multiplicación, las estrategias utilizadas en la resolución de ciertos tipos de problemas multiplicativos y algunas explicaciones desde el punto de vista cognitivo y sicológico; principalmente en Estados Unidos aparecen los estudios de Karplus, Karplus, Formisano & Paulsen (1979); Steffe, Von Glasersfeld, Richards & Cobb (1983); Steffe & Von Glasersfeld (1985); Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985); Lesh, Post & Behr (1988); Nesher (1988); Vergnaud (1988); Hart (1988); Fey (1990); Schwartz (1991); Greer (1992); Behr, Harel & Post (1992); Confrey & Smith (1994) y Steffe (1992, 1994).

Gran parte de estos estudios se condensan en el primer handbook de investigaciones en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (D. Grouws (Ed.), 1992), así como en los libros "Number, concepts and operations in the middle grades" (Hiebert & Behr (Eds.),1988) y "The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics" (Harel y Confrey (Ed.), 1994) los cuales consideramos insumos necesarios para situarse en la comprensión de la complejidad y trascendencia de los estudios referidos al objeto multiplicación.

De los estudios referidos, y otros que consideramos importantes, queremos comentar algunos de sus objetos de estudio. Las investigaciones de Fishbein, et al. (1985) y Fishbein (1987) que definen modelos intuitivos de la multiplicación resulta un marco interpretativo importante para la comprensión de los modos de significación de la multiplicación. En tanto los tipos de números con los cuales se realizan las multiplicaciones imponen dificultades o maneras de reflexión particulares creemos que es necesario tener en cuenta los estudios de Schwartz (1988) quien estudia el tipo de magnitudes de las cantidades en tanto extensivas e intensivas no solo proveen distintos tipos de problemas sino posibilidades de aprendizaje y distintos significados del objeto multiplicación. De igual manera Greer (1992), Behr, Harel, Post & Lesh (1994) y Harel, Behr, Post & Lesh (1994) estudian el impacto que tienen los tipos de cantidades en tanto éstas sean mayores o menores que la unidad, decimales o fracciones, variables didácticas que propulsan formas de acción y reflexión particulares. Los estudios de Steffe (1994) y Steffe & Cobb (1988) presentan esquemas multiplicativos de los niños, que son un acercamiento a las maneras de proceder de los niños y aunque no explicitan aspectos semióticos si consideran unos esquemas premultiplicativos y multiplicativos, que en otros estudios sería interesante contrastar con una perspectiva semiótico cultural.

Independientemente de la perspectiva teórica desde la que se quiera estudiar el fenómeno de la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación aparece la necesidad de considerar el tipo de tareas o situaciones que hacen posible el acercamiento a las formas de significación cultural, por lo cual no podemos desconocer que en este sentido también se encuentra abundante investigación, por ejemplo en Nesher (1988), Maza (1991a, 1991b), Downton (2010), Tzur et al. (2013) y De Castro & Hernández (2014). Una condensación de diferentes posturas con respecto a la estructura semántica y sintáctica de las tareas de tipo multiplicativo se encuentra en Greer (1992) quien compara varias interpretaciones teóricas acerca del tipo de problemas verbales más usados para la enseñanza de la multiplicación.

Queremos destacar los resultados de las investigaciones realizadas por Lamon (1994, 1996, 2005, 2007) que han estado orientadas a estudiar desde un punto de vista cognitivo los aspectos sicológicos de la multiplicación y ha querido manifestar la importancia de reconocer en la comprensión del pensamiento multiplicativo de los niños las maneras en que éstos trabajan, o deberían trabajar, con las cantidades haciendo uso de procesos de unitización y normación que proveen oportunidades de ampliar el significado de la operación multiplicación con números enteros positivos a números decimales o fracciones.

Es con la aparición de la teoría de los campos conceptuales y su concepción de la multiplicación como inmersa en el campo conceptual multiplicativo que logran decantarse algunos aspectos del pensamiento multiplicativo que recogen en esencia varios de los postulados piagetianos que servían de sustento a los estudios que le precedían a Vergnaud. Desde la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1991, 1993, 1994) se sitúa la multiplicación como un campo conceptual en el cual los problemas propios del campo conceptual se denominan de estructura multiplicativa y con las categorías de concepto en acto, teoremas en acto, esquemas, situaciones e invariantes parece haber generado un marco teórico lo suficientemente explicativo de varias situaciones del fenómeno de la enseñanza aprendizaje de la multiplicación desde un punto de vista cognitivo.

Pero la discusión acerca de la multiplicación aunque se decanto en los postulados de Vergnaud, no detuvo su avance y es así como se encuentran otros estudios que continúan examinando aspectos particulares de la multiplicación escolar (Clark & Kamii, 1996; Mulligan & Mitchelmore, 1997; Park & Nunes, 2001; Nunes & Bryant, 2003; Carroll, 2007; Gómez & Contreras, 2009; Nunes et al., 2009; Castro & Castro, 2010; Rahaman, Subramaniam & Chandrasekharan, 2012). Por ejemplo entre los vínculos existentes del pensamiento multiplicativo y el aditivo encontramos los estudios de Siemon, Breed & Virgona (2005) y Fernández & Llinares (2010). Algunos vínculos entre el pensamiento multiplicativo y el pensamiento relacional se encuentran en Bosch, Castro & Segovia (2007) y Bosch (2012). Algunas relaciones del pensamiento multiplicativo con el razonamiento proporcional se pueden hallar en Lamon (2007), Obando (2007) y Rivas, Godino & Castro (2012). A propósito de esta relación Obando, Vasco & Arboleda (2014) presentan el estado del arte con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad, en donde se hallan fuertes indicios de la relación entre estos dos tipos de pensamiento.

Inclusive es posible encontrar filiaciones entre el pensamiento multiplicativo y el algebra escolar (Bonilla & Romero, 2008), así mismo se encuentran relaciones con un tipo de pensamiento exponencial en Confrey (1994) y Confrey & Smith (1994,1995). Acerca de los vínculos del pensamiento multiplicativo con las formas de elaboración de significados de los números racionales precisamos los estudios de Behr, Harel & Post (1992), Behr et al. (1997), Lamon (2007) y Steffe & Olive (2010).

En al ámbito nacional reconocemos las investigaciones realizadas por MESCUD (2005, 2007) quienes al replicar los estudios de Fiscbein et al. (1985) y Harel et al. (1994) verifican los resultados de estas investigaciones y reportan algunas diferencias importantes para los estudiantes de nuestra cultura escolar (Rojas et al., 2011).

Como mencionamos anteriormente no hallamos estudios que consideren desde una perspectiva socio cultural los aspectos asociados a la enseñanza aprendizaje de la multiplicación, sin embargo encontramos que este fenómeno ha sido objeto de estudio desde otras perspectivas teóricas, por ejemplo desde la perspectiva ontosemiótica (EOS) de Godino y colaboradores se estudia la naturaleza ontosemiótica del razonamiento proporcional (Godino & Batanero, 1994; Rivas, Godino & Castro, 2012). A su vez la multiplicación, como inmersa en el razonamiento proporcional a sido objeto de estudio desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) de Chevallard (Bosch, 1994). Por último queremos reconocer los pronunciamientos de García & Serrano (1999) y Vergel (2003) quienes realizan unas primeras aproximaciones a la perspectiva sociocultural del aprendizaje de la multiplicación.

1.3 Delimitación del problema

En el apartado anterior presentamos diversos estudios que analizan desde diferentes posturas, aspectos propios del fenómeno de aprendizaje-enseñanza de la multiplicación, también presentamos un bosquejo de una visión alternativa de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural. Este paradigma en la investigación en educación matemática, el de la perspectiva semiótica de la actividad matemática (D´Amore, 2006b; Radford, 2006b), conlleva una serie de planteamientos en torno a los ámbitos desde los cuales examinar los fenómenos de enseñar y aprender. Particularmente la TCO nos ofrece la posibilidad de concebir el fenómeno de enseñanza-aprendizaje de una forma alternativa, puntualmente se considera el aprendizaje como un proceso social de objetivación de esos patrones externos de acción fijos en la cultura, en nuestro caso esos patrones fijos de acción codificados en la cultura corresponden a la multiplicación de cantidades, la cual inicialmente consideramos como una cualidad particular de tratar números y magnitudes, entre las cuales existe cierta relación; hace parte del pensamiento matemático y a su vez hace parte de lo que se ha considerado pensamiento o razonamiento proporcional, en tanto matemáticamente, una multiplicación puede expresarse como una proporción. Anticipadamente sostenemos que, para éste estudio vamos a consideramos que el *pensamiento multiplicativo* corresponde a todas aquellas acciones físicas, mentales, corpóreas y abstractas que subyacen del tratamiento con cantidades al realizar operaciones de multiplicación, división y relaciones de proporcionalidad. Si bien el pensamiento multiplicativo está presente en distintos universos numéricos, es importante aclarar que para efectos de la investigación aquí reportada solo consideramos la multiplicación en el mundo de los enteros positivos, las fracciones, los números con coma y las proporciones.

Para estudiar las manifestaciones de los niños cuando se involucran en una labor que requiere resolver tareas de tipo multiplicativo, se escogieron, adaptaron y propusieron ciertas tareas a estudiantes de grado sexto de educación escolar con el fin de estudiar las maneras en que producen significados en torno al objeto cultural de la multiplicación. La pertinencia de realizar el estudio en estudiantes con seis años de experiencias matemáticas escolares obedece a la intención de reconocer qué en este tiempo se han instanciado algunas maneras de proceder frente al objeto multiplicación, maneras que por su efectividad podrían reaparecer en el tiempo y brindar información de cuáles son esas manifestaciones semióticas de proceder y cuáles de ellas permanecen o son resistentes al paso del tiempo. Este reconocimiento posibilita la emergencia de nuevas preguntas de investigación que indaguen acerca de las maneras en que aparecen o son generados estos recursos semióticos en los primeros niveles de escolaridad.

Asumiendo entonces como problemática la ausencia de información al respecto de la actividad semiótica del aprendizaje de la multiplicación, teniendo en cuenta que desde los trabajos presentados como antecedentes, no aparecen reseñados estudios que consideren el aprendizaje de la multiplicación escolar desde una perspectiva semiótico cultural, qué hay investigaciones que sugieren la extensión de la TCO al estudio de el aprendizaje de otros objetos matemáticos y que el fenómeno del aprendizaje de la multiplicación es susceptible de análisis desde perspectivas como el EOS o la TAD nos proponemos estudiar las manifestaciones o formas de ser y saber con respecto al objeto multiplicación, hecho que permite estudiar algunas formas de producción de significados en el pensamiento multiplicativo. En tal sentido queremos explorar sí existen y cuáles son los MSO y procesos de objetivación que caracterizan el pensamiento multiplicativo desde una perspectiva semiótico cultural. Esto se consigue a través del estudio de las manifestaciones que realizan los estudiantes cuando resuelven variadas tareas de tipo multiplicativo, que los hacen reflexionar y tomar conciencia de formas codificadas de pensar multiplicativamente, esto es, con respecto a formas prototípicas de pensar en distintas interpretaciones de la multiplicación.

Nuestra investigación no alcanza a formular todos los posibles escenarios del pensamiento multiplicativo, pero sí nos permite formular suposiciones frente a formas de acción y reflexión generales a partir de los hallazgos de las formas de acción, reflexión y expresión de los niños que participaron en este estudio. Estos hallazgos pueden ser evidencia primaria para explorar con mayor información las formas de pensamiento de los estudiantes con la multiplicación en los niveles de formación inicial. Además se convierten en insumos para avanzar en las investigaciones de las formas particulares de acción y reflexión (histórico culturalmente constituidas) de la multiplicación, como por ejemplo la interpretación de la multiplicación como suma reiterada o como producto de medidas.

En conclusión nuestra investigación se centra en estudiar las formas de acción, reflexión y expresión de los estudiantes cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, en las cuales los estudiantes toman conciencia de las formas prototípicas de pensar multiplicativamente, produciendo significados particulares de la multiplicación a través de su participación en una labor conjunta en torno a la resolución de tareas de tipo multiplicativo que exploran diferentes significados de la multiplicación entre cantidades.

1.4 Justificación

La evaluación es considerada como el mecanismo cultural que posibilita realizar mediciones de los aprendizajes de los estudiantes; hecho del cual nuestra cultura escolar no es ajena, pues contamos con los cotidianos ejercicios de evaluación de aula y de la escuela, a su vez el estado realiza mediciones de estos aprendizajes con un tipo particular de pruebas, que se supone están ajustadas a las políticas públicas en educación y adicionalmente nuestro sistema educativo se somete a evaluaciones internacionales que con otro tipo de instrumentos examinan los aprendizajes de nuestros niños. Como sostienen Rojas et al. (2011) no es justo afirmar que no saben, es necesario ofrecer marcos teóricos explicativos de estos resultados. En consecuencia creemos que no es justo afirmar que un niño no aprendió, lo que ocurre es que no se ha topado con las tareas, ni de la forma y ni en la cantidad necesaria para tomar conciencia de los aspectos propios de esas formas prototípicas de pensar y por lo tanto los significados que ha elaborado al respecto no alcanzan el estatus cultural de aceptables o socialmente compartidos.

Entre los resultados esperados y los alcances de este estudio se espera provocar en los docentes cierta sensibilidad ante las acciones de los estudiantes en la clase de matemáticas, reconociendo aprendizajes por medio de mecanismos poco tradicionales, dando relevancia a la movilización de diversos signos lingüísticos y corporales como auténticas manifestaciones de pensamiento matemático de los estudiantes, que no están netamente asociadas a la capacidad de resolver un ejercicio con exactitud. El reconocimiento de los recursos semióticos movilizados por los niños cuando se enfrentan a tareas matemáticas, provee información que contribuye a generar dictámenes frente a los aprendizajes de los niños, convirtiéndose así en una herramienta que permite ampliar la mirada de los signos que despliegan los niños cuando se ven implicados en labores conjuntas de resolución de problemas y de esta manera es posible contar con otros argumentos teóricos que posibilitarían reformas necesarias a la evaluación de los aprendizajes de los estudiantes en el área de matemáticas.

Cuando un estudiante reconoce que sus maestros lo examinan por algo más que su producción final y que es importante su acción con los objetos conceptuales, esto podría convertirse en un aspecto motivante que en alguna medida pueda significar una contribución a la actitud con la cual los estudiantes asumen la clase de matemáticas, en la cual se valoran de forma distinta sus acciones teniendo en cuenta sus posibilidades y limitaciones, dando origen a una nueva concepción de la evaluación y la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, nuestra situación problemática, susceptible y merecedora de estudio encuentra sustento en afirmaciones como la de Kilpatrick (1998) quien señala:

> La investigación acerca del proceso de aprendizaje continúa preocupándose cada vez menos por una atención exclusiva hacia las respuestas correctas o incorrectas y cada vez más hacia los procesos y las estrategias utilizadas para obtener esas respuestas. Aunque se ha hecho algún trabajo alrededor de las estructuras cognitivas que los estudiantes generan cuando resuelven tipos particulares de problemas (especialmente aquellos que involucran operaciones con números naturales o racionales), la investigación no ha logrado aclarar los esquemas cognitivos generales que se utilizan cuando se trabaja en matemáticas (Burscheid et al., 1992). Más aún, la investigación en el aprendizaje de las matemáticas se ha preocupado más por el aprendizaje individual y menos por el aprendizaje de grupos de estudiantes. Las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas, junto con sus creencias y concepciones acerca del tema, continúan atrayendo la atención de los investigadores. Sin embargo, buena parte de la investigación resultante ha carecido de una base teórica fuerte y ha sido relativamente impotente. (p. 10)

De forma análoga, y considerando también una postura ética, Bosch (2012) parafraseando a Baroody (1988, 2003) afirma que:

> Los educadores deberían comprender como aprenden matemáticas los niños para tomar decisiones eficaces en cuanto a, por ejemplo, la idoneidad de los métodos, los materiales y la secuencia del currículo. La planificación educativa debería tener en cuenta como aprenden y piensan los niños (factores cognoscitivos) y qué necesitan, sienten y valoran (factores afectivos). (p.28)

En síntesis, las alusiones referentes a la necesidad de comprender las maneras en que aprenden los niños son numerosas y provienen de distintas fuentes, hecho que ampara ejercicios investigativos como el aquí presentado que pretende aportar a esa comprensión de las formas de ser y saber de los niños con respecto a las matemáticas y en particular con respecto a la multiplicación de cantidades. Es así como, desde esta perspectiva consideramos necesario indagar, desde los constructos de la TCO, las maneras como los estudiantes desarrollan procesos de objetivación cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo; esto es, interesa analizar el proceso social de aproximación de significados personales o subjetivos a los significados histórico culturales plasmados en la semiótica de lo multiplicativo. De manera que con el reconocimiento de estos signos o expresiones se puedan empezar a gestar orientaciones particulares para la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación, pero para ello se requiere entrenar el ojo del docente (Radford, 2010d), hacerlo sensible a los detalles y capacitarle en el posible aprovechamiento de estos recursos semióticos dentro de la actividad del aula.

1.5 Pregunta de investigación

¿Cuáles son los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto (10 – 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo?

1.6 Objetivos de la investigación

Objetivo general

Identificar y estudiar los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto (10 – 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo

Objetivos específicos

- Identificar una serie de tareas de tipo multiplicativo, adaptarlas e implementarlas bajo los principios de la Teoría Cultural de la Objetivación en un grupo de estudiantes de grado sexto.
- Describir los medios semióticos de objetivación movilizados por un grupo de estudiantes de sexto grado cuando resuelven las tareas adaptadas de tipo multiplicativo.
- Describir y analizar la evolución de los medios semióticos de objetivación conforme resuelven las tareas adaptadas de tipo multiplicativo.

Capítulo 2. Marco teórico

La teoría determina
lo que puede observarse
Albert Einstein

2.1 La perspectiva semiótico cultural

Para acercarnos al reconocimiento de los signos emergentes en el desarrollo de la actividad matemática de un grupo de estudiantes de grado sexto de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo, nos situamos en una aproximación sociocultural del aprendizaje de las matemáticas, en la cual asumimos los preceptos de la perspectiva histórico cultural y puntualmente nos situamos en la teoría cultural de la objetivación (Radford, 2006a, 2013a, 2014). Asumiendo entonces una perspectiva semiótico cultural del aprendizaje de las matemáticas será necesario considerar los aspectos fundantes de la teoría y la manera en que éstos tiene su aparición en el escenario educativo.

La TCO, como teoría de orden fenomenológico (Radford, 2014) intenta dar cuenta de los procesos de enseñanza aprendizaje planteados como procesos histórico culturales que son considerados desde una postura filosófica a partir de los planteamientos hegelianos del materialismo dialéctico. En tal sentido la TCO considera la terna: general, individual y particular, como marco explicativo de las maneras en que conocemos o elaboramos significados de los objetos de nuestra cultura a través de la actividad o labor (el particular) que media entre ese saber (general) y las instanciaciones o actualizaciones que hacemos del mismo (individual).

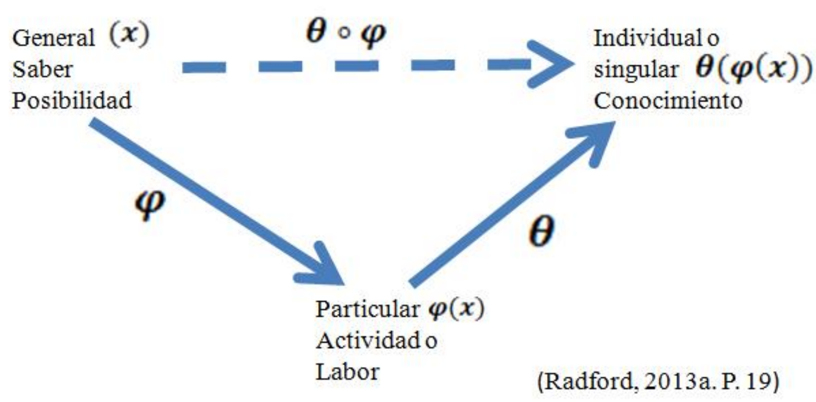


Figura 2. Postura filosófica de la TCO desde una postura Hegeliana

Radford (2013a) nomina las relaciones de esta terna. Con la relación φ refiere a nuestras intenciones pedagógicas, aquellas que son consideradas en el diseño de tareas, en las cuales debe considerarse el objeto, el objetivo y el tipo de tareas con las cuales se pretende instanciar o actualizar el saber.

La relación θ define las posibles ocurrencias de la actividad o labor como un único e irrepetible evento que puede tomar distintas formas según sea la relación φ, que transita por estados en los cuales se desarrolla la actividad o labor.

Para explicitar las anteriores relaciones y las maneras en que operan dentro de la teoría, a continuación esbozamos los principios que fundamentan la teoría considerados como dimensiones.

Dimensión ontológica: el saber, considerado como movimiento codificado y como mera posibilidad (potencial); corresponde al conjunto, cultural e históricamente constituido, de procesos corpóreos de acción y reflexión generados a través de la labor humana en el seno de unas prácticas sociales que definen un conjunto de formas de hacer, pensar y reflexionar codificadas culturalmente (Radford, 2013a).

Dimensión epistemológica: El conocimiento, de naturaleza mediada, corresponde al contenido conceptual concreto de naturaleza abstracta (actual). Es la instanciación o actualización del saber; saber que deja su huella a través de la labor que lo medió. Radford (2013a) precisa que en tanto el saber es pura posibilidad no puede ser percibido en su totalidad y por lo tanto no se puede equiparar con cualquiera de sus instanciaciones o actualizaciones. Específicamente el conocimiento comprende el significado del saber como algo general, el proceso de su actualización y el resultado de esa actualización (Radford, 2013a, p. 16). Simultáneamente, el conocimiento es considerado como el producto de una actividad humana especifica: el pensamiento, de naturaleza mediada, que es considerado como una re-flexión, "un movimiento dialectico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios" (Radford, 2006a, p. 123). Adicionalmente asumimos la tesis vygotskiana que postula que el pensamiento se puede desarrollar a través de la aparición y transformación de diversas formas de mediación semiótica (Vergel, 2014a, p. 43).

Dimensión educativa: Enseñanza-aprendizaje, es considerado como un proceso de objetivación, de toma de conciencia de los objetos matemáticos de naturaleza semiótico cultural históricamente formados.

> "La objetivación corresponde al proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento critico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas histórica y culturalmente" (Radford, 2014, p. 141).

Radford (2006a) sostiene que el aprendizaje, que es objetivación del saber, "no consiste en construir o reconstruir un conocimiento" (p. 113). Es, a su vez, elaboración de significados y toma de conciencia subjetiva de los objetos conceptuales. "se trata de dotar de sentido a los objetos conceptuales que encuentra el alumno en su cultura" (p. 113). A través de un proceso social, sensible y material de objetivación en el cual “el alumno alcanza una comprensión crítica, a través de dotación de significados, de los objetos culturales matemáticos y de la lógica cultural de éstos” (Radford, 2011b, p. 45). Por su parte la enseñanza consiste en “poner y mantener en movimiento actividades contextuales, situadas en el espacio y el tiempo, que se encaminan hacia un patrón fijo de actividad reflexiva incrustada en la cultura” (Radford, 2006a, p. 115).

Es necesario aclarar que este proceso enseñanza-aprendizaje se da dentro de la labor en sentido hegeliano o actividad en términos de Leontiev, que hace qué enseñanza-aprendizaje sean vistos como una sola e inseparable entidad. Una labor conjunta en la cual tiene lugar el conociendo y el volviéndose (Radford, 2014). De donde se resalta que en la TCO es tan importante el saber como el ser y nos permite considerar los procesos de objetivación como procesos de refinamiento progresivo de subjetividades.

Queremos hacer una precisión con respecto al termino enseñanza – aprendizaje que aquí son considerados como una sola entidad indisoluble, en tanto las condiciones en las que aparece el objeto ante los estudiantes que se comprometen en una labor, orientados por un docente, hace que el aprender y/o enseñar sean una constante y no sea posible ubicarlos en el vértice del docente o del estudiante en el ya conocido triángulo didáctico. Hecho que si podría deducirse al considerar estos procesos como independientes, toda vez que si dejamos la cualidad de la enseñanza al vértice donde se halla el docente negamos la posibilidad de que los estudiantes enseñen a otros, aporten a sus pares e incluso al mismo docente. Ahora, si dejamos el aprendizaje como cualidad exclusiva del estudiante entonces negamos la posibilidad de que el docente aprenda, sea y conozca durante su labor con los estudiantes.

Dimensión ética: el individuo, es un ser reconocido como sujeto histórico hecho por la cultura, el cual participa de prácticas sociales que lo hacen ser y saber en la cultura. Es un sujeto en formación, tanto de carne y hueso como de historia y de relaciones sociales y culturales (Radford, 2014). En tanto se considera al sujeto como individuo de, en y para[1] la cultura; se asume que el individuo participa en la aparición de la presencia del ideal a través de la actividad o labor, a través de procesos de subjetivación, definidos como:

> “Procesos mediante los cuales los sujetos toman posición en las prácticas culturales y se forman en tanto que sujetos culturales históricos únicos. La subjetivación es el proceso histórico de creación del yo” (Radford, 2014, p. 142).

Adicional a estos principios (Dimensiones ontológica, epistemológica, educativa y ética) la teoría acude a dos categorías conceptuales fundamentales. Radford (2014) señala que el principio fundamental de la teoría es la idea de labor:

> El principio central de la teoría de la objetivación está basado en el materialismo dialéctico hegeliano y su idea fundamental de la constitución dinámica y reciproca

[1] Potencialmente: puede llegar a ser

> entre ser y cultura. Los individuos crean la cultura y la cultura crea sus individuos. Para Hegel (2001), la mutua constitución de los individuos y la cultura ocurre en la labor o trabajo. (p.137)

Posteriormente nos precisa que “Es a través de la labor que encontramos los sistemas de ideas de la cultura: sistemas de ideas científicas, legales, artísticas, etc. Es también a través de la labor que encontramos formas culturales de ser” (p.138). En Radford (2013b) aclara que: “Trabajo, labor, actividad son, en efecto tres nombres que hacen referencia a una misma entidad cultural: una serie de acciones guiadas por un fin común que individuos realizan en conjunto“ (p.5).

Los cuatro principios con la categoría principal de la teoría operan dentro de un complejo entramado que se ha denominado sistemas semióticos de significación cultural, una superestructura simbólica de significados construidos por los propios individuos en el marco de una cultura (Radford, 2006a; Radford, en prensa; Vergel, 2014a). Dicha superestructura semiótica constituye la segunda piedra angular de la teoría. En otras palabras, las categorías de labor y de Sistemas Semióticos de Significación Cultural son los aspectos que sustentan la TCO. La articulación y operativización de estos principios posibilita pronunciamientos propios de la teoría y es así como a partir de la imbricación de estos principios se concibe el aprendizaje de las matemáticas como “la adquisición comunitaria de una forma de reflexión del mundo guiada por modos epistémico-culturales históricamente formados” (Radford, 2006a, p. 124).

Para acercarnos a la lógica cultural de los objetos matemáticos, en un proceso de toma de conciencia o proceso de objetivación es necesario contar con algunos medios dentro de dicho proceso, y que en la TCO son considerados como medios semióticos de objetivación, los cuales son entendidos como los objetos, herramientas, recursos lingüísticos y signos que las personas intencionalmente usan en la construcción social de significados con el fin de lograr una forma estable de conciencia, hacer evidente sus intenciones y llevar a cabo un despliegue de acciones para alcanzar el objetivo de sus actividades (Radford, 2003, 2010a). Entre estos signos observables en la conducta del sujeto se hallan los símbolos, los gestos, los movimientos, el lenguaje, los dibujos, la interacción o diálogo con otros; los cuales permiten dar cuenta de una intención comunicativa, una manifestación que pone algo de presente, toda vez que “se convierten en constituyentes mismos del acto cognitivo que posiciona al objeto conceptual no dentro de la cabeza sino en el plano social” (Radford, 2006a, p.125), además estratifican el objeto matemático en estratos de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median. En resumen, los medios semióticos de objetivación corresponden a “los objetos y signos utilizados para objetivar el saber” (Vergel, 2014a, p. 30). Estos objetos, tales como calculadoras, reglas, computadores, etc., llamados también artefactos son parte consustancial del pensamiento y están referidos a los instrumentos y sistemas de signos que mediatizan y materializan el pensamiento. Los signos por su parte son considerados desde una perspectiva Vigotskiana en la cual éstos tienen significado (Vergel 2014b) y en tanto objeto de estudio de la semiótica, asumimos que ésta se interesa por la comprensión de las maneras en que las personas significan y comunican a través de los signos (Eco, 1988, citado por Vergel, 2014a).

El posicionarnos desde una perspectiva sociocultural implica la participación en un sistema de prácticas sociales, este sistema debe ser de tal naturaleza que permita que se elaboren significados a partir de la conciencia colectiva, encaminada a la consecución de un objetivo común que se nos muestra a través de una lógica de significación y estructuración legada en el tiempo por nuestros antepasados y que nos hacen actuar, proceder, pensar y expresarnos con los objetos matemáticos de formas particulares a través de la labor.

Estos hechos se condensan en una atmosfera, un complejo espacio que trasciende lo físico, un espacio relacional en el que se gesta la zona de desarrollo próximo, en el cual la interacción es consustancial del aprendizaje y es deseable que sea un espacio de intersubjetividad, la cual "se relaciona con la medida en que los interlocutores de una situación comunicativa comparten una perspectiva" (vergel, 2014a, p 45). Un espacio de intersubjetividad en el cual la alteridad tenga pleno desarrollo y la comunión de conciencias sea de tal naturaleza que las interacciones sean portadoras de significados o de producción de saberes.

2.2 Acerca de la multiplicación

Asumiendo de Radford (2006a) que los objetos matemáticos son "patrones fijos de actividad reflexiva incrustados en el mundo constantemente en cambio de la practica social mediatizada por los artefactos" (p.124) y que "no podrá ser percibido, sino es a través de la actividad reflexiva misma" (p. 115). Nos interesa detenernos un momento en una reflexión acerca de la posición de la multiplicación como objeto cultural, en tanto asumimos que "el desarrollo del saber aparece ligado de manera íntima a su contexto social, cultural, histórico y político. No puede hacerse un análisis epistemológico sin mostrar las condiciones de posibilidad del saber en sus estratos histórico-culturales que vuelven ese saber posible" (Radford, en prensa, p.4). En consecuencia, si partimos de la definición de aprendizaje de las matemáticas dada por Radford (2006a) podemos interpretar que los modos epistémicos corresponden a las formas de conocer, formas de reflexionar y formas de hacer que los objetos se vuelvan parte de la conciencia; a su vez cuando los sitúa como "culturales históricamente formados" entendemos que emergen de prácticas propias de la cultura y que se han ido codificando en el tiempo. Estas prácticas propias de la cultura han sido a su vez mediadas por artefactos y definen modos de ser, significar, expresar, reflexionar o tomar conciencia del objeto. Entre estas prácticas propias de la cultura queremos recordar que algunas culturas han contado con maneras particulares de significar el objeto matemático multiplicación. Por ejemplo la cultura egipcia diseñó una manera de significar la multiplicación a través del método de duplicaciones y mediaciones. La cultura hindú cuenta con un recurso semiótico particular para operar con la multiplicación, conocido como el método de Celosía. Algunos campesinos rusos diseñaron un sistema similar al egipcio conocido como el método ruso de multiplicación. Las cultura china e inca significaron la multiplicación a través de sus artefactos, los chinos con las varillas de bambú y los incas con los nudos en las cuerdas configuraron formas de reflexión particulares, que mediadas por los artefactos les permitieron significar la multiplicación de cantidades. En la cultura griega se pueden definir incluso no una sino varias formas de significar la multiplicación de una manera más técnica. En Los Elementos de Euclides pueden distinguirse por ejemplo usos de la multiplicación como suma reiterada, como producto de medidas y como proporción, inclusive hace uso de distintas unidades para ello y trasciende de las magnitudes a los números.

La multiplicación, que puede entenderse, como una sofisticada elaboración conceptual de conteos, ha sido mediada a través del cuerpo en varias culturas: por ejemplo los mayas utilizaron las articulaciones (13) y los dedos de manos y pies (20) para realizar conteos e incluso formar desde allí su sistema de numeración. La tribu Yuki de California utilizaba la base cuatro haciendo uso de los "huecos" que hay entre los dedos de la mano. Una tribu brasileña hacía uso de las tres articulaciones de las falanges de los dedos para hacer conteos en base tres. Este recurso antropomorfo no es casual, de allí se infiere porque en algunos sistemas (e.g. romano, maya) se distingue un signo particular para el cinco en asociación a la cantidad de dedos en la mano y de hecho la mejor justificación de nuestra base de numeración obedece a la cantidad de dedos en nuestras manos.

Desde las investigaciones realizadas, en educación matemática, en torno a la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación subyacen diferentes interpretaciones o significados de la multiplicación escolar que permiten acercarnos a las maneras en que los niños logran elaborar significados de este objeto matemático. En una revisión de textos colombianos Bonilla & Romero (2008) reportan algunas de las definiciones halladas, tales como: una suma de sumandos iguales, como cardinal del producto cartesiano, como operación de composición interna y como una aplicación o función entre conjuntos. En los estándares del área de matemáticas (MEN, 2006) se reconoce la existencia de distintos significados o maneras de entender la multiplicación, aunque no se especifican cuales. En Mojica & Zamora (2009) se reportaron cuatro posibles interpretaciones: suma reiterada, producto de medidas, isomorfismo de medidas y cambio de unidad. Inclusive, de los tipos de problemas verbales analizados en Greer (1992) subyacen posibles interpretaciones de la multiplicación según la estructura semántica y sintáctica de las tareas o problemas verbales de tipo multiplicativo.

Comprender la multiplicación como un sofisticado conteo es solo uno de los significados culturalmente atribuidos a la multiplicación y al respecto también la investigación ha generado serios pronunciamientos, por un lado aparece la teoría de los modelos intuitivos de Fishbein, et al. (1985) que propone modos intuitivos o primitivos de acción con respecto a la multiplicación, entre los cuales aparece el de la suma reiterada. Por su parte Lamon (1994) y Steffe (1994) plantean que los modos de reflexión con respecto a la multiplicación se originan en la composición de unidades compuestas y Castro & Castro (2010) consideran un esquema de correspondencia uno a muchos como previo al esquema de suma reiterada o composición de unidades compuestas. Inclusive nos pareció pertinente indagar con el autor de la TCO, acerca de su concepción al respecto y el considera que la multiplicación puede considerarse como una operación repetida sobre grupos de unidades (comunicación personal 08 de Enero de 2014).

Este ligero panorama es solo una parte de las diferentes interpretaciones que pueden darse a la multiplicación y que complejizan una categorización definitiva de tales significados socialmente compartidos, por lo cual sostenemos que no es posible reducir los significados de la multiplicación solamente al tipo de procedimiento matemático o actividad intelectual requerido para su solución, pues existen otros aspectos, por ejemplo semióticos, que pueden explicar las maneras particulares de significar la multiplicación, tal es el caso del establecimiento de relaciones o correspondencias semiótico corporalmente mediadas, las cuales constituyen una forma de acción y reflexión con las cantidades y puede corresponder a un estado de significación de la multiplicación, es decir que puede interpretarse de esa forma, mientras que para otras posturas teóricas establecer relaciones o correspondencias es considerado como una habilidad o una estrategia usada para resolver una tarea de tipo multiplicativo.

Como se comentó, el significado de la multiplicación a partir de conteos ha estado semiótico culturalmente mediado por artefactos y esto constituye una más de sus posibles formas de aparición concreta, sin embargo debe tenerse en cuenta que el tipo de números utilizados impone la necesidad de elaborar otros significados para la multiplicación, al respecto también han sido varios los estudios que consideran esta variable didáctica al momento de definir la multiplicación (Harel et al., 1994; Fishbein, et all., 1985; Schwartz,1988).

De esta variedad de acercamientos a la multiplicación consideramos más pertinentes aquellos que centran su atención en la conformación de unidades múltiples (Harel & Confrey, 1994; Steffe, 1994; Lamon, 1994, 1996), ya que consideramos que a partir de la construcción de estas unidades múltiples se subsume el modelo de suma reiterada y el de correspondencias uno a muchos. A partir de estos planteamientos Rojas et al. (2011) proponen re conceptuar la multiplicación como un cambio de unidades

> Re-conceptuar la multiplicación como cambio de unidades, es entender que cuando se multiplica, lo que esencialmente se hace es expresar una cantidad o magnitud, no necesariamente entera, de una cierta cantidad o magnitud unidad, en términos de otra unidad, y que para llevar a cabo tal cambio de unidad, se realizan procesos de unitizacion y normación. (p.58)

Los procesos de unitización y normación son definidos por Lamon (1994) como procesos sicológicos fundamentales en la comprensión de la multiplicación, las razones y las proporciones. La unitización hace referencia a la construcción de unidades múltiples y la normación a la interpretación y reinterpretación de una situación a partir de la unidad múltiple construida (Lamon, 1994).

Es necesario precisar que esta interpretación de la multiplicación como cambio de unidades también tiene una historia y fue la manera en que, en algún momento, algunas culturas, particularmente la occidental asumió para interpretar la multiplicación, toda vez que ésta es vista como una relación cuaternaria en la cual la unidad se usa para medir un factor en proporción a como el uno mide el otro factor, tal interpretación aparece en algunos textos escolares clásicos:

“Multiplicar una cantidad por otra es buscar una tercera cantidad, que tenga tantas de la primera, como unidades tiene la segunda, o que tenga tantas cantidades de la segunda, como unidades tuviere la primera.” (Padilla, 1732, p. 15)

“La multiplicación es una operación que tiene por objeto dados dos números hallar un tercero que sea respecto a uno de ellos lo que es el otro respecto de la unidad.” (Dalmau, 1938, p.36)

La multiplicación es una operación de composición que tiene por objeto, dados dos números llamados multiplicando y multiplicador, hallar un número llamado producto, que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad.” (Baldor, 1969, p. 90)

Esta interpretación de la multiplicación debería ser la ideal, una forma de acción y reflexión deseada para la formación matemática escolar de nuestros estudiantes, ya que en ella se encuentran subsumidas otras interpretaciones de la multiplicación y permite acudir a una misma forma de reflexión para multiplicar números enteros y números racionales positivos, tanto en sus numerales como fracción o como números con coma.

En conclusión y de acuerdo a la definición de objeto matemático de la TCO consideramos, para efectos de este estudio, que la multiplicación corresponde al objeto matemático de origen histórico cultural, con diversas formas de significación y por lo tanto de expresión semiótica, que se instancia y se actualiza a través del encuentro con los objetos de la cultura. Es considerada como una operación entre números o cantidades que requiere realizar cambios de unidad y por lo tanto llevar a cabo procesos de unitización y normación. El proceso de objetivación del objeto multiplicación es perpetuo por lo que asumimos que con ella, la multiplicación, realizamos acercamientos o producción de significados en torno a formas prototípicas de pensar multiplicativamente. Al ser un objeto matemático que aparece en la cultura escolar, podemos considerarlo como multiplicación escolar, sin embargo queremos precisar que con este término nos estamos refiriendo a la multiplicación que se realiza entre números enteros positivos, fracciones y proporciones; excluyendo así los números irracionales, las funciones, las matrices y otros espacios, que no son objeto de estudio en este trabajo, pero que pueden generar ulterior investigación.

2.2.1 Acerca del pensamiento multiplicativo. En algunas teorías el pensamiento tiende a clasificarse desde diversos criterios, por ejemplo la epistemología genética de Piaget define tipos de pensamiento asociados a etapas de desarrollo, Gardner en su teoría de las inteligencias múltiples considera la inteligencia lógico matemática como un tipo de pensamiento y en general puede reconocerse una tendencia a clasificar el pensamiento matemático de acuerdo al objeto matemático de referencia o al dominio particular al cual se refiere (e.g. pensamiento numérico, algebraico, métrico, variacional, etc.). En nuestro contexto escolar el pensamiento matemático puede considerarse subdividido en cinco tipos de pensamientos (MEN, 2006) entre los que figura el pensamiento numérico el cual tiene que ver con la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración, así como de las operaciones y de las relaciones entre números y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo que exigen dominar un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos. Posicionados desde el pensamiento numérico es posible considerar al pensamiento multiplicativo inmerso en éste, sin embargo este tipo de praxis reflexiva sostiene fuertes nexos con otros tipos de formas de acción y reflexión por ejemplo con el pensamiento aditivo, el pensamiento relacional o el pensamiento proporcional, sin excluir la posibilidad de pensamiento multiplicativo en otros dominios como el pensamiento métrico, el variacional o el algebraico.

Como se mencionó en el capítulo de antecedentes uno de los marcos interpretativos más difundidos en torno a la multiplicación corresponde a la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1994), quien sitúa la multiplicación dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas que en términos muy generales, está referido a todas aquellas situaciones que pueden resolverse a través de una multiplicación o división y que según señala Vergel (2003) dicha teoría podría llegara a ser compatible con una perspectiva sociocultural del aprendizaje de la multiplicación.

Siemon, Breed & Virgona (2005), Siemon, Izard, Breed & Virgona (2006) y Castro & Castro (2010) caracterizan el pensamiento multiplicativo por la capacidad de trabajar flexible y eficientemente con un rango extendido de números, la habilidad para reconocer y resolver una serie de problemas de multiplicación o división incluyendo proporciones directas e indirectas y los medios para comunicarse de manera eficaz en una variedad de formas. Puntualmente definen el pensamiento multiplicativo como "multiplicative thinking is indicated by a capacity to work flexibly with the concepts, strategies and representations of multiplication (and division) as they occur in a wide range of contexts" (Siemon, Breed & Virgona, 2005, p.2).

Ahora, teniendo en cuenta que "el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a sus múltiples tareas" (Bosch, 2012, p. 17) nos cuestionamos acerca de ¿qué se considera pensamiento multiplicativo?, lo cual es una pregunta suficientemente compleja para admitir única respuesta. Desde nuestra postura teórica y según el tipo de tareas adoptadas podemos proponer una caracterización inicial: teniendo en cuenta que en la TCO el pensamiento, de naturaleza semióticamente mediada, es considerado como una re-flexión, una praxis reflexiva de acuerdo a la forma de la actividad de los individuos que se desarrolla en el curso de los contactos que se tienen con el objeto que se refleja, y que lo multiplicativo refiere a todo aquel objeto matemático (desde la perspectiva semiótico cultural) que en su definición histórico cultural tiene o ha tenido que relacionar cantidades en las que se puede establecer relaciones de asociación, correspondencia, partición entre unidades de distinto tipo y por lo tanto cambios de unidad. Consideramos que *el pensamiento multiplicativo es una forma codificada de pensar, constituida historico-culturalmente, con respecto a la relación de números o cantidades, es una forma de reflexión, sujeta a una lógica cultural, que requiere de formas particulares de acción y expresión semiótica, en las cuales se movilizan distintos recursos semióticos*, *involucra conceptos, estrategias y representaciones y está referido al proceso social de toma de conciencia desarrollado en, durante y para resolver tareas asociadas a la multiplicación, la división y las proporciones con números enteros positivos, números con coma y fracciones. En dicho proceso social se usan distintos tipos de conteos con unidades simples y múltiples y por lo tanto requiere del uso de procesos de unitización y normación que posibilita establecer nexos con otras formas culturalmente codificadas de pensar con respecto a las cantidades y sus relaciones.*

2.2.2 Acerca de las tareas de tipo multiplicativo. Cuando nos referimos a tareas de tipo multiplicativo, distinto de actividades o situaciones, estamos refiriendo tareas que para su solución requieren el uso de la multiplicación o la división, puntualmente y considerando el reconocimiento que hacemos de los procesos de unitización y normación concordamos con Steffe (1994) cuando afirma que “ para que una situación pueda considerarse como multiplicativa, al menos es necesario coordinar dos unidades compuestas, en el sentido de que una de las unidades compuestas se distribuye a lo largo de los elementos de la otra unidad compuesta” (p. 19). A su vez, podría relacionarse las tareas de tipo multiplicativo con las situaciones[2] de estructura multiplicativa del campo conceptual multiplicativo de Vergnaud (1994), pero nuestras tareas no corresponden fielmente a dicho enfoque en tanto los postulados epistemológicos de Verganud discrepan de los adoptados por Radford, por el contrario, el enfoque asumido nos lleva a considerar los planteamientos de La Teoría de la Actividad de Leontiev (1977) para el cual una actividad[3] es considerada como

> Un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objetivo impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales, objetivo que se alcanza a través de acciones

[2]“El concepto de situación no tiene aquí el sentido de situación didáctica sino más bien el de tarea, la idea es que toda situación compleja se puede analizar como una combinación de tareas de las que es importante conocer la naturaleza y la dificultad propias” (Vergnaud, 1990, p. 8)

[3] Actividad dentro de la cual se resuelven las tareas de tipo multiplicativo.

mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva escrita en estos últimos por generaciones pasadas. (Radford, 2008b, p. 741)

Es necesario precisar que las tareas de tipo multiplicativo pueden ser de distinto tipo y por lo tanto implican diferentes interpretaciones de la multiplicación, al respecto Greer (1994) propone una variedad de situaciones que encarnan las relaciones multiplicativas clasificadas en cinco complejos conceptuales:

1. Arreglos rectangulares, área rectangular, producto cartesiano, problemas de combinatoria, producto de medidas.
2. Proporcionalidad, semejanza geométrica, proporcionalidad múltiple, análisis dimensional.
3. Comparación multiplicativa, relaciones parte todo, cambio multiplicativo, crecimiento, potenciación.
4. Cambio de unidad, conversión de medidas.
5. Cantidades intensivas, Factores de conversión, función lineal. (p. 73)

Particularmente consideramos que las tareas de tipo multiplicativo son aquellas que provocan interacciones, que son interesantes para los estudiantes, que permiten la reflexión y que posibilitan el uso de artefactos en torno a tareas que para su solución requieren el uso de la multiplicación o la división, es decir que requieren hacer uso de procesos de unitización y normación. La resolución de estas tareas persigue como objeto la instanciación o actualización del saber que produce formas prototípicas, culturalmente codificadas, de pensar multiplicativamente. Estas tareas hacen parte de la actividad o labor, considerada como el particular en la terna hegeliana y su diseño se considera en la relación φ, mientras que su realización se ubica en la relación θ. Por lo cual es necesario considerar las tareas como parte consustancial del aprendizaje que se gesta en la implicación en una labor conjunta que tiene un objetivo y un objeto (Ver figura 3)

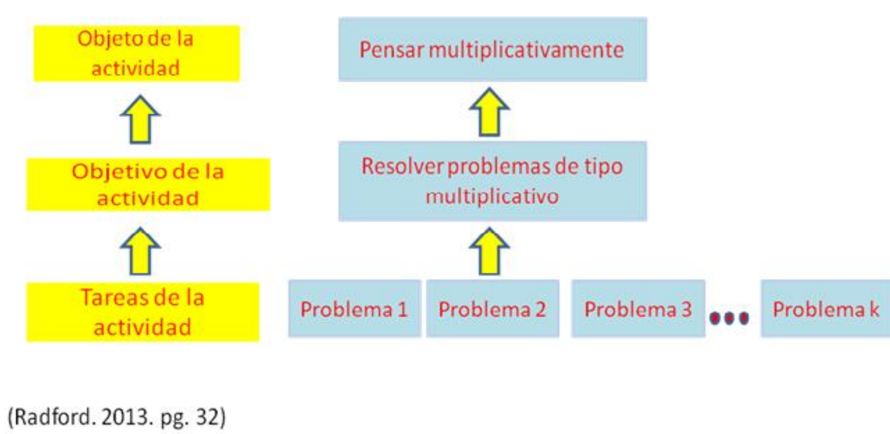


Figura 3. Estructura de la labor considerada como el particular en la terna hegeliana. Adaptación para el pensamiento multiplicativo.

2.3 Objetivación y multiplicación

No queremos limitarnos únicamente a explorar los MSO y procesos de objetivación en la resolución de ciertas tareas dentro de una labor, quisimos además sondear si algunas de las categorías halladas por Radford en el pensamiento algebraico tienen presencia o aparición en este tipo de labores y qué podría decirse con respecto a estas categorías cuando se extrapolan al pensamiento multiplicativo.

El primer aspecto del que se desea dar cuenta corresponde al concepto de actividad en el sentido de Leontiev, que ha venido siendo reelaborado desde una perspectiva hegeliana que sitúa a la actividad en términos de labor, en un sentido dialéctico materialista en el cual estos dos términos hacen referencia "a una misma entidad cultural: una serie de acciones guiadas por un fin común que individuos realizan en conjunto" (Radford, 2013a, p.5). Es al interior de la labor donde se gestan las interacciones, consustanciales del aprendizaje, que provocan la elaboración de significados de los objetos matemáticos, interacciones que han sido teorizadas a través del espacio de acción conjunta y el Togethering (Radford & Roth, 2010). El primero se caracteriza, como señala Vergel (2014a), como un verdadero espacio de intersubjetividad, en donde "el pensamiento aparece como un fenómeno colectivo" (Radford & Roth, 2010, p. 6). El segundo corresponde a "la manera ética en que los individuos se involucran, responden y ajustan el uno al otro, a pesar de sus diferencias cognitivas y emocionales" (Radford & Roth, 2010, p. 10). La labor ha de poder convertirse en un espacio relacional en el que se halla la zona de desarrollo próximo, en el cual la alteridad y el encuentro ético y responsable de conciencias permiten no solo saber sino ser con otros.

En el pensamiento algebraico, específicamente en tareas asociadas a la generalización de patrones, se han reportado la existencia de distintos MSO que emergen en los procesos de objetivación. Estos MSO se detectan y analizan a través de sus manifestaciones en o durante el despliegue de la labor y son considerados como signos mediadores que trascienden al plano material y logran encarnarse por ejemplo en gestos o palabras, que son considerados signos que están cargados de un significado y que son portadores de una intención que se materializa a través del cuerpo.

Para Radford (2003, 2005, 2006a, 2006c, 2012a) los procesos de objetivación están relacionados con los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes en el transcurso de la labor y que son desplegados como consecuencia de la tarea propuesta que los provoca. Estos MSO pueden ser lingüísticos o Kinestésicos y corresponden a los signos que los sujetos utilizan para hacer visibles sus intenciones. Entre los MSO lingüísticos se hallan los deícticos espaciales o temporales y entre los kinestésicos se hallan las inscripciones, los señalamientos, el movimiento, la percepción, el tono, el ritmo de la entonación y los gestos que emergen para representar algo, explicar o entender una tarea, comunicar un posicionamiento subjetivo o en resumen para ser y saber dentro de una labor conjunta.

Cuando estos MSO son de carácter sincrónico y se movilizan de forma simultánea nos hallamos ante un nodo semiótico, "un segmento de la actividad de enseñanza aprendizaje en la que signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos se complementan para generar una toma de conciencia" (Radford, 2013b, p. 11). El estudio de estos nodos semióticos ha generado la posibilidad de distinguir nodos semióticos particulares y nodos semióticos colectivos (Gómez, 2013), en estos últimos, varios sujetos movilizan sincrónicamente distintos recursos semióticos durante la solución de la tarea.

Las significaciones y formas de pensar matemáticamente que halla el niño en su cultura pasan por procesos de objetivación en los cuales los estudiantes convierten el saber en sí mismo (in itself) en un saber para sí mismo (for itself) (Radford, 2013a). Estos procesos son perpetuos y por lo tanto se constituyen de instanciaciones o actualizaciones del saber. En las investigaciones adelantadas por Radford hasta el momento se han identificado dos de estos procesos, que se han denominado contracción semiótica e iconicidad (Radford, 2008a).

La *contracción semiótica* corresponde a un refinamiento o reducción de los recursos semióticos movilizados, razón por la que se le considera como una evolución de los nodos semióticos. Es un proceso en el que se decide entre lo que es relevante e irrelevante y conduce a un nivel más profundo de inteligibilidad de la tarea, es un síntoma de aprendizaje (Radford, 2012, p. 686). La *iconicidad* es entendida como una manera de darse cuenta de rasgos similares en un procedimiento anterior, estableciendo diferencias entre lo igual y lo diferente, es decir en lo invariante y que por lo tanto requiere del contraste entre dos formas conceptuales dadas. Es el proceso a través del cual los estudiantes se basan en experiencias anteriores para orientar o proyectar sus acciones en una nueva situación (Radford, 2008a).

2.4 Estratos de generalidad en el pensamiento multiplicativo. Un resultado previo. Consideramos necesario incluir en este aparte del escrito una sección que nos permitiera presentar algunas de las conjeturas de la investigación, que se soportarán en elementos teóricos, pero que emergieron de los análisis de los datos, ya que con estas conjeturas se realizará la presentación de las tareas y el análisis de los datos de la investigación. Teniendo presente que el objetivo de nuestro estudio es identificar y estudiar los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto cuando resuelven ciertas tareas de tipo multiplicativo y una vez realizado el análisis de los datos, encontramos evidencia empírica para sugerir la existencia del proceso de objetivación contracción semiótica como la evolución de los nodos semióticos y la economía y sobriedad en los recursos semióticos desplegados durante la resolución de las tareas y de igual manera presentamos indicios del proceso de objetivación iconicidad a partir del aprovechamiento de experiencias anteriores. Sin embargo, y como parte de nuestro objetivo, debíamos estudiar dichos procesos de objetivación, razón por la cual fue necesario caracterizar estos procesos de objetivación, y es allí cuando nos encontramos con la posibilidad de sugerir ciertos estratos de inteligibilidad o generalidad en el pensamiento multiplicativo, así como posibles vectores del mismo a través de un contraste entre los elementos de la TCO y nuestros datos.

Es común encontrar en la literatura referida al estudio de la enseñanza-aprendizaje de la multiplicación una categorización con respecto a los estados por los cuales se transita para lograr el aprendizaje de la multiplicación. Al respecto queremos presentar algunos ejemplos: Lamon (1994) definió niveles de complejidad en los procesos de unitizacion para la multiplicación: modelando y contando, donde se forman unidades experienciales; componiendo, donde se van formando y contando repetidamente unidades compuestas; abstrayendo, en donde se forman unidades iterables y por ultimo relacionando, en donde se reconoce la relación parte-parte-todo en la cual la unidad se reconoce compuesta por partes que también pueden ser compuestas. Mulligan & Wright (2000) describen cinco niveles en la comprensión de la multiplicación y la división: agrupamiento simple, conteo perceptivo, consideración de unidades compuestas de tipo figurativo, sumas y restas repetidas y consideración de la multiplicación y la división como operaciones abstractas. Por su parte Olive (2001) considera como pieza clave para el desarrollo de esquemas multiplicativos la construcción de unidades iterables y sugiere cuatro etapas en el proceso de establecer esquemas multiplicativos: Formar unidades compuestas, usar estas unidades para contar, medir, comparar, etc, formar una composición numérica de las unidades compuestas como resultado de las operaciones y por último reinteriorizar la secuencia numérica para tomar los resultados de las operaciones con unidades compuestas como insumo para operaciones posteriores y Jacob & Willis (2003) identificaron cinco fases en el desarrollo del pensamiento multiplicativo: conteo uno a uno, composición aditiva, conteo de uno a muchos, relaciones multiplicativas y operando con los operadores.

El anterior panorama nos ofrece un escenario ante el cual nos declaramos impotentes de generar pronunciamientos, dado que el estudio realizado no logra dar cuenta detallada de estos estados o fases en el desarrollo del pensamiento multiplicativo desde una perspectiva semiótico cultural, sin embargo queremos proponer, desde los datos obtenidos, una caracterización inicial del pensamiento multiplicativo a través de estratos de generalidad, extrapolando éstos del pensamiento algebraico al pensamiento multiplicativo. Es decir extrapolamos las categorías de pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico al pensamiento multiplicativo.

Radford (2010b) define formas de pensamiento algebraico caracterizadas por los MSO desplegados durante la actividad y sostiene que estas formas de pensamiento corresponden a estratos de generalidad o inteligibilidad en los cuales se puede distinguir un refinamiento en la toma de conciencia a partir de los procesos de contracción semiótica. Puntualmente define un pensamiento algebraico factual, otro contextual y uno simbólico, en cada uno de los cuales están presentes tres elementos o vectores propios del pensamiento algebraico: la indeterminancia, la analiticidad y la expresión semiótica (Radford, 2010b).

Tras haber evidenciado la movilización de distintos recursos semióticos durante la labor de los estudiantes en tareas asociadas al pensamiento multiplicativo consideramos que estos recursos semióticos o MSO están dando cuenta de instanciaciones de formas prototípicas de pensar multiplicativamente en ciertos estratos de inteligibilidad o generalidad, caracterizados por la movilización de diferentes tipos de signos que demuestran particulares formas de acción y reflexión. Por lo tanto sugerimos que en el pensamiento multiplicativo podrían existir unos estratos de generalidad o significación tales como el pensamiento multiplicativo factual, contextual y simbólico, caracterizados por los medios semióticos de objetivación movilizados durante la solución de tareas de tipo multiplicativo como las propuestas en este estudio.

Vergel (2014a) afirma que “la objetivación del saber presupone el encuentro con un objeto cuya apariencia en nuestra conciencia sólo es posible a través de contrastes” (p.100). A partir de lo cual queremos contrastar en nuestra toma de conciencia de los aspectos característicos del pensamiento multiplicativo las características del pensamiento algebraico que pueden extrapolarse al pensamiento multiplicativo. De tal manera que proponemos una caracterización del pensamiento multiplicativo en los siguientes términos:

En el pensamiento algebraico se proponen estratos de inteligibilidad que refieren al estado en el proceso de toma de conciencia. De forma análoga y considerando que el proceso de objetivación del saber requiere la producción o elaboración de significados en torno al objeto matemático, proponemos nominar unos estratos de generalidad con respecto a la multiplicación, que están refiriendo a estratos de inteligibilidad o niveles de toma de conciencia con respecto a la multiplicación, los cuales también están caracterizados por MSO particulares en cada estrato de generalidad para la multiplicación.

Con el fin de precisar estos estratos de generalidad proponemos un contraste entre cada uno de estos tipos de pensamiento:

> *Pensamiento algebraico factual*. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números; por lo que podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita. (Vergel, 2014a, p.79)

Pensamiento multiplicativo factual: caracterizado por acciones intuitivas, orientadas principalmente por los sentidos, en el cual no se alcanzan a establecer relaciones o asociaciones y no se trasciende de los conteos o los trazos, éstos se quedan en intentos para establecer una correspondencia, es decir que aun no se logra conformar unidades múltiples y por lo tanto el proceso de unitización se halla en un nivel inicial. Es una etapa pre simbólica en la que no aparecen palabras clave, abundan los deícticos espaciales y los kinestesicos indexicales, hay un amplio despliegue de actividad perceptual, el ritmo y el tono en la entonación son manifestados de forma privilegiada con respecto a los trazos, señalamientos, deslizamientos e inscripciones. Las acciones no consideran aspectos propios de la tarea y se realizan dibujos o gráficos pero sobre ellos no recae ninguna acción posterior.

> *Pensamiento algebraico contextual*. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases "clave". En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice "arriba quito uno" o "dos por la figura más uno", o "# de la figura + 1 para la fila de arriba y # de la figura + 2 para la de abajo. Sumar los dos para el total". Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos. (Vergel, 2014a, p.80).

Pensamiento multiplicativo contextual: Los gestos y las palabras se vuelven un tanto más refinados. La unitización y la correspondencia entre la unidad múltiple construida y la otra cantidad se pueden hacer explícitas, se pueden volver objeto del discurso al describir la relación entre las cantidades. Por ejemplo, los niños afirman "por cada tres" o "estos con estos", o "sumar los de acá con los de acá" o "hay que multiplicar estos, con estos" o "multiplicando es más fácil". Hay un menor despliegue de recursos semióticos en comparación al estrato anterior, se usan deícticos espaciales y temporales, se construyen frases o palabras clave, aparecen ideas o formas de acción propias o novedosas, se ajustan las acciones a requerimientos de la tarea, emergen los dibujos o gráficos para operar con o sobre ellos, se gestan traducciones del lenguaje natural al lenguaje simbólico, la alteridad es fundamental en este estrato, en el cual se someten a consideración las estrategias individuales y se crean espacios de intersubjetividad en el cual se escucha, evalúa y genera posicionamiento critico frente a estrategias propias o ajenas, se realizan nexos con otros objetos matemáticos, emerge la iconicidad y en consecuencia se ensaya y erra con las estrategias propuestas como poniéndolas a prueba.

> *Pensamiento algebraico simbólico*. Las frases "clave" son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra. Por ejemplo, mediante expresiones como: $n+(n-1)$ ó $2n - 1$. Según Radford (2010a, p. 8), en este estrato de pensamiento "hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso", a través de signos alfanuméricos del álgebra, lo cual hace pensar en otro estado del proceso de objetivación de contracción semiótica. (Vergel, 2014a, p.80)

Pensamiento multiplicativo simbólico. Las frases "clave" son representadas por símbolos numéricos sobre los cuales recaen las acciones. Se generan formas de acción reflejadas principalmente en el uso de signos numéricos que ofrecen una sobriedad a los MSO, aparece el uso consciente de símbolos numéricos, se efectúan operaciones con entes abstractos, se opera con ellos sin acudir necesariamente a un contexto, las acciones se pueden generalizar y es posible hallar frases como “para el que sea” o “en cualquier caso”. La normación puede llegar a ser explicita y pueden componerse o descomponerse distintos tipos de unidades. Se infieren o descubren propiedades de los números a partir de las operaciones entre ellos, se establece un manejo ágil de las cuentas y del cálculo mental. Se consideran explícitamente nexos con distintos tipos de cantidades, se pueden establecer razones y proporciones y representar una tarea de tipo multiplicativo como un cambio de unidades o como un par de parejas particular en una relación de proporcionalidad o como una función lineal.

Para pasar de un estrato de generalidad a otro se producen contracciones semióticas que no son homogéneas, ni lineales, ni cíclicas, no son dependientes las unas de las otras. Proponemos que en estos estratos de pensamiento, evidenciados por la acción, puede darse simultáneamente un proceso de dilatación semiótica, es decir un proceso en el que la expresión semiótica puede extenderse, dilatarse o hacerse nuevamente explicita y da cuenta del potencial de los procesos comunicativos en los que se requiere explicar o comunicar a otros las formas de reflexión que orientan la acción, por lo tanto consideramos que cada tipo de pensamiento se caracteriza por contracciones y dilataciones semióticas que permiten transitar indistintamente por estratos de generalidad que son estados generales del pensamiento, en los cuales la reflexión, en tanto movimiento dialectico, puede tomar varias formas y permiten el tránsito entre distintos estratos de generalidad. Dichas formas de expresión semiótica tienden a volverse estables pero van siendo subsumidas y los signos van mutando y tienden a desparecer del plano material para incorporarse en un plano ideal y abstracto (contracción), no obstante es posible que ocasionalmente estos signos vuelvan a aparecer en el plano material, es decir vuelvan a corporeizarse o se vuelvan nuevamente corpóreos (dilatación).

De forma análoga y considerando que Radford ha definido tres vectores propios del pensamiento algebraico, consideramos prematuro formular aspectos característicos del pensamiento multiplicativo que puedan considerarse como vectores, en cambio consideramos que es posible distinguir tanto en la literatura como en el despliegue de signos realizado por los estudiantes objeto de estudio en esta investigación, algunos elementos que permitirían caracterizar el pensamiento multiplicativo a partir de las formas prototípicas de acción y reflexión de los niños con respecto a la multiplicación. Tales elementos característicos del pensamiento multiplicativo son: el establecimiento de relaciones entre cantidades; la asociación; la agrupación; la correspondencia; la formación, partición e interpretación de unidades de distinto tipo y los distintos conteos que se hacen con unidades simples y múltiples. Estos elementos característicos del pensamiento multiplicativo nos permiten sugerir que dichos elementos pueden hallarse inmersos en dos procesos complejos, no necesariamente explícitos, que conjeturamos podrían ser considerados como vectores del pensamiento multiplicativo, a saber los procesos de unitización y normación.

Es importante aclarar que los estratos de generalidad propuestos son generales y varían según la interpretación de la multiplicación (suma reiterada, combinación, producto de medidas, proporción, operación), según el conjunto numérico de referencia y según el tipo de tareas. Esto quiere decir que reconocemos unos estratos de generalidad que pueden tener características distintas según el tipo de tareas o el tipo de cantidades, dado que la estructura de las tareas propulsa o requiere modos particulares de reflexión que cambian según cada individuo y que no son siempre las mismas, adicionalmente la labor en tanto evento puede tomar distintos rumbos que impiden por ejemplo referir un modo de acción estándar según la estructura de las tareas. Este hecho se corrobora cuando en tareas que por su estructura semántica y sintáctica sugieren una forma particular de acción y reflexión pero la labor orienta las acciones de los niños hacia otras formas de ser y saber con la multiplicación y que posibilitan establecer nexos con otras formas culturalmente codificadas de pensar con respecto a las cantidades y sus relaciones, adicionalmente en la labor intervienen las experiencias matemáticas de los niños, que están dando cuenta de su legado histórico y cultural.

Capítulo 3. Metodología

nunca la vida es nuestra, es de los otros,
la vida no es de nadie, todos somos
la vida —pan de sol para los otros,
los otros todos que nosotros somos—,
soy otro cuando soy, los actos míos
son más míos si son también de todos,
para que se pueda ser he de ser otro,
salir de mí, buscarme entre los otros,
los otros que no son si yo no existo,
los otros que me dan plena existencia,
no soy, no hay yo, siempre somos nosotros

Fragmento de Piedra de Sol. Octavio Paz

3.1 Contexto del estudio

El estudio se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa de tipo exploratorio, descriptivo y explicativo (Latorre, Del Rincón & Arnal, 2003). De acuerdo con estos autores se considera exploratorio en tanto se realiza para obtener un primer acercamiento a la situación, en este caso los procesos de objetivación y los MSO movilizados por un grupo de estudiantes de grado sexto cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo. Es descriptivo porque se busca describir un fenómeno tal como aparece en el momento de realizarse el estudio, en nuestro caso, las formas prototípicas de pensar multiplicativamente manifestadas por los niños durante la solución de las tareas. Y se considera explicativo al querer explicar el fenómeno, sus relaciones, estructura y la dinámica de los factores que intervienen, en este caso la TCO nos permite explicar la naturaleza del fenómeno a investigar, esto es, los procesos de objetivación de formas prototípicas de pensamiento multiplicativo manifestadas a través de los MSO. Simultáneamente y por las características de la población objeto de estudio esta investigación puede enmarcarse dentro de un estudio de caso, al registrar las dinámicas particulares en un contexto singular (Martínez, 2006), es decir, un grupo de estudiantes de grado sexto de un colegio público en la ciudad de Bogotá – Colombia.

El estudio se desarrolló en el colegio Instituto Técnico Industrial Piloto de la localidad de Tunjuelito, Bogotá- Colombia y en éste participaron 36 niños y niñas del curso 602 jornada mañana cuyas edades oscilan entre los 10 y 13 años, son mayoritariamente pertenecientes al estrato socioeconómico 2 y viven en las zonas aledañas al colegio. La investigación se desarrolló entre el 02 de Octubre y el 18 de Noviembre de 2013, una sesión de 100 minutos por semana. Cada una de las siete sesiones correspondía a una de las clases habituales de matemáticas de los estudiantes y durante éstas el profesor titular de la asignatura estuvo presente de forma intermitente, de manera que el autor del presente estudio asumió el papel de orientar la actividad y a su vez actuaba como investigador. Es necesario aclarar que en cada sesión se afrontó la pérdida de 10 a 20 minutos por el consumo del refrigerio que otorga la Secretaría de Educación Distrital a los estudiantes. Teniendo en cuenta que los estudiantes participantes de esta investigación son menores de edad, éstos contaban con la respectiva autorización de sus padres y el aval de la institución, protegiendo así la integridad de los niños considerada en la legislación colombiana al respecto de las grabaciones con menores de edad.

3.2 Diseño metodológico

Para el desarrollo de la investigación se cuenta con el diseño metodológico de la figura 4, adaptado del diseño utilizado en Radford (2010b) para realizar una investigación longitudinal.

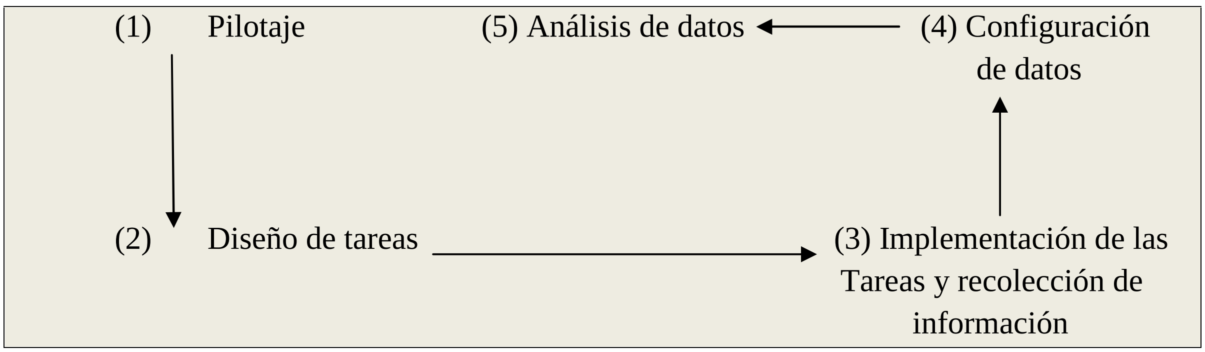


Figura 4. Diseño metodológico del estudio. Adaptación de Radford (2010b).

En consecuencia del diseño metodológico se plantean las fases del estudio.

3.2.1 Pilotaje. El estudio consideró una fase preliminar de pilotaje, en la cual se escogieron, adaptaron e implementaron ciertas tareas de tipo multiplicativo. El propósito fundamental era explorar qué recursos semióticos movilizaban los estudiantes y depurar el tipo de preguntas y tareas propuestas. En esta fase de la investigación se escogieron 13 tareas que buscaban, cada una, indagar por un aspecto particular de la multiplicación, así como el tipo de enunciado, la comprensión de la pregunta y los MSO que se movilizaban. En esta fase se propuso a una niña de 12 años que resolviera las tareas seleccionadas y los resultados fueron bastante alentadores, la niña movilizó varios MSO que en el desarrollo posterior de implementación de las tareas también aparecieron, algunas tareas resultaron incomprensibles, algunas resultaron de inmediata respuesta y otras se abordaron de formas aditivas. Estos hallazgos dieron indicios acerca del objeto de la investigación y posibilitaron el ajuste de las tareas para la fase 2, en tanto reconocemos que la estructura de las tareas es fundamental en la medida que propulsan formas de pensamiento particular en torno a la multiplicación.

3.2.2 Diseño de tareas. Realizar el seguimiento, exploración y análisis de los MSO requiere de un dispositivo teórico con el cual sea posible referir los aspectos que con detalle se deben analizar, toda vez que el análisis de la actividad matemática debe considerar simultáneamente los registros semióticos escritos, lingüísticos y corporales, tanto del individual como del grupal, capturar y analizar su convergencia y examinar en el tiempo su evolución, ya que la convergencia de estos sistemas semióticos (Ernest, 2006 (citado por Arzarello, 2006)) son piezas clave de los procesos de objetivación. Para ello se dispone de un esquema teórico fundamentado principalmente en el análisis multimodal sugerido por Arzarello (2006) que se complementa con los principios y categorías de la TCO y nos permitieron asumir criterios teóricos para el diseño de las tareas.

Para el diseño de tareas se consideraron los resultados de la fase de pilotaje y se ajustaron las tareas atendiendo al objeto de las mismas y a la carga teórica y epistemológica que entrañaba cada una. Las características de las tareas a proponer son cruciales en el desarrollo de la investigación, en tanto deben corresponder a problemas con un contenido conceptual, histórico y cultural, que tengan en cuenta los conocimientos e intereses de los estudiantes, permitan la reflexión y sobre todo la interacción pues ésta se considera parte consustancial del aprendizaje. A su vez, es necesario resaltar que según Radford las tareas deben ser retadoras, de largo aliento y que posibiliten la interacción y la emergencia del objeto matemático. (Comunicación personal, 9 de Octubre de 2013). El criterio para la selección de las tareas era que exploraran distintas interpretaciones de la multiplicación escolar, que algunas tuvieran el referente gráfico, otras provocaran la posible aparición de recursos semióticos escritos y otras que exploraran distintos tipos de cantidades, de tal manera que las tareas finalmente seleccionadas o adaptadas y posteriormente implementadas fueron 14, las cuales se proponían atendiendo a lo ocurrido en la sesión anterior, es decir que de acuerdo al desarrollo de la labor emprendida en una sesión esta información nos permitía planear la siguiente. A continuación detallamos estos aspectos y los criterios tenidos en cuenta para la implementación de cada tarea.

Sesión 1. Para la primera sesión se consideró necesario iniciar proponiendo varias tareas, teniendo en cuenta que era el primer encuentro con niños que no conocíamos, no sabíamos cómo eran sus dinámicas de trabajo y no podíamos correr el riesgo de que no se implicaran en las dinámicas de nuestra intervención, por lo tanto iniciamos proponiendo tres tareas que tuvieran un referente grafico que los niños podrían usar durante la labor. Cada una de las tareas indagaba acerca de un aspecto particular de la multiplicación y se esperaba que la reacción de los niños frente a las tareas permitiera que se involucraran en la solución de las mismas.

Tarea 1. Los extraterrestres.

Sobre la línea doble, usted puede ver algunos extraterrestres y la cantidad de raciones de comida que necesitan para vivir por un día. Asuma que todos los extraterrestres comen la misma cantidad. Diga si cada uno de los grupos de extraterrestres bajo la línea doble, tiene más raciones, menos raciones o el número correcto de raciones de comida para vivir por un día.

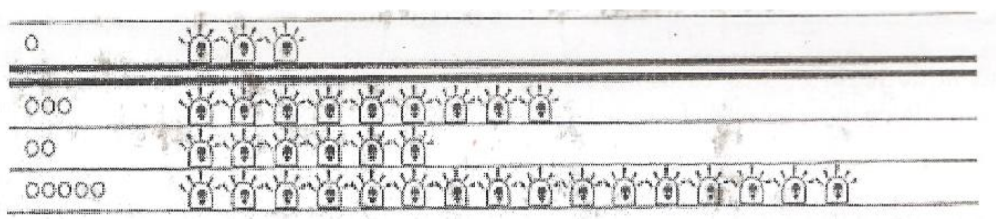
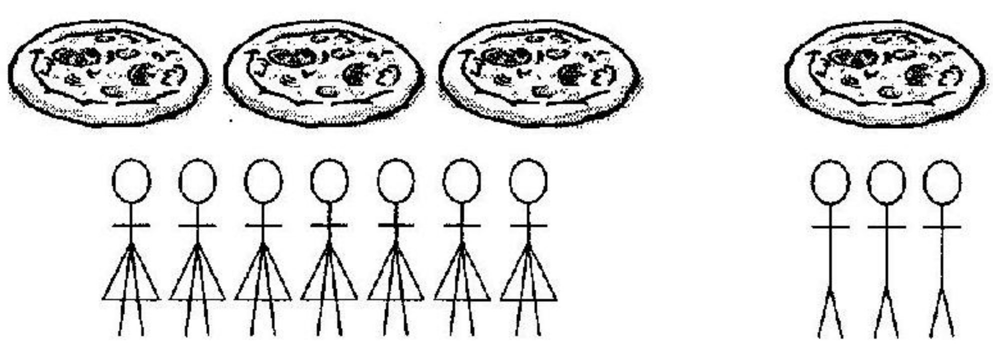


Figura 5. Tarea 1

Esta tarea es utilizada por Lamon (1994) para estudiar específicamente sobre los procesos de unitización y normación y es retomada por Bonilla & Romero (2008) para destacar la importancia de los procesos de unitización y normación en las situaciones de tipo multiplicativo. En su resolución los niños pueden establecer una correspondencia o desplegar un pensamiento relacional, así como acudir al establecimiento de una razón que puede ser comparada multiplicativamente. En el pilotaje realizado, la niña movilizó el recurso semiótico de inscripción al resolver la tarea, por lo cual se esperaba que en el trabajo grupal este recurso también emergiera.

Tarea 2. Las pizzas.

En una fiesta se reparte pizza hawaiana para las niñas y mexicana para los niños según muestra la figura



a. Según esto, a quien le corresponde más pizza a los niños o a las niñas. Justifica tu respuesta.
b. ¿Qué cantidad de pizza le corresponde a cada niño?
c. ¿Qué cantidad de pizza le corresponde a cada niña?

Figura 6. Tarea 2

Lamon (1994, 2002) utiliza esta tarea para indagar acerca de los procesos de unitización y normación en situaciones de reparto. En el ejercicio inicial de pilotaje la estudiante presentó dificultad con la repartición de las pizzas entre las niñas en un atasco referido a la partición de la unidad, hecho que se consideró podría ser problemático y generador de discusiones al interior de los grupos. Adicionalmente en el pilotaje se habían propuesto dos tareas a partir de la misma situación pero la actividad de la niña fue similar en ambos casos por lo cual se consideró conveniente adaptarlas y unificarlas en una sola tarea.

Tarea 3. Los cuadritos.

3. Escribe la cantidad de cuadritos pequeños que hay en cada cuadro grande

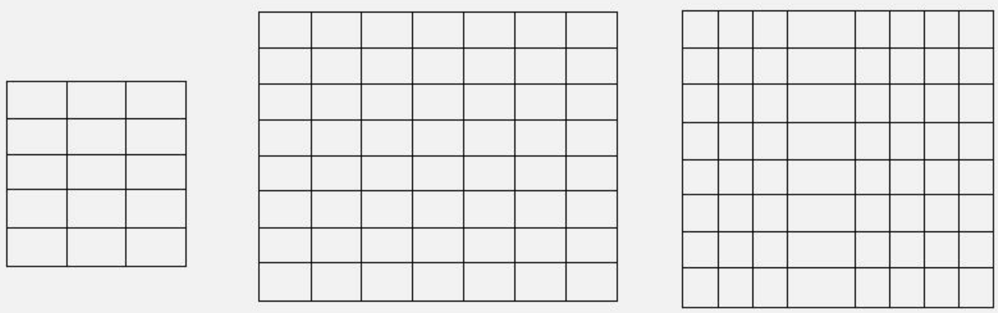


Figura 7. Tarea 3.

Tarea que en la literatura es posible clasificarla como del tipo producto de medidas. Esta tarea no se incluyó en el pilotaje y se diseñó teniendo en cuenta los recursos de señalamiento e inscripción movilizados en la fase de pilotaje, en la cual la niña sustituye la relación multiplicativa por el conteo de unidades simples y múltiples a través del señalamiento. La división en cuadritos pequeños de la superficie fue intencional y se anticipó que al estar los cuadros pequeños se generaba la posibilidad de hacer conteos con señalamiento o bien acudir a la multiplicación de la medida de sus dimensiones como una manera sofisticada de realizar conteos. En este tipo de tareas aparece un aspecto importante y es la posibilidad de evidenciar el proceso de normación en tanto se tome conciencia del cambio de unidad en el cual la unidad con la que debe reinterpretarse la situación son unidades cuadradas.

Sesión 2. Dado que en la sesión uno, los niños lograron involucrarse con todas las tareas y qué el recurso gráfico de las mismas posibilitó la elaboración de algunos significados y en ese proceso se movilizaron variados MSO, decidimos proponer una tarea que no tuviera dibujos pero que pudiera provocar su emergencia.

Tarea 4. La alcancía.

Para su cumpleaños, David recibe una alcancía. Él ahorra semanalmente la misma cantidad de dinero, al final de la primera semana tiene $950; al final de la segunda semana tiene $1900 y así sucesivamente.

a. ¿Cuánto tendrá ahorrado David en la quinta semana? Explica tu respuesta.
b. ¿y en la semana 32? Explica tu respuesta.
c. ¿En un año? Explica tu respuesta.
d. Al cabo de cuánto tiempo David tendrá ahorrados $38.000. Explica tu respuesta.
e. Escríbele un mensaje a otra persona para que esta persona pueda saber la cantidad de dinero que tendrá ahorrada David en cualquier semana.

Tarea adaptada de Radford (2013a) que en el ejercicio de pilotaje fue resuelta satisfactoriamente por la niña, comprendió el enunciado y abordó la tarea acudiendo a cálculos mentales, razón por la que se consideró pertinente conservarla pero modificando la cantidad ahorrada inicialmente, que en la primera tarea era de $400, adicionalmente se incluyeron los ítem d y e. Con el ítem d se requeriría reflexionar acerca del modo de acción inicialmente usado, para ponerlo a prueba en un proceso inverso y con el ítem e se hacía necesario explicitar la manera en que los niños resolvían la tarea, la podían comunicar a otros y además propulsaba una posible generalización aritmética. Esta tarea podría resolverse usando un operador que actúa sobre cantidades de un mismo tipo, las semanas o bien podría reconocerse la relación cuaternaria a partir de la cual se hallaría el término faltante. En cualquier caso la necesidad de usar una razón como unidad en la cual se halla una correspondencia entre las semanas y la cantidad de dinero permite distinguir la conformación de la unidad y la reinterpretación de la situación en términos de esta unidad.

Sesión 3. A partir del desarrolló de la labor de la sesión dos, se propuso una tarea que tampoco incluyera los dibujos, pero esta vez se consideró pertinente examinar las manifestaciones de los niños frente a una tarea con cantidades que pueden llegar a generar números con coma o razones.

Tarea 5. Los buñuelos.

Para unas onces hay en la mesa tres tazas de café y cuatro buñuelos. Pero llegan cinco personas. Si a cada persona se le debe dar una taza de café y se quiere mantener la relación inicial entre el número de tazas de café y la cantidad de buñuelos. (tres tazas de café y cuatro buñuelos)

a. ¿Cuántos buñuelos deben servirse? Explica tu respuesta.
b. ¿Cuántos buñuelos deberían servirse si llegaran 9 personas? Explica tu respuesta.
c. ¿Cómo le explicarías a un mesero la cantidad de buñuelos que debe poner en la mesa según la cantidad de invitados?

Esta tarea es adoptada de Bonilla & Romero (2008) donde es usada explícitamente para identificar el uso de procesos de unitización y normación, se consideró pertinente en tanto convoca a los niños a acudir al dibujo o representación de las tazas de café y los buñuelos, movilizando recursos semióticos y explicitando el proceso de conformación e interpretación de distintos tipos de unidades. Se esperaba que la tarea permitiera establecer la relación entre los espacios de medida de las tazas de café y los buñuelos, generando así una relación multiplicativa en la que aparecen las fracciones como operadores funcionales y escalares. Al igual que en la tarea anterior se conservó la pregunta del mensaje o de la explicación al mesero con el fin de provocar la explicitación de las maneras en que los niños habían resuelto la tarea y podían comunicar esto a los demás.

Sesión 4. Consideramos necesario proponer otra tarea que explorará las formas de acción y reflexión de los niños en torno a cantidades no enteras en las que se vieran avocados a conformar distintos tipos de unidades.

Tarea 6. Los globos

En un salón de grado sexto donde hay 39 estudiantes, se desea realizar una fiesta para el día de Hallowen y para ello se quieren comprar globos de helio. Un proveedor ofrece el precio más económico y vende 3 globos en $2000.

a. ¿Cuánto dinero debe pagarse por el total de los globos?. Explica tu respuesta
b. ¿Cuánto dinero debe aportar cada estudiante?. Explica tu respuesta
c. Si en los demás salones de grado sexto desean comprar de estos mismos globos, cuantos deberían comprar y cuanto deberían pagar en total

Tarea adaptada de Lamon (1994) para identificar el proceso de conformación e interpretación de unidades y con la cual es posible identificar el uso de operadores escalares o funcionales para solucionar la tarea. Al no tener un recurso semiótico gráfico se esperaba que éste emergiera y en tanto el número que representa la razón entre globos y niños es un número decimal se deseaba explorar el tipo de acciones de los niños con estas cantidades. Adicionalmente se cambiaron las cantidades de manera que el cociente de estas no fuera un número entero y se recreó la situación teniendo en cuenta que el día siguiente a la sesión se celebraría el día de Hallowen.

Sesión 5. Continuando con la exploración de los MSO movilizados por los niños cuando resuelven distintos tipos de tareas quisimos proponer en la misma sesión cuatro tareas en las que explícitamente las tareas tuvieran diversas interpretaciones de la multiplicación, en este caso acudimos a la categorización de Vergnaud (1991) acerca de los tipos de problemas de estructura multiplicativa.

Tarea 7. El traje

Para elaborar una falda se necesitan 2 metros de tela y para hacer el traje completo se necesitan tres veces más que para la falda. ¿Qué cantidad de tela se necesita para construir el traje completo? Explica detalladamente la manera como hallaste la cantidad.

Tarea acogida de Vergnaud (1991) quien la denomina como situación de espacio único de medidas que podría posibilitar la emergencia de dibujos o gráficos. Esta tarea no se incluyó en el pilotaje y se incorporó teniendo en cuenta la posibilidad de pronunciarse frente a una tarea que desde su enunciado tiene palabras clave que pueden ser usadas para abordarla. Simultáneamente consideramos que este tipo de tareas permiten estudiar la reinterpretación de la unidad, en este caso dos metros de tela en términos de la unidad un metro de tela.

Tarea 8. Los yogures

Tengo 3 paquetes de yogurt. Hay 4 yogures en cada paquete. ¿Cuántos yogures tengo? Explica detalladamente la manera como lo hallaste.

Tarea que Vergnaud (1991) denomina isomorfismo de medidas que podría posibilitar el uso de la relación entre medidas de dos espacios de medida. Esta tarea no se incluyó en el pilotaje y se utilizó teniendo en cuenta la posibilidad de pronunciarse frente a la relación entre tipos de tareas y la movilización de recursos semióticos. En este tipo de tareas la normación se puede evidenciar al reinterpretar la situación en términos de la unidad yogures.

Tarea 9. El granjero

Un granjero compro una finca en forma rectangular que tiene 6 metros de largo y 2 Decámetros de ancho. ¿Cuál es la cantidad de superficie o área del terreno?. Explica detalladamente la manera como lo hallaste.

Tarea tomada de Obando (2007) y que puede ser considerada como un producto de medidas en contextos continuos que posibilita la conversión de unidades de medida y la posible emergencia de dibujos o gráficos. Sin embargo en el pilotaje realizado la niña resolvió la tarea acudiendo al perímetro y en esa ocasión las medidas estaban dadas en la misma unidad (metros). Se consideró conveniente cambiar la unidad de medida de una de las dimensiones expresándola en decámetros, ofreciendo así la posibilidad de acercar la tarea a significados culturalmente compartidos como las unidades de medida, que de paso llevan impregnada la relación multiplicativa para su conversión, a través del factor de conversión.

Tarea 10. Los vestidos.

Camila tiene 4 pantalones y 6 blusas todos de distinto color. De cuántas formas distintas puede vestirse Camila. Explica detalladamente la manera como lo hallaste.

Tarea usada por Vergnaud (1991) y refiere a una combinación de elementos de distintos espacios de medida. Al considerar cantidades discretas podría posibilitar la emergencia de dibujos o gestos que den cuenta de la manera en que los niños establecen relaciones entre cantidades. En el ejercicio de pilotaje la niña realizó dibujos entre los cuales utilizó correspondencias que luego contaba como unidades compuestas, evidenciando así un proceso de unitización.

Sesión 6. Para esta sesión consideramos pertinente explorar las acciones de los niños con tres tareas que a través de la relación multiplicativa posibilitaran el uso de la división, así como el reconocimiento de las reacciones de los niños frente a los porcentajes que en sí mismos llevan implícita una relación multiplicativa.

Tarea 11. Golosinas

Una bolsa de golosinas contiene 18 paquetes. Si tengo 4 bolsas y quiero repartir los paquetes en nueve niños, ¿De a cuántos paquetes les toca a cada uno?

Esta tarea es acogida de Bonilla & Romero (2005) y en su resolución se hace necesaria la manipulación de distintos tipos de unidades, realizar una división y componer distintas unidades. En el pilotaje la niña no consideró las diferentes unidades de forma explícita sino que realizó la división entre las cantidades presentadas, sin embargo al realizar la división movilizó el recurso semiótico de señalamiento para hacer conteos de unidades simples, particularmente uso sus dedos para calcular una de las restas de la división.

Tarea 12. Las cabañas.

En un centro de vacaciones hay cierta cantidad de cabañas, en cada cabaña hay 4 habitaciones, en cada habitación caben dos personas. ¿Cuántas cabañas hay en ese centro de vacaciones si máximo caben 24 personas?

Tarea tomada de Bonilla & Romero (2005), que hace necesaria la manipulación de distintos tipos de unidades y el posible uso de la división. En el pilotaje realizado la niña utilizó las unidades: personas, habitaciones y cabañas para resolver la tarea y movilizó el recurso semiótico de señalamiento para hacer conteos de unidades compuestas, particularmente usó sus dedos para contar de 4 en 4 cuando calculaba una multiplicación, para evitar así realizar la división.

Tarea 13. El porcentaje.

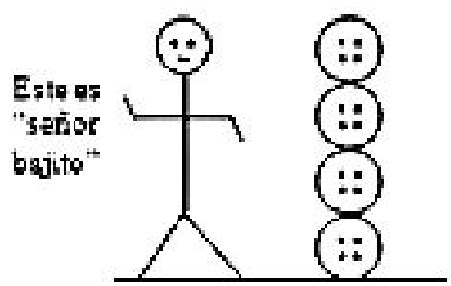
Irma compra un televisor LED de 42 pulgadas por $900000 y al momento de pagarlo le informan que se ha ganado un descuento del 15%, ¿Cuánto debe pagar Irma por el televisor?

Tarea tomada de Obando (2007) y que se incluyó por la necesidad de explorar en el dominio de lo multiplicativo el proceder de los estudiantes con objetos culturalmente asociados a la multiplicación como es el caso de los porcentajes, los cuales pueden ser interpretadas como unidades estándar de normación. En el ejercicio de pilotaje la niña no comprendió el significado de los porcentajes y abandonó la tarea, sin embargo se conservó con el fin de explorar si en la interacción de la labor podría emerger alguna forma de reflexión particular.

Sesión 7. En la última sesión consideramos pertinente explorar las reacciones de los niños frente a una situación de proporcionalidad, en tanto en estas relaciones existen relaciones de multiplicidad y podrían provocar la emergencia de otros MSO al contar con artefactos que mediaran en la solución de la tarea.

Tarea 14. Botones y clips.

La altura del señor bajito es 4 botones, mientras la altura del señor alto es de 6 botones.



Si usamos clips. La medida del señor bajito es 6 clips ¿cuál será la altura del señor alto medida con clips?

Figura 8. Tarea 14

Tarea aplicada por Karplus, et al. (1979) a 3300 alumnos entre 13 y 15 años de siete países industrializados para medir la habilidad de alumnos de secundaria para aplicar el pensamiento formal y es retomada por Rivas et al. (2012) para realizar un estudio con profesores en formación acerca de un proceso formativo que promoviera el desarrollo del conocimiento necesario para la enseñanza de la proporcionalidad. Se incluyó en el estudio en tanto se conjeturó la posible emergencia de registros semióticos de tipo gráfico (dibujos), adicionalmente ofrecía la posibilidad de contar con material concreto (artefactos) para su resolución. En el pilotaje la niña no logró capturar la relación de proporcionalidad entre botones y clips, y asoció las diferencias en la estatura de forma aditiva, sin embargo se conservó bajo la hipótesis que la tarea puede ofrecer la posibilidad de generar discusiones y otras formas de resolución a partir del uso de clips y botones concretos. Así mismo la tarea permitiría evidenciar la conformación de la unidad que relacionara botones y clips.

3.2.3 Implementación de las tareas y recolección de información. En la implementación de las tareas el orden de éstas fue configurándose a medida que transcurrían las sesiones, es decir que a partir de lo evidenciado en una sesión se tomaba la decisión de cuáles podrían ser las siguientes tareas. En las sesiones en que se propusieron varias tareas consideramos dentro del análisis a priori de la implementación, que este tipo de tareas podrían ser de fácil solución para los niños por lo que podríamos proponer varias de ellas. Sin embargo en el desarrollo de la labor como evento nos encontramos con una situación condicionante, no todas las tareas fueron resueltas de la misma manera, esto es, no todas posibilitaban la discusión general y el trabajo en pequeños grupos era fugaz, algunas tareas no significaron retos para los niños y por lo tanto no se implicaban en la labor conjunta de resolverlas, tal vez por considerarlas muy sencillas y que no generaban la necesidad de interactuar o ser con otros para resolverla, o quizás porque las experiencias de algunos de ellos con la multiplicación los llevaban a asumir formas sofisticadas de resolver las tareas y no requerían mayor despliegue de recursos semióticos.

Esta situación es condicionante, en tanto se asumió que la metodología de la clase estaría orientada por la propuesta en Radford (2013a) (Ver figura 9). En la cual la labor pasa por ciertos estados que posibilitan su desarrollo, en primer lugar el docente presenta la actividad a los estudiantes, lo que puede generar la discusión grupal o puede confinar a los niños a trabajar en pequeños grupos, en nuestro caso los grupos debían conformarse con máximo cuatro estudiantes, el docente visita a los grupos intentando trabajar junto a los estudiantes, sugiriendo preguntas, generando discusiones e indagando acerca de las maneras de acción de los niños, puede sugerir que pequeños grupos discutan entre sí y luego realiza una discusión general con respecto a los avances logrados con respecto a la tarea, de manera que permita precisar aspectos de la misma y someter a discusión plenaria algún modo de reflexión particular que pueda generar al interior de los grupos nuevas discusiones. Estos estados de la labor no son cíclicos ni homogéneos y pueden variar según se desarrolle el evento o la labor propulsada por la tarea.

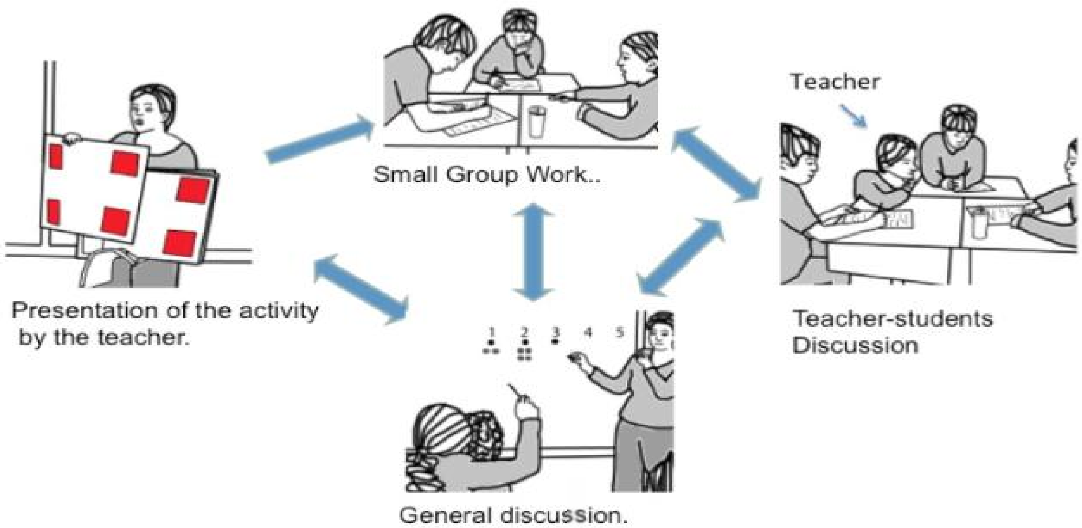


Figura 9. Metodología de la clase. Estados de la relación $\boldsymbol{\theta}$ en la terna hegeliana. (Radford, 2013a, p.33)

Así las cosas, fue necesario distinguir aquellas tareas que pudieron generar una discusión general de aquellas que por su misma naturaleza, su carga conceptual, no lo permitieron. Sin embargo esto no quiere decir que la tarea haya fracasado, quiere decir que este tipo de tareas provocan interacciones distintas y que al tener una carga conceptual más ligera que otras tareas entonces permite que los tiempos de resolución sean más cortos e incluso este fenómeno puede haberse dado por el desarrollo de procesos de objetivación previos en los que los estudiantes lograron una sobriedad y economía en el despliegue de los MSO y provocan mayor agilidad en la resolución de la tarea.

Los hechos anteriores se convierten en nuestro criterio para seleccionar las tareas a analizar, esto es, aquellas en las que fue posible seguir la metodología de clase propuesta por Radford (2013a), las cuales hacen parte del análisis multimodal que presentamos en este estudio, sin embargo queremos pensar que aquellas tareas que fueron resueltas de manera muy ágil y por lo tanto no permitieron realizar la socialización grupal del trabajo realizado en los pequeños grupos, podrían pertenecer a una familia de tareas con las cuales probablemente los estudiantes ya han tenido algún contacto y por lo tanto no implicaban mayor reto para los niños. Esto nos hace considerar un posible escenario en el que se puede llegar a estudiar las formas en que los MSO aparecen o emergen de forma primitiva o inicial, que resulta distinto a considerarlos, como aquí se ha hecho, cuando los estudiantes poseen experiencias matemáticas de seis años de escolarización.

A partir del enfoque asumido en esta investigación es vital contar con maneras afines e idóneas de recolectar la información, de manera que éstas sean acordes a los principios teóricos que rigen el actuar, en tal sentido y asumiendo el aula como un espacio multisemiótico se sigue el modelo de análisis multimodal usado por Miranda, Radford & Guzmán (2007) fundamentado en los planteamientos de Arzarello (2006). En este contexto, los datos se recopilan a través de video grabaciones de las cuales se seleccionan episodios y fragmentos de la actividad matemática, para luego realizar el análisis, el cual

> Debe tener en cuenta la relación de los diferentes sistemas semióticos movilizados durante la actividad (el sistema semiótico del lenguaje escrito, el del lenguaje hablado, el de los gestos, las acciones, etc.). En otras palabras, ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes es analizado de manera aislada. Antes bien, estas formas de expresión se estudian como partes clave del proceso de objetivación. (Miranda, Radford & Guzmán, 2007, p. 12)

Esta postura se complementa con un análisis microgenético que "se centra en el estudio minucioso de los procesos de aprendizaje y desarrollo en periodos muy cortos de tiempo … se refiere al proceso de formación de una función psicológica en un contexto espacio temporal concreto y limitado" (Martínez,1999, p. 22).

A partir de las dificultades reportadas en Villanueva (2012) para la recolección de información en este tipo de estudios, se optó por capturar la actividad matemática de los estudiantes acudiendo a dos dispositivos móviles de video. El primero estaba a cargo de un docente investigador, Magister en Docencia de las Matemáticas, con experiencia en este tipo de estudios y que utilizó la TCO como herramienta de análisis de los datos reportados en su tesis de maestría (Gómez, 2013). Esta cámara realizaba paneos del salón durante la actividad, particularmente en la explicación y la socialización de las tareas que lo permitieron, en caso de hallar indicios de actividad semióticamente mediada de forma notoria se dirigía al grupo para capturar de cerca las producciones de sus integrantes. Contar con el apoyo de este investigador, aportó considerablemente en la recolección de la información, toda vez que él ya tenía su ojo entrenado, ya sabía a dónde dirigir su atención, su colaboración fue fundamental para realizar las entrevistas focalizadas que lograban realizarse con los estudiantes que resolvían rápidamente las tareas propuestas, hecho que difícilmente se hubiera conseguido con un camarógrafo neófito en la TCO. El segundo dispositivo era manipulado por el autor de esta investigación y se activaba cuando pasaba por cada uno de los grupos para indagar u orientar las acciones de los niños con las tareas, sin embargo es necesario aclarar que en éste dispositivo las grabaciones no arrojaban en el video la calidad del primer dispositivo, pues la atención se centró en atender a los grupos de trabajo, privilegiando la dinámica de la actividad frente a la calidad de la grabación.

3.2.4 Configuración de datos. Se denomina configuración del dato en tanto éste se construye, es decir, es constituido por las transcripciones de los videos, sus respectivos fragmentos o episodios, las hojas de trabajo de los estudiantes, las entrevistas realizadas después de resolver la tarea y las notas de campo del investigador. Una vez configurado el dato, esta pieza de la actividad es susceptible de ser analizada contando con las categorías ofrecidas por la TCO. Los datos considerados en este estudio corresponden a los episodios que consideramos más relevantes y que contribuyen a dar respuesta a nuestra pregunta de investigación. La selección de estos datos está gobernada por nuestro posicionamiento teórico que permite prestar atención a las manifestaciones de formas de pensamiento multiplicativo realizadas por los estudiantes.

Para reportar los MSO movilizados por los estudiantes durante la labor se tuvo en cuenta la actividad matemática de todos los grupos durante las primeras cuatro sesiones en las que se resolvieron seis tareas, se focalizó la atención en aquellos grupos y estudiantes que por su actividad semiótica sobresaliente aportaban mayores indicios a las pretensiones del estudio y permitían dar cuenta del proceso de objetivación generado. El criterio fundamental para focalizar la atención en algún grupo en particular estuvo permanentemente orientado por nuestro posicionamiento teórico, es decir que nuestra mirada estaba concentrada en los grupos o estudiantes que durante la labor desplegaban algún tipo de recursos semióticos que dieran cuenta de formas de acción y reflexión particulares o que durante sus interacciones pudiesen estar produciendo significados a partir de sus posicionamientos frente a las tareas.

Capítulo 4. Análisis multimodal

Si quieres entender a una persona,
no escuches sus palabras,
observa su comportamiento.
Albert Einstein

Como aludimos en el capítulo anterior nuestro estudio se basa en una concepción multimodal del pensamiento y en consecuencia se presentan las transcripciones de los episodios seleccionados, relacionándolos con algunas fotos que pretenden presentar algún gesto o signo movilizado durante la tarea y ocasionalmente se muestran imágenes o fotos de las hojas de trabajo de los niños. En la transcripción de los diálogos se acude al signo parentético **[ ]** para indicar alguna acción realizada por los estudiantes mientras desarrollan sus intervenciones, así como para realizar comentarios e indicar algunas precisiones frente a las relatos de los niños. Simultáneamente se utilizan puntos suspensivos para indicar pausas o cambios en la línea discursiva que trae el relato y se numeran las intervenciones con el fin de ubicar al lector en los episodios analizados. La letra ***P*** usada al inicio de algunas transcripciones corresponde a intervenciones del autor de esta investigación quien hacía las veces de profesor y la letra ***I*** se utiliza para las intervenciones realizadas por el investigador auxiliar que apoyó la recolección de información, quien en ocasiones también realizaba intervenciones con los estudiantes. Para realizar los análisis desde el sistema semiótico lingüístico que registramos en las transcripciones procedimos a resaltar en negrita y subrayar aquellas expresiones que consideramos como manifestaciones de aspectos semióticos que aportaban a contestar nuestra pregunta de investigación y que son referidas en los posteriores análisis.

4.1 Sesión 0. Pilotaje de tareas

En la sesión de pilotaje, se hallaron indicios de la movilización de recursos semióticos tales como los señalamientos y las inscripciones, que dan cuenta de signos intencionales que utilizan los estudiantes para acercarse a la lógica cultural de los objetos matemáticos, tal es el caso del signo kinestésico de *inscripción* para hacer repartos en grupos iguales para resolver la tarea de los extraterrestres.

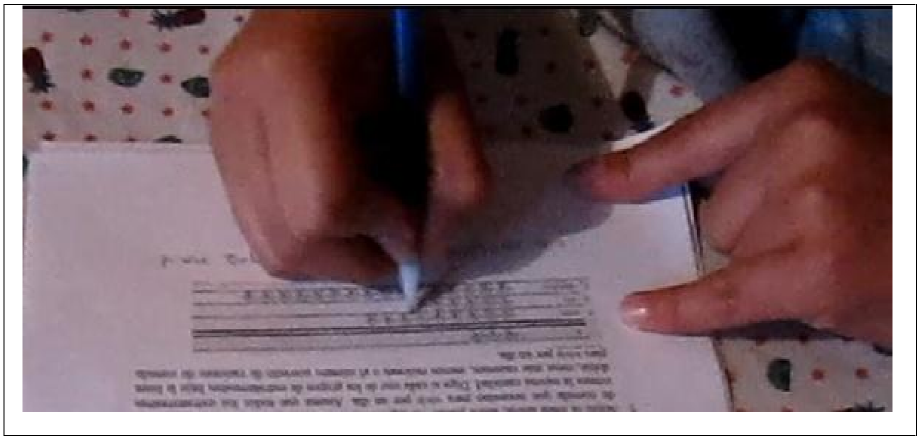


*Figura 10.*Signo kinestésico de inscripción para hacer repartos

Un segundo aspecto emergente en esta primera etapa de la investigación correspondió al signo kinestésico de señalamiento para indicar conteos de unidades simples y múltiples, en este MSO se acude a la práctica cultural de realizar conteos con los dedos, los cuales no solamente representan conteos de unidades simples sino de unidades múltiples que capturan la lógica de la multiplicación como conteos de grupos iguales y que desde ahora denominamos *conteo dactilar*.

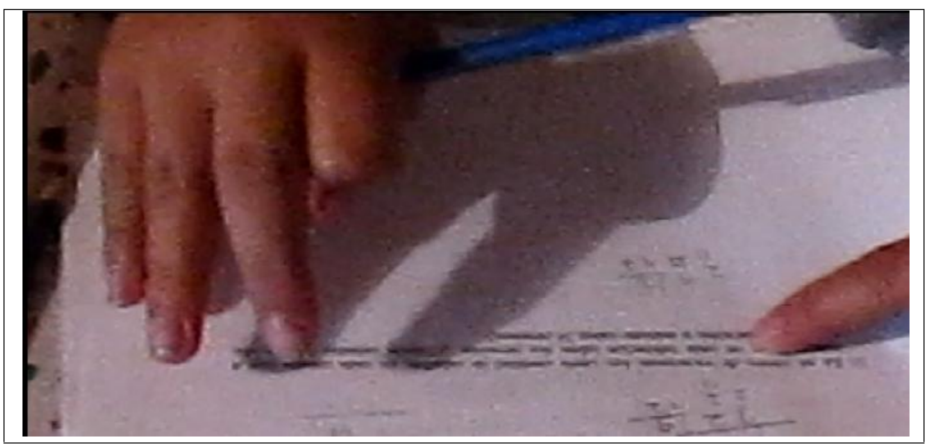


*Figura 11.*Signo kinestésico de señalamiento para realizar conteos de unidades compuestas. Conteo dactilar.

Un tercer aspecto corresponde al MSO lingüístico "*por cada*" utilizado para resolver la tarea de los extraterrestres, término que permitió suponer la captura de una correspondencia entre elementos de dos conjuntos.

En esta fase de la investigación ya habían emergido autenticas manifestaciones de formas prototípicas de pensamiento multiplicativo y contábamos con evidencia inicial de la existencia de MSO en una estudiante con alguna experiencia con la multiplicación, se nos empezaba a confirmar la conjetura que consideraba la trascendencia de la TCO a otros dominios y se hacía manifiesta la necesidad de explorar el funcionamiento de las tareas dentro de una labor conjunta, un evento en el que la interacción propulsara formas de ser y de reflexionar con otros.

4.2 Sesión 1

La sesión uno comprendió la resolución de tres tareas distintas al considerar plausible que los niños, que no conocíamos, resolvieran o abandonaran rápidamente una de las tareas en el tiempo de la clase, en tanto era la primera sesión con dos docentes que no conocían y además trabajarían de forma distinta a la habitual en su clase de matemáticas, en la cual la sola disposición espacial de ubicarlos en filas marca barreras importantes de comunicación e interacción durante la clase. Adicionalmente se esperaba propiciar que los estudiantes se involucraran sino con todas por lo menos con una de las tareas propuestas, las cuales incluían representaciones gráficas sobre las cuales los niños podían trabajar en la resolución de la tarea.

Este primer encuentro con los niños permitió que en su gran mayoría se involucraran con la resolución de las tres tareas, trabajaron responsablemente en los grupos y permitieron el tránsito entre los diferentes estados de la relación θ que aquí consideramos como nuestra metodología de clase.

4.2.1 Tarea 1. Los extraterrestres. Esta tarea pretendía que los estudiantes establecieran una relación entre cantidades y a partir de esta relación pudieran establecer comparaciones de cuándo la relación entre las cantidades se conserva o se altera. Por lo que su importancia radica en reconocer la manera en que los estudiantes establecen la relación entre las cantidades y como al establecerse dicha relación se movilizan recursos semióticos que den cuenta de las formas de acción y reflexión de los estudiantes con un atributo de la multiplicación tal como el establecimiento de correspondencias entre cantidades. Adicionalmente esta tarea permitía ser resuelta a través de una comparación entre cantidades enteras o podría incluso llegar a resolverse con la comparación o multiplicación de razones, que en cualquier caso requiere conformar una unidad compuesta que luego permite hacer la multiplicación de razones para determinar cuando esta razón se conserva o se altera.

Sobre la línea doble, usted puede ver algunos extraterrestres y la cantidad de raciones de comida que necesitan para vivir por un día. Asuma que todos los extraterrestres comen la misma cantidad. Diga si cada uno de los grupos de extraterrestres bajo la línea doble, tiene más raciones, menos raciones o el número correcto de raciones de comida para vivir por un día.

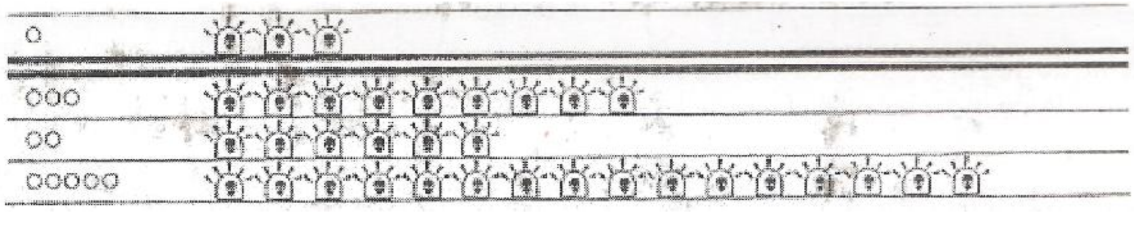


Figura 12. Tarea 1. Los extraterrestres.

Luego de haber hecho una explicación general de las tareas y de la forma como trabajaríamos en nuestras sesiones, el autor de esta investigación, que funge como profesor que dirige la actividad y orienta la labor de los pequeños grupos, visita uno de los grupos en el cual Samuel, está resolviendo la tarea de los extraterrestres:

L1. Samuel: *¿**<u>Acá</u>** cuáles son los alienígenas?*
L2. P: *¿Cuáles crees tú que son los alienígenas?*
L3. Samuel: *yo digo que **<u>éstos</u>*** [señalando los alienígenas]
L4. P: *entonces ¿qué dice el problema?*
L5. Samuel: *Sobre la línea doble, usted puede ver algunos extraterrestres y la cantidad de raciones de comida que necesitan para vivir por un día. Asuma que todos los extraterrestres comen la misma cantidad. Diga si cada uno de los grupos de extraterrestres bajo la línea doble, tiene más raciones, menos raciones o el número correcto de raciones de comida para vivir por un día.* [Mientras va leyendo acompaña su relato de un seguimiento, con el esfero, a las palabras que va enunciando] *Y **<u>acá</u>** **<u>es una comida por tres</u>*** [señalando respectivamente los alienígenas y la ración de comida]. *Entonces **<u>acá</u>*** [realiza un deslizamiento horizontal sobre la segunda línea de los extraterrestres de izquierda a derecha. (Foto 1, figura 13)] *Sí están bien, pero éste faltaría…* [Señalando la última línea (Foto 2, figura 13)]
L6. P: *Hay que escribir eso*
L7. Samuel: *solo faltaría como un cuarto de ración*
L8. P. *¿cómo un cuarto de ración?*
L9. Nicolás: *como un medio*
L10. P. *¿Por qué sabes que es cómo un cuarto? ¡Escríbelo!*
L11. Samuel: *Porque **<u>acá</u>** tenían que haber quince pero hay dieciséis* [Señalando la última línea (Foto 3, figura 13)]

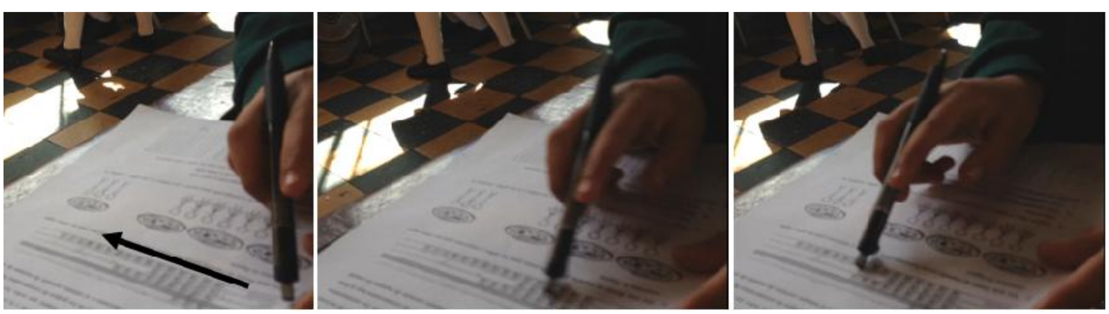


Foto 1 Foto 2 Foto 3

Figura 13. Deslizamientos y señalamientos realizados por Samuel en la Tarea 1.

En L5 Samuel y Nicolás establecen la relación entre las cantidades, número de alienígenas y sus respectivas raciones de comida, usando el recurso semiótico lingüístico "*es una comida por tres*" que posteriormente se verifica cuando son entrevistados y ratifican el uso de tal expresión; la cual consideramos como una atentica manifestación del establecimiento de la relación entre cantidades a través de palabras.

L12. Samuel: *En el primer problema lo leímos y entendimos que* ***una racción*** *[sic]* ***de comida es para tres***, [señala con el dedo índice la ración de la primera línea] *entonces nosotros lo que hicimos fue, tres por tres nueve* [con el índice derecho señala dos veces las tres raciones de comida (Foto 4, figura 14) y luego indica los nueve extraterrestres] *y* ***miramos*** *que sí eran nueve, entonces* ***miramos*** *que la racción [sic] si alcanza, en el tercero miramos que tres por dos*
L13. Nicolás: *que tres por dos era seis y* ***aquí*** *están seis marcianitos* [señalando con el índice derecho los extraterrestres de la tercera fila y realizando un deslizamiento horizontal de izquierda a derecha sobre los extraterrestres (Foto 5, figura 14)]
L14. Samuel: *Entonces en el último* ***miramos*** *que tres por... cinco son quince pero hay seis* [sic] [señala con el dedo índice la última fila de extraterrestres (Foto 6, figura 14)] *o sea que no son... en todos... todos los extraterrestres necesitan… no … en la misma cantidad sino que en el último necesitan más*

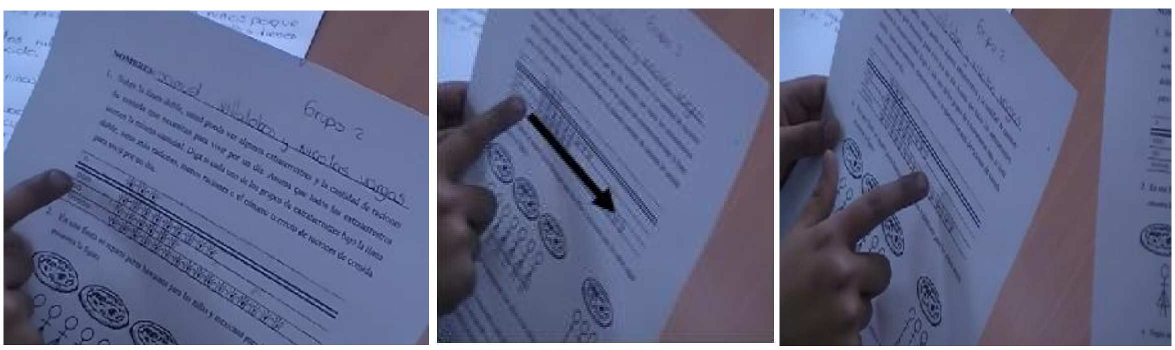


Foto 4 Foto 5 Foto 6

Figura 14. Señalamientos y deslizamientos realizados por Samuel durante la entrevista

Cuando están resolviendo la tarea Samuel enuncia "*es una comida por tres*" (L5) este recurso lingüístico manifiesta la captura de una relación entre cantidades que posteriormente se confirma cuando al entrevistar al grupo acerca de su manera de resolver la tarea afirman que "*una racción [sic] de comida es para tres*" (L12). Estas expresiones no son aisladas, ni inocentes, por el contrario revelan el reconocimiento y la captura de la relación entre la cantidad de extraterrestres y la cantidad de raciones que necesitan para sobrevivir. Las expresiones lingüísticas que utilizan los niños durante la labor han sido consideradas como recursos semióticos que permiten evidenciar la elaboración de significados de los objetos matemáticos (Radford, 2002, 2003; Villanueva, 2012; Gómez, 2013; Vergel, 2014a). En nuestro caso este recurso lingüístico devela la captura de la relación entre las cantidades presentes en la tarea, a través de un medio semiótico de tipo lingüístico que sugiere que al haberse capturado la relación entre las cantidades es suficiente con referirse a ella a través de palabras que no aparecen en el enunciado de la tarea, pero que hacen parte del discurso de los niños como parte del proceso de toma de conciencia acerca de la relación entre las cantidades y que posteriormente es usado para resolver la tarea, pues es a partir de esta relación que logra realizarse la comparación pedida en las siguientes líneas, entre el número de alienígenas y las raciones de comida presentadas, en este caso el MSO "*una comida por tres*" es una expresión que configura y precede a la subsiguiente acción de comparación entre las raciones de comida y la cantidad de extraterrestres.

En la explicación que nos ofrecen Samuel y Nicolás sobre su manera de resolver la tarea no aparecen solamente signos lingüísticos como el "*por cada*", en su discurso se encuentran deícticos espaciales como *"acá", "aquí", "estos"* que van acompañados de signos kinestésicos como el señalar tocando el objeto de referencia o realizar deslizamientos sobre la línea de los extraterrestres, estos signos se acompañan de una inherente actividad perceptual que se evidencia con expresiones como "*miramos*" que nos permiten hacer una lectura de la actividad semiótica de los niños que va mas allá de su producción final o su respuesta al problema, en este caso la respuesta escrita de los niños a la tarea se presenta en la figura 15.

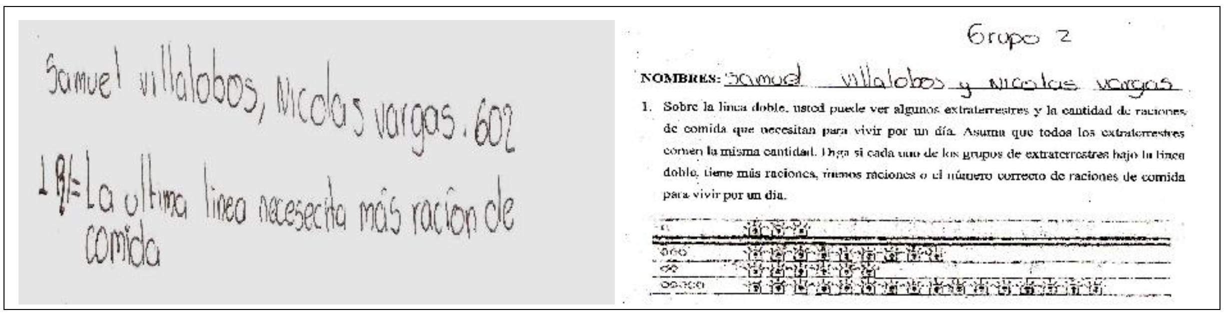


Figura 15. Respuesta escrita del grupo de Samuel

El contraste entre la respuesta escrita y lo que logramos capturar de las manifestaciones corporales de Samuel y Nicolás, legítima la necesidad de valorar la actividad matemática de los niños más allá de sus producciones finales o respuestas, que en muchas ocasiones no se compadecen con el esfuerzo que realizan los niños para llegar a una respuesta.

En este episodio de la labor los niños han desplegado sincrónicamente una actividad semiótica kinestesica, perceptual y lingüística que consideramos un nodo semiótico, en el cual los señalamientos, deslizamientos y uso de deícticos espaciales se usan para explicarnos la manera como resolvieron la tarea. Desde las categorías analíticas con que examinamos las producciones de los niños, encontramos que Samuel y Nicolás se pueden ubicar en un pensamiento multiplicativo contextual, pues el uso de las frases clave sugiere un estrato de generalidad en el cual los nodos semióticos han evolucionado, pero aún no acuden a los símbolos numéricos para expresar la relación entre la cantidad de extraterrestres y la ración de comida. Los niños en este episodio están acudiendo a la razón "*una ración de comida es para tres*", que revela la formación de una unidad compuesta y se usa contextualmente, pero que no logra trascender a la representación y operatividad numérica, la sentencia nos muestra media multiplicación en la cual la otra mitad queda implícita y la relación entre cantidades como elemento característico de la multiplicación hace su aparición en forma de razón.

Para otros grupos no es suficiente enunciar la relación entre las cantidades, para ellos es necesario inscribir o marcar esta relación a través de un trazo que deja huella y que permite plasmar en el papel aquello que ya apareció en su mente. Es claro que no todos los individuos actuamos de la misma manera y en la solución de tareas matemáticas necesitamos desplegar ciertos recursos semióticos que nos permitan hacer visibles nuestras intenciones, tal como le ocurre al grupo de Estefanía y Jessica, quienes plasman la relación entre las cantidades a partir del trazo que encierra grupos iguales. (Ver figura 16)

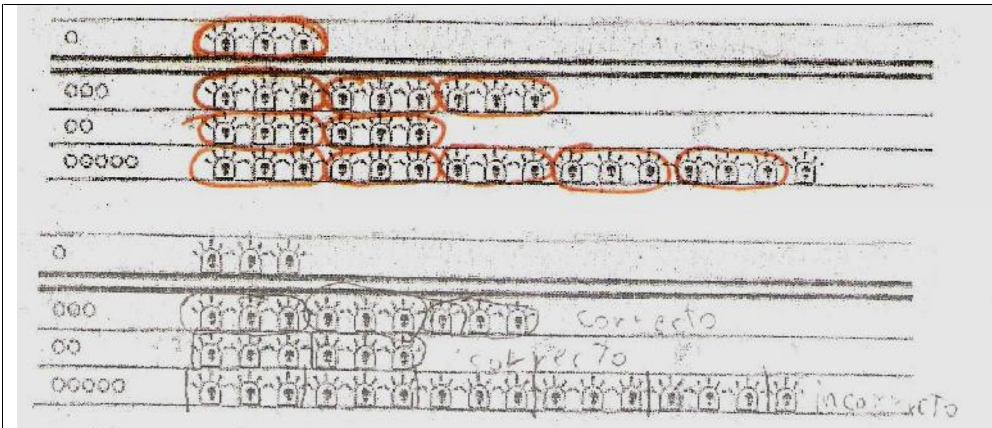


Figura 16. Inscripciones realizadas por el grupo de Estefanía y Jessica. Composición de unidades múltiples.

Luego de resolver la tarea se entrevistó al grupo, para indagar su manera de proceder y esto fue lo que encontramos:

L1. Estefanía: *En el primero se …*[señalando la primera fila de extraterrestres en la cual habían agrupado los extraterrestres con un ovalo] *pues se dividieron los grupos en tres, el primero fue correcto*[señalando la segunda fila], *el segundo también fue correcto* [señalando la tercera fila]
L2. I*: pero ¿qué tenías que hacer?*
L3. Estefanía: *pues* ***dividirlos en tres*** [señalando la primera fila de extraterrestres en la cual habían agrupado los extraterrestres con un ovalo]
L4. I*: No, en el punto, ¿que tenían que hacer?, ¿qué te preguntaban?*
L5. Estefanía: *aaa, que cuánta comida se dividía para los extraterrestres*
L6. I*: mmm, listo. Y ¿qué hicieron luego?*
L7. Estefanía: *entonces ésta era la línea de la comida.* [señala inicialmente con el dedo índice la primera línea y luego coloca el dedo índice y pulgar en los extremos de ésta (Foto 1, figura 17)]. *Pues en el primero estuvo correcto, que sí tenían la comida suficiente, el segundo también estuvo correcto porque también tenía la comida suficiente.*
L8. I*:¿por qué?, ¿cómo sabes?… muéstranos*
L9. Estefanía: *porque* ***se dividieron en tres partes***. [Señala dos grupos de extraterrestres con los dedos índice y pulgar en los extremos del grupo que habían construido (Foto 2, figura 17)] *Cada… cada…*
L10. Jessica: *Cada puntico era un… un, o sea* ***un puntico*** [señala con el dedo pulgar una ración de comida] ***era comida para tres***, *así* [señala el grupo de extraterrestres haciendo un deslizamiento horizontal sobre el grupo de extraterrestres] *y entonces pues todos eran*

correctos excepto éste [señalando la última línea], *porque éste falto uno que no tuvo la comida suficiente, porque faltarían dos extraterrestres o que no estuviera este extraterrestre.* [Señalando el extraterrestre que quedo sin agrupar]

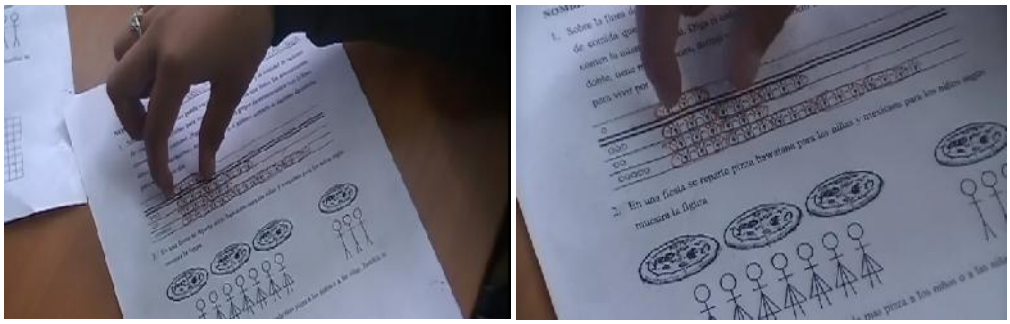


Foto 1 Foto 2

Figura 17. Señalamiento sobre las inscripciones realizadas por el grupo de Jessica y Estefanía

Este grupo al resolver la tarea usan un MSO que consiste no solamente en señalar las agrupaciones que realizan, adicionalmente necesitan dejar un registro de ello, por lo que consideran necesario encerrar en óvalos los grupos de tres extraterrestres haciendo visible su forma de acción (Foto 1, figura 17). En la entrevista realizada después de haber resuelto la tarea aparece el gesto indéxical realizado (foto 2, figura 17) en el cual los dedos índice y pulgar encierran el grupo de extraterrestres que toman como referencia para expresar las demás cantidades de extraterrestres en términos de esta nueva unidad, grupos de tres. Acciones como esta nos permiten diferenciar el MSO del señalamiento al de la inscripción, en el primero la intención, en este caso el agrupamiento, queda implícito y se señala el o los objetos sobre los cuales la mente está trabajando, en el segundo caso la marca o trazo realizado sobre la hoja de trabajo captura en una imagen, un trazo ovalado en este caso, los agrupamientos realizados, su intención y manera de proceder es evidente, pues el señalamiento se explicita o se materializa a través de los trazos o dibujos, huellas o marcas dejados sobre el papel que consideramos inscripciones.

En la manera de proceder de Estefanía las inscripciones y los señalamientos no aparecen aislados están siempre acompañados de frases o sentencias (L1, L3 y L9), como las usadas por el grupo de Samuel, para Estefanía el recurso lingüístico dividir en tres está directamente relacionado con la inscripción que realiza sobre la hoja, aquí el recurso lingüístico y el kinestésico aparecen sincrónicamente y funcionan juntos para resolver la tarea. Al respecto Gallese & Lakoff (2005, citados por Radford & André, 2009) afirman que el lenguaje es multimodal porque integra varias modalidades: la vista, el sonido, el tacto, las acciones motrices, etc. Consideramos que el recurso lingüístico "*dividirlos en tres*" es ostensivamente distinto al de "*una comida por tres*", en el primero la correspondencia no se explicita, mientras si lo hace la operación de dividir, en el segundo puede deducirse incluso la conformación de una nueva unidad, grupos de tres. Es decir Samuel trabaja con una relación mientras que Estefanía trabaja con una operación.

Desde lo evidenciado en este episodio y por las semejanzas generales con el grupo de Samuel situamos a este grupo en un estrato de generalidad contextual en el que la formación de grupos iguales aparece como característica del pensamiento multiplicativo y como manifestación de un proceso de unitización.

La manera de resolver la misma tarea es diferente en cada grupo, algunas se presentan más sofisticadas y otras más económicas, semióticamente hablando. En otro de los grupos, que acude también a un recuso lingüístico, aparecen otros recursos semióticos de necesaria mención. En primer lugar los niños de este grupo realizan conteos de unidades simples y unidades compuestas, siguiendo un ritmo en la entonación de las palabras, que sugiere que la inscripción del grupo de Estefanía es manifestada de otra forma, en este caso se realiza el conteo en unidades simples o múltiples con cierto ritmo y entonación, mientras se van tapando con los dedos los elementos que se están contando, veamos:

L1.Maicol: *un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince,* ***<u>dieciséis, dieciséis, dieciséis.</u>*** [contando los extraterrestres de la última fila]. *Entonces* ***<u>una sería… tres. Tres para cada uno</u>****. O sea* ***<u>tres, tres, tres, tres,</u>*** [contando los extraterrestres de la segunda fila, mientras señala tocando uno por uno los extraterrestres hasta completar grupos de tres]
L2. Eduard: *y entonces ahí como lo vamos a hacer, ¿coloreados?*
L3. Maicol: *pues sí de a tres, no. Sería de a tres*
L4. Diego: *No, de a dos*
L5. Maicol: *¿Por qué de a dos?, ¿por qué dos?* [5 segundos de silencio y empieza a leer el enunciado del problema]. *Sobre la línea doble, usted puede ver algunos extraterrestres y la cantidad de raciones de comida que necesitan para vivir por un día. Asuma que todos los extraterrestres comen la misma cantidad. Diga si cada uno de los grupos de extraterrestres bajo la línea doble, tiene más raciones, menos raciones o el número correcto de raciones de comida para vivir por un día*. [Mientras va leyendo acompaña su relato de un seguimiento, con el esfero, a las palabras que va enunciando]. ***<u>Una tiene tres</u>*** [tapa con índice izquierdo la ración de comida de la fila de referencia (arriba de la línea doble) y con índice derecho señala los tres extraterrestres de esa misma fila contándolos de uno en uno (Foto 1, figura 18)] *entonces* ***<u>una</u>*** [tapa con el índice izquierdo la primera ración de la segunda fila (debajo de la línea doble)], ***<u>un, dos, tres</u>*** [señalando con el índice derecho los tres primeros extraterrestres de la segunda fila, tocándolos de uno en uno]. ***<u>Otra</u>*** [tapa con el índice izquierdo la segunda ración de la segunda fila (debajo de la línea doble)] ***<u>un, dos, tres</u>*** [señalando con el índice derecho los extraterrestres cuatro, cinco y seis de la segunda fila, tocándolos de uno en uno]. ***<u>Otra</u>*** [tapa con el índice izquierdo la tercera ración de la segunda fila (debajo de la línea doble)] ***<u>un, dos, tres</u>*** [señalando con el índice derecho los extraterrestres siete, ocho y nueve de la segunda fila, tocándolos de uno en uno] e*sta está bien* [refiriéndose a la segunda fila y señala con pulgar derecho esta fila]. [Tapa con índice izquierdo la primera ración de la tercera fila]. ***<u>Un, dos, tres</u>*** [señalando con el índice derecho los tres primeros extraterrestres de la tercera fila, tocándolos de uno en uno] e*sta está bien*. [Tapa con índice izquierdo la segunda ración de la tercera fila] ***<u>Un,</u>***

dos, tres [señalando con el índice derecho los extraterrestres cuatro, cinco y seis de la tercera fila, tocándolos de uno en uno] *esta está bien.* [Tapa con índice izquierdo la primera ración de la cuarta fila] ***Un, dos, tres***. [señalando con el índice derecho los tres primeros extraterrestres de la cuarta fila, tocándolos de uno en uno]. [Tapa con índice izquierdo la segunda ración de la cuarta fila] ***Un, dos, tres***. [señalando con el índice derecho los extraterrestres cuatro, cinco y seis de la cuarta fila, tocándolos de uno en uno]. ***Tres, seis.*** [señala con índice derecho el tercer y el sexto extraterrestre de la tercera fila]. ***Dos, cuatro, seis.*** [señala con índice derecho los extraterrestres dos, cuatro y seis de la tercera fila]. ***Dos, cuatro, seis***. [Desliza índice derecho realizando una pausa cada dos extraterrestres en la cuarta fila (Foto 2, figura 18)]. *Tres* [Tapa con índice izquierdo la tercera ración de la cuarta fila], ***un, dos, tres***. [señalando con índice derecho los extraterrestres siete, ocho y nueve de la cuarta fila, tocándolos de uno en uno]. [Tapa con índice izquierdo la cuarta ración de la cuarta fila] ***Un, dos, tres***. [señalando con índice derecho los extraterrestres diez, once y doce de la cuarta fila, tocándolos de uno en uno]. [Tapa con índice izquierdo la quinta ración de la cuarta fila] ***Un, dos, tres***. [señalando con índice derecho los extraterrestres trece, catorce y quince de la cuarta fila, tocándolos de uno en uno (Foto 3, figura 18)]. *No, sobraría uno, entonces no se puede y entonces quedaría incorrecto, entonces estos izquierdos de la ultima estaría incorrectos.*
L6. Eduard: *Listo, solo hay cinco*
L7. Maicol: *Este es incorrecto* [señalando la última línea en la hoja del compañero], *sobra uno*
L8. Eduard: *entonces, en donde le escribimos queee... sobra uno*
L9. Diego: *Debajo*
L10. Eduard: *si aquí*

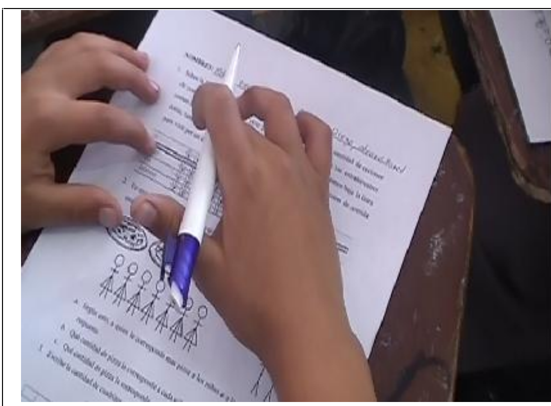


Foto 1

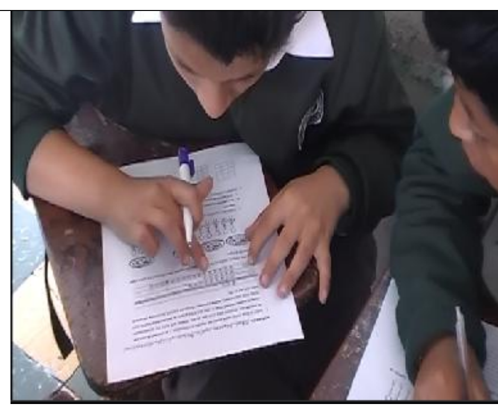


Foto 2

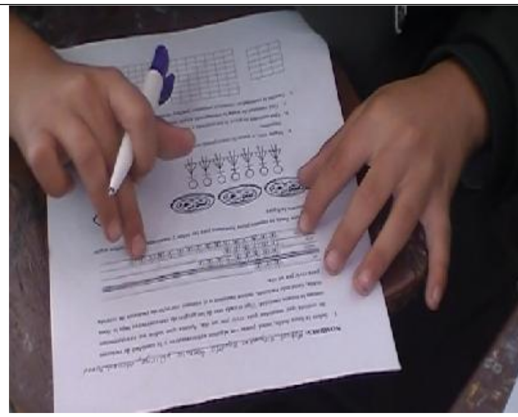


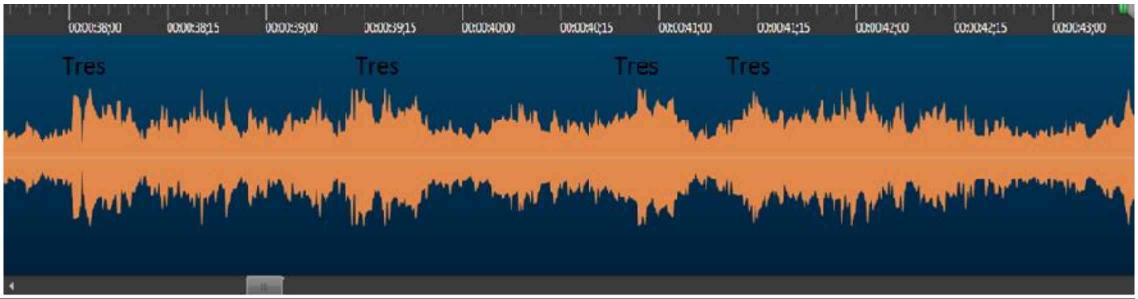
Foto 3

Figura 18. Doble gesto indéxical realizado por Maicol

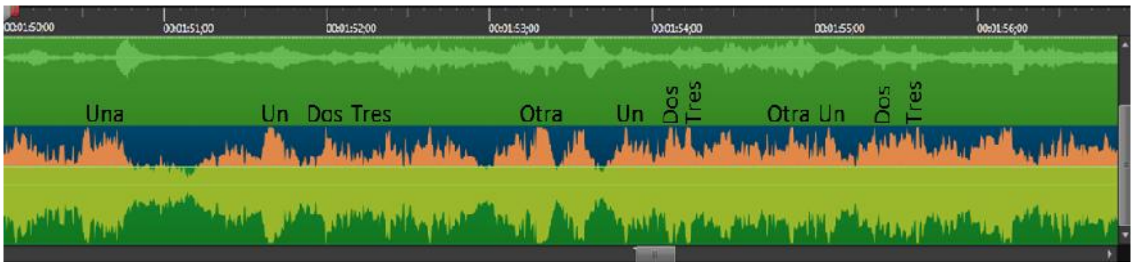
En este grupo también aparece el señalamiento, pero aquí se manifestó de formas distintas, en primer lugar se señala con las dos manos, mientras la derecha va contando la cantidad de extraterrestres con un señalamiento que toca los extraterrestres en grupos de tres, la izquierda va señalando la ración de comida para tres de ellos y este movimiento simultáneo, intencional, sincrónico, que además se acompaña de las palabras (L5), permite ver que con la mano izquierda se va contando a través del tapar la ración de comida con el dedo y con la derecha se van contando los extraterrestres, es decir que para cada mano hay una función específica, una intención particular para cada una. La acción de tapar es una forma de hacer conteos sobre la tarea que consiste en ir agotando las raciones de comida, es decir se van quitando las raciones a medida que aumenta el conteo de extraterrestres, que es una forma de conteo en donde las cantidades no se agotan sino se incrementan. Estas acciones demuestran un potente recurso semiótico como el tapar y destapar siguiendo una correspondencia, por medio de un doble gesto indéxical (Radford, 2013b) en el cual es posible evidenciar la aparición de un nodo semiótico, toda vez que se despliega sincrónicamente actividad perceptual, kinéstesica y lingüística (Radford, 2008a). En cuanto a la actividad kinéstesica hallamos que los desplazamientos sincrónicos de los dedos índices, ubicados en dos espacios de medida distintos están señalando el operador escalar de un isomorfismo de medidas, desplazamientos que en tanto signos tienen significado en sí mismos (Vergel, 2014b). El índice derecho señala tocando grupos de tres extraterrestres y el índice izquierdo está tapando raciones de comida a medida que el otro dedo va agotando grupos de tres.

Desde el sistema semiótico lingüístico encontramos que la entonación de las secuencias numéricas utilizadas para referir la cantidad de alienígenas tiene un ritmo que evidencia conteos en grupos de tres alienígenas. Al separar el audio de la imagen del video, reducir la velocidad y generar las gráficas del audio en el programa Camtasia Studio 8 podemos obtener los siguientes gráficos:

L1. … O sea ***<u>tres, tres, tres, tres</u>***



L5. … ***<u>una</u>***, ***<u>un dos tres</u>***. ***<u>Otra un dos tres</u>***. ***<u>Otra un, dos, tres</u>*** **…**



L5. … ***<u>un dos tres, un dos tres, un dos tres</u>*** **…**

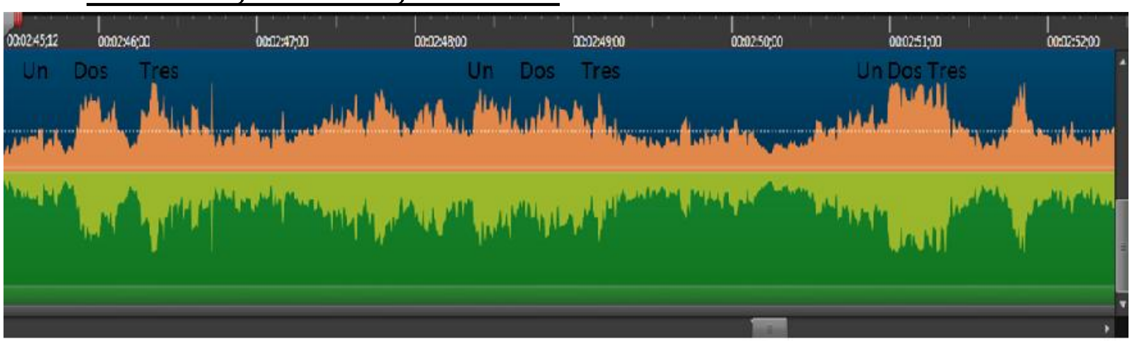


Figura 19. Análisis prosódico del conteo rítmico usado por Maicol en la formación de unidades compuestas

Estos tres fragmentos de las intervenciones de Maicol bosquejan un ritmo en el discurso, que no es claramente definido por la interferencia del entorno y las discusiones de los demás grupos, pero que nos permite evidenciar el *ritmo* como un MSO que en este caso es utilizado para realizar conteos de grupos iguales. El ritmo como MSO ha sido considerado por Radford (2008a, 2010c) como un aspecto característico de un tipo de pensamiento algebraico factual y que aquí podemos extrapolar al pensamiento multiplicativo, en tanto este ritmo marcado con pausas funciona sincrónicamente con los dedos índices para señalar las unidades compuestas que está considerando Maicol para resolver la tarea. En este caso, el ritmo juega un papel fundamental en el encuentro con el objeto, es un sentido propio y subjetivo que utiliza Maicol para reflexionar acerca de la tarea, una forma corpórea, en tanto el uso de la voz engranado con el uso de los dedos permite tomar conciencia de un quehacer propio de las matemáticas como el contar y comparar.

De igual forma, el texto subrayado en L5 devela otra acción que actúa ligada al ritmo con el que se establece la correspondencia, al contar los extraterrestres de la cuarta línea no necesita contar los seis primeros y establece la correspondencia con los seis primeros extraterrestres de la tercera fila empezando el conteo en grupos de tres a partir del séptimo extraterrestre, es decir que el niño esta acudiendo a una experiencia anterior para actuar posteriormente en la cual no necesitó contar los seis primeros extraterrestres de la cuarta línea, en términos de Radford (2008a) el niño está aprovechando las experiencias anteriores para orientar sus acciones posteriores, esto es un indicio del proceso de objetivación denominado iconicidad.

Desde el foco teórico con el cual estudiamos la producción de significados de los niños encontramos que Maicol se encuentra en un estado de significación factual y aunque expresa palabras clave como “*tres para cada uno*” y “*una tiene tres*” su estrategia funciona desde los señalamientos y los conteos con ritmo. En este grupo encontramos implícitos dos aspectos característicos del pensamiento multiplicativo como son el establecimiento de una relación y el conteo de grupos iguales, ambos aspectos asociados al proceso de unitización.

Finalmente queremos llamar la atención sobre dos aspectos. El primero tiene que ver con la intervención realizada por Eduard en L2 quien pareciera reclamar la inscripción, la expresión “*¿cómo lo vamos a hacer?*” y su consiguiente auto respuesta “*¿coloreados?*” es una manifestación de la necesidad de tener registros, de palpar, de poder acceder al objeto de forma mediada, necesita algo para poder tomar conciencia de lo que están haciendo. Posteriormente es subsumido por la forma de acción de Maicol y realiza el conteo en grupos de tres extraterrestres tal como lo hizo Maicol. Un segundo aspecto a resaltar es el hecho de contrastar la actividad semióticamente mediada desplegada por Maicol durante la labor, y que anteriormente presentamos, con la producción final en la hoja de trabajo (Ver figura 20), en este caso toda la actividad realizada por el niño se condenso en las palabras “*sobra una*” que insistimos no logra dar cuenta de todo el esfuerzo realizado por Maicol y su grupo para resolver la tarea.

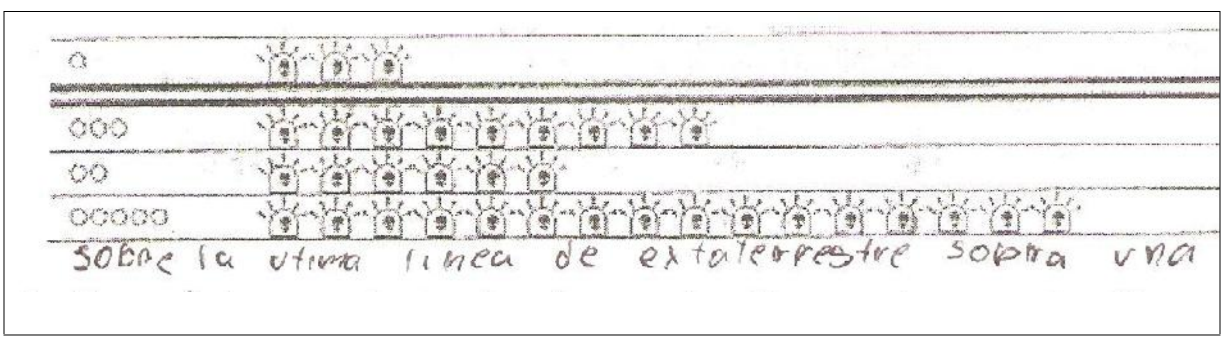


Figura 20. Respuesta escrita dada por Maicol a la tarea 1.

En otro de los grupos que resolvía la tarea, inquirimos sobre su manera de resolverla y encontramos otros aspectos de necesaria mención

L1. Sebastián: *Y con Jonathan hicimos las cuentas y* ***cada uno … en una ración come de a un cuarto, entonces ellos tres*** [señalando los extraterrestres de la primera fila] comen de

esta ración [señalando la ración de la primera fila]. *Un cuarto cada uno.* ***Acá***, [señala el primer extraterrestre de la segunda línea] *como en una ración caben tres, o sea tres,* [señala los tres extraterrestres de la primera fila] *entonces* ***uno, dos, tres*** *en la primera ración,* [Señala los tres primeros extraterrestres de la segunda línea y luego señala la primera ración de comida, de izquierda a derecha] *dos* [señala la segunda ración de la segunda línea] ***acá*** *en ésta* [señala los marcianos cuatro, cinco y seis de la segunda línea]. *Y en la última entonces estos dos comerían igual* [señala la primera y segunda línea] *porque si cogen de a un cuarto los tres* [levanta los dedos anular, corazón e índice (Foto 1, figura 21)], *entonces* ***éstos*** [señala los tres primeros extraterrestres de la segunda línea] ***éstos*** *sse alimentaría con esta ración* [señala con un deslizamiento tocando la primera ración de la segunda línea (Foto 2, figura 21)], *éste* [señala la segunda ración de la segunda línea] *se alimentaría con esta ración* [señala los extraterrestres cuatro, cinco y seis] *y estos tres, los últimos tres* [señala los tres últimos extraterrestres de la segunda línea (Foto 3, figura 21)] *se alimentarían con otra ración de un cuarto* [señala la ultima ración de la segunda línea], *si profe, entonces comerían, comerían los dos de dos iguales* [señala la primera y segunda línea]. *Lo pensamos con Jonathan entonces pues esa..* ***esa es como nuestra formula***
L2. P: *¿y los otros?*
L3.Sebastián: *y éste come* ***cómo de a un cuarto*** [señala la primera línea] *entonces acá* [señala la tercera línea] *les tocaría tomar menos, porque*
L4.Jonathan: *no, no no porque aquí son iguales* ***tres y tres*** [señala los extraterrestres de la segunda línea, haciendo un deslizamiento horizontal de izquierda a derecha en dos tiempos, un primer deslizamiento hasta el tercer extraterrestre y un segundo deslizamiento hasta el último extraterrestre de la fila] *y hay dos* [señala las raciones de comida]
L5.Sebastián: *Entonces acá también comerían igual* [señala la tercera línea]
L6.Jonathan: *También comerían igual* [señalando la tercera línea] *porque* ***éste*** *es una ración de un cuarto* [señalando las raciones de la tercera línea] *y* ***aquí*** *hay tres* [señalando los extraterrestres de la tercera línea], *pues ahí* ***estos*** *tres* [señala el tercer extraterrestre] *comerían* ***esta*** *ración*[señala la primera ración de la tercera línea] *y también* ***estos*** *tres* [señala los últimos tres extraterrestres de la línea con un deslizamiento desde el tercer hasta el sexto extraterrestre] *comerían igual que* ***ellos*** [señala los extraterrestres de la primera fila] *por* ***esta*** *ración* [señala la segunda ración de la tercera línea]
L7.Sebastián: *y* ***acá*** *profe, que* ***acá*** *es más difícil* [señala la última línea] *porque* ***acá*** *ahí son los más marcianos porque mire* ***acá*** *hay seis, nueve, once* [mientras señala los extraterrestres de la última línea va realizando un deslizamiento horizontal de izquierda a derecha y simultáneamente va contando los extraterrestres]
L8.Jonatán: *doce, pere* [mientras señala los extraterrestres de la última línea va realizando un deslizamiento horizontal de izquierda a derecha y simultáneamente va contando los extraterrestres (Foto 4, figura 21)]
L9.Sebastián: *quince , hay quince, hay quince*
L10.Jonatán: *quince*
L11.Sebastián: *quince, mira entonces quince ee* ***acá*** *un cuarto* [señala la primera ración de la última fila] *entonces cabería [sic] pa tres,* ***acá*** *caberian pa [sic] tres, entonces en* ***esta*** *ración* [señala la segunda ración de la última fila] *caberian pa [sic] otros tres entonces daría hasta* ***acá*** [señala el sexto extraterrestre], *va la tercera ración sí* [señala la tercera ración de la última línea], *entonces ee quedaríamos hasta* ***acá*** *un, dos, tres* [señalando los extraterrestres siete, ocho y nueve], *entonces quedarían dos raciones, nos queda otra*

[señala la cuarta ración de la última línea] *cierto ¿y dónde quedamos?* [Realiza el conteo de los extraterrestres]
L12.Jonatán: ***Acá*** [señalando el noveno extraterrestre (Foto 5, figura 21)]
L13.Sebastián: *Entonces mira un, dos, tres* [contando los extraterrestres diez, once y doce] *pero y entonces faltaría uno, entonces* ***ellos*** [señala los extraterrestres de la última fila] *comen menos que comen* [señala la primera línea de extraterrestres] *o sea* ***acá*** ***estos*** *dos* [señala la segunda y tercera línea de extraterrestres] *comerían igual, si profe pero* ***acá*** [señalando los extraterrestres de la última línea (Foto 6, figura 21)] *comerían menos*
L14.P: *Hay que escribir todo esto que estamos realizando*

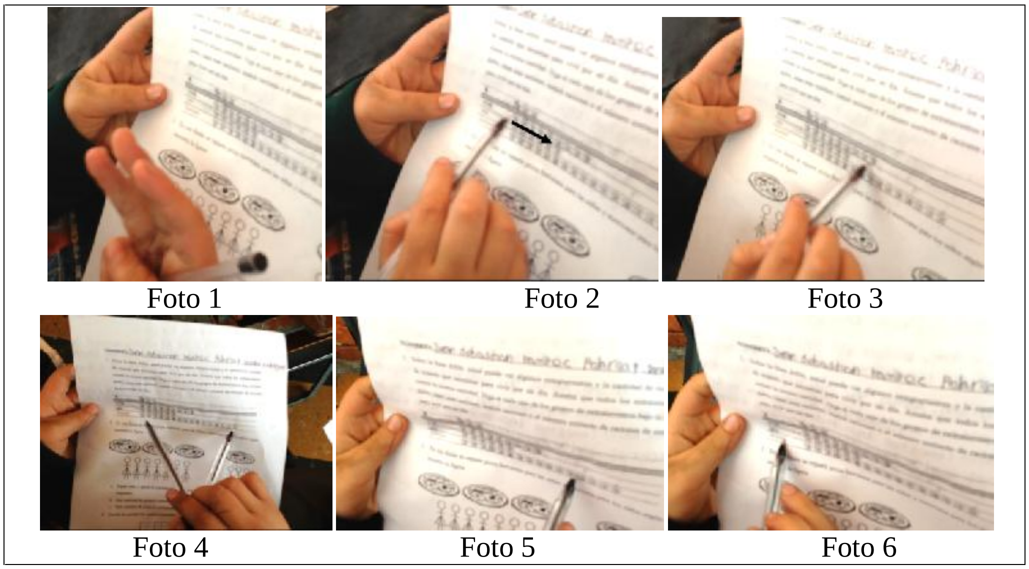


Figura 21. Conteo dactilar, señalamientos y deslizamientos realizados por Sebastián.

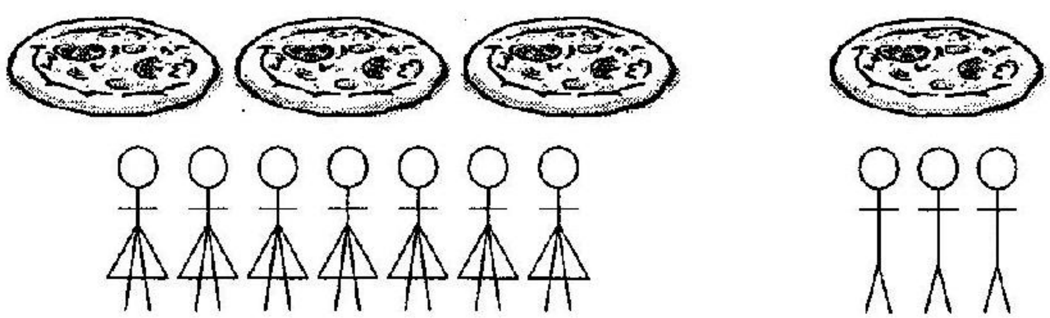
Sebastián trabaja con la partes de la unidad, resuelve la tarea, aún cuando sus palabras no se correspondan con la lógica cultural de referir dichas partes, es decir cuando en L3 dice "como de a un cuarto" realmente está trabajando con un tercio. Esta manera de resolver la tarea nos demuestra como los estudiantes piensan con los signos que tienen a su disposición, y con ellos logran resolver la tarea. Aquí la actividad perceptual se acompaña constantemente de la actividad sensorial, toda vez que las acciones, señalamientos y deslizamientos, se desarrollan sobre la representación gráfica y recaen directamente sobre los dibujos, estos señalamientos y deslizamientos tocando muestran un proceso corpóreo de subitización. Las intenciones de los niños con estos gestos tienen el carácter de hacer aparecer ante sí mismos y ante los demás la manera en que la cantidad de extraterrestres y de raciones de comida se relacionan, en el gesto se condensa un conteo, por lo que se considera que con el deslizamiento ya se abarcó o se hizo referencia al cardinal de ese conjunto de extraterrestres.

En la foto 1 (figura 21) aparece el señalamiento o conteo dactilar realizado por Sebastián, el cual aparece como un recurso semiótico por antonomasia cuando trabajamos con el conteo de cantidades, al respecto la investigación nos permite reconocer que este recurso semiótico, que en este estudio se manifestó frecuentemente, se constituye en una autentica manifestación del pensamiento de los niños. Butterworth (1999, citado por Radford & André, 2009) sostiene que existe una relación muy estrecha entre la representación de las numerosidades que formamos en nuestro cerebro, en el lóbulo parietal izquierdo, y las representaciones que formamos con nuestro dedos. Al respecto la investigación desde la psicología, también ha considerado vinculante el uso de los dedos con el desarrollo del pensamiento aritmético, ver por ejemplo Sato, Cattaneo, Rizzolatti & Gallese (2007); Previtali, Rinaldi, & Girelli (2011); Bender & Beller (2011); Domahs et al. (2012) y Fischer, Kaufmann & Domahs (2012).

Los signos utilizados en este episodio sugieren un apego a las palabras clave, pero simultáneamente están desplegando una actividad perceptual entre los dos espacios de medida que se manifiesta a través de los deslizamientos y los señalamientos tocando, de allí que sea posible considerar a este grupo en un proceso evolutivo entre un estado de significación factual hacia uno contextual, en el cual aparece el conteo de unidades multiples y el establecimiento de relaciones o correspondencias como aspectos característicos del pensamiento multiplicativo.

4.2.2 Tarea 2. Las pizzas

En una fiesta se reparte pizza hawaiana para las niñas y mexicana para los niños según muestra la figura



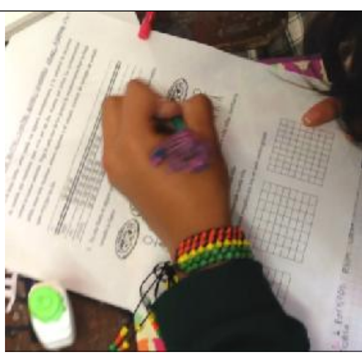
a. Según esto, a quien le corresponde más pizza a los niños o a las niñas. Justifica tu respuesta.
b. Qué cantidad de pizza le corresponde a cada niño
c. Qué cantidad de pizza le corresponde a cada niña

Figura 22. Tarea 2. Las pizzas.

También en la primera sesión los niños resolvieron la tarea dos en la cual encontramos la movilización de otros recursos semióticos como el uso de inscripciones, deslizamientos y dibujos. Mientras los grupos interactuaban para resolver la tarea encontramos un grupo que cautivó nuestra atención por la manera en que discutían entre ellos acerca de la solución del ítem a de la tarea.

L1.Camilo: *Son porciones iguales*
L2.Laura: *desde que sea* ***esto,*** *y cuando usted hace* ***esto,*** *lo parte en la mitad y ahí sí, hay quedan las tres… pero la que esta simple queda con más porciones*
L3.Dayanna: *o sea debe quedar unas porciones, vea, que queden partes iguales* [realizando un trazo vertical y otro horizontal (Foto 1, figura 22) en forma de cruz sobre la pizza que la divide en cuatro partes]
L4. Camilo: ¡*No señor!*
L5.Laura: *no, vea que no*, [realiza el dibujo de una pizza en su cuaderno (Foto 2, figura 22)] *vea* [señala tocando cada una de las partes de la pizza (Foto 3, figura 22)]
L6.Andrea: ¡*si ve!*
L7.Laura: *¡no queda, no sobra nada!*
L8.Dayanna: *no si queda, si queda, porque es que la pizza no es un circulo es ovalada, y cada vez que uno la parte así y le hace una ye acá, mira es igual* [realiza una inscripción en el dibujo de la pizza haciendo tres trazos (foto 4, figura 22)]
L9.Laura: *Sí, lo que dice Dayanna si es cierto*
L10.Andrea: *pero o sea como le ha… haz una pizza acá*
L11.Dayanna: *mira, una pizza acá esto va así*, [Toma el cuaderno de Andrea] *es así mira, dibujamos eso* [realiza el dibujo de un ovalo (Foto 5, figura 22)], *acá se parte* [realiza dos trazos diagonales al interior del dibujo en forma de V] *y acá* [Realiza un trazo vertical desde el vértice de las líneas hasta el inferior de la circunferencia], *mire acá* [Traza un circulo al interior de una de las tres regiones definidas anteriormente] *le queda un pedazo grande acá* [Traza un circulo al interior de una de las tres regiones definidas anteriormente] *y acá* [Traza un circulo al interior de una de las tres regiones definidas anteriormente]
L12.Andrea: *¿Y acá le quedo grande?* [Señala una de las regiones del dibujo (foto 6, figura 22)]
L13.Dayanna: *Sí* ***acá*** [señala tocando una de las regiones inferiores del dibujo (foto 7, figura 22)] *le queda grande y* ***acá*** [señala tocando la otra región inferior del dibujo] *le queda grande, entonces* ***acá*** *se le enchiquitó (sic) un poquito más. Ya* [Realiza un trazo desde el vértice de los segmentos hasta el extremo del ovalo reduciendo la superficie de la región inferior (foto 8, figura 22)]
L14.Andrea: *Por eso, pero…*
L15.Dayanna: *pero, queda igual, son tres partes* [Señala tocando cada una de las regiones del dibujo]
L16.Camilo: *no,* ***mire***, ***mire*** *la pizza y hace esto* [realiza un dibujo circular dividido en tres partes sobre la misma hoja del cuaderno de Andrea (Foto 9, figura 22)]
L17.Laura: *es que* ***vea***
L18.Dayanna: **mire**, uno, dos, tres [Señalando cada una de las partes del dibujo aportado por Camilo]
L19.Laura: *Digamos,* ***vea***, ***lo que está tratando de decir Dayanna***, [aporta el dibujo de un circulo] *éste es el centro de la pizza* [inscribe un punto en el centro del circulo], *cierto, hace así y así* [traza dos segmentos desde el centro hacia los extremos en forma de V y luego traza un segmento vertical desde la intersección de los trazos anteriores

hasta el extremo de la pizza (foto 10, figura 22)]
L20.Camilo: *no, no, no,* ***vea***
L21.Dayanna: *y se le parte por la mitad, y* ***mire acá*** [inscribe al interior de cada región un circulo más pequeño (foto11, figura 22)] *quedan estos*
L22.Camilo: *queda así, pueden hacer esto, mire* [Aporta un nuevo dibujo]
L23.Laura: *No porque ese queda más grande que esos dos* [señalando las partes del dibujo de Laura y hablando al tiempo con Dayanna]
L24.Dayanna: *que estos dos* [señalando las partes del dibujo de Laura y hablando al tiempo con Laura]
L25.Camilo: *pueden hacer esto… pueden hacer esto* [Divide el circulo en tres regiones]
L26.Laura: *entonces ahí sí como lo estábamos haciendo*
L27.Dayanna: *No porque* ***acá*** *queda este pedazo* [Señalando la región central del dibujo de Camilo] *más grande que estos dos* [señala las otras dos regiones del segundo dibujo de Camilo (Foto 12, figura 22)]
L28. Andrea: *por eso*
L29.Camilo: *no, porque es que lo hice mal*
L30.Andrea: *ya lo estábamos empezando a hacer*
L31.Laura: *Ya nos toca hacerlo con las cuatro porciones*
L32.Dayana: *espere*
L33.Andrea: *ya hagámoslo con las cuatro porciones*
L34.Dayanna: ***No mire que Camilo lo hizo así y le queda mejor***
L35Camilo: *si ve que si quedaba mejor* [Realiza otro dibujo similar al anterior (Foto 13, figura 22)]
L36.Laura: *Ay si vea, así chun chun* [realiza un señalamiento en el aire definiendo los segmentos que van desde el centro hasta los extremos de la circunferencia]



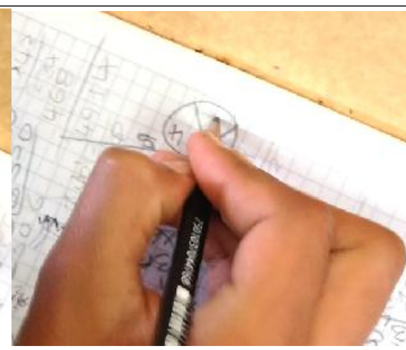


Foto 1 Foto 2 Foto 3

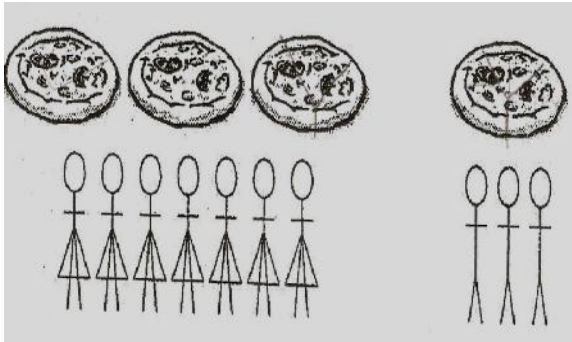


Foto 4

Foto 5

Foto 6

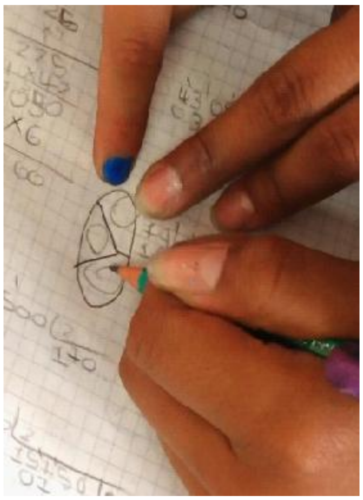


Foto 7

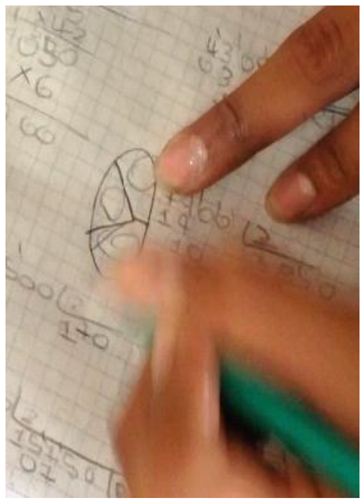


Foto 8

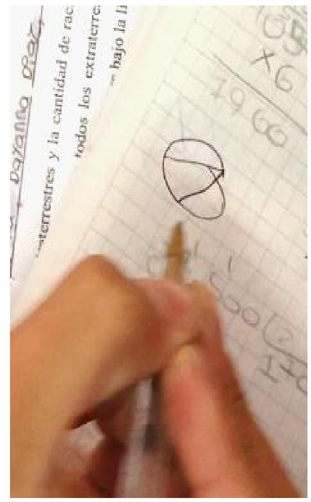


Foto 9

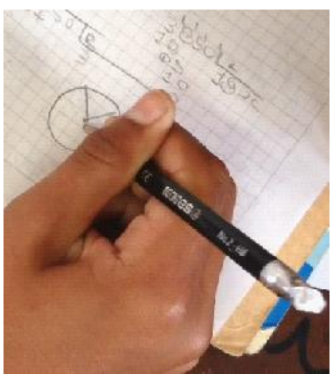


Foto 10

Foto 11

Foto 12

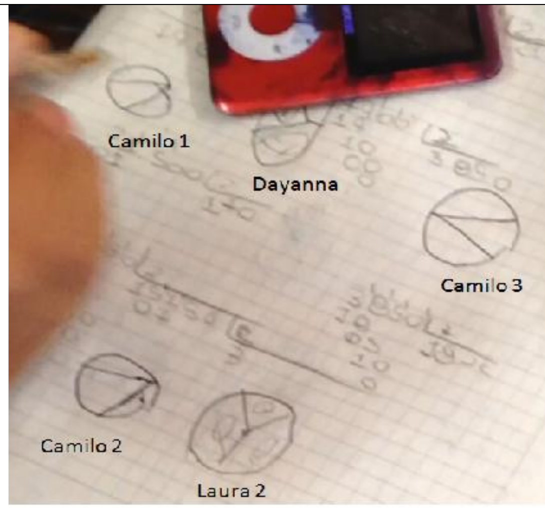


Foto 13

Figura 23. Dibujos e inscripciones realizados por el grupo de Camilo, Dayanna y Laura para partir una pizza en tercios. Configuración de un nodo semiótico colectivo.

En este grupo aparece el dibujo como un recurso semiótico que evidencia cómo la tarea provoca su emergencia y les permite a los niños resolver la tarea aun cuando este dibujo no se corresponda con la lógica histórico cultural de la partición en tercios para regiones circulares, de hecho esta partición es la que genera la discusión, si ellos supieran cual es la manera culturalmente aceptada para partir una región circular en tres partes entonces no habría nada que discutir; sin embargo este recurso semiótico no debe ser despreciado, por el contrario podría ser considerado como una variable didáctica importante para las discusiones grupales y una manera de reconocer que aún cuando la manera de hacer y ser frente a la tarea desplegada por este grupo no es la pretendida, si es posible evidenciar como este modo de acción colectivo permitió resolver adecuadamente la tarea. Recordamos que no estamos buscando respuestas correctas e incorrectas y que nuestra intención de fondo no estaba en orientar un proceso de enseñanza-aprendizaje, buscamos comprender las maneras en que trabajan los niños a través de las manifestaciones que ellos realizan cuando trabajan juntos.

Los deícticos espaciales como el *"acá"*, *"éste"*, *"esto"* están funcionando para hacer alusión a algo, para mostrar algo, en este caso las características de los dibujos hechos por los integrantes del grupo, de igual manera las expresiones como: *"mire"*, *"vea"*, *"estos"* *e*stán sometiendo a consideración de sus compañeros los dibujos que ellos proponen y estas expresiones están siempre acompañados de un movimiento kinestésico indéxical, esta conjunción de signos se utiliza como un recurso extralingüístico que ayuda en el proceso de objetivación porque hace parte de la comunicación entre los miembros del equipo y permite mostrar a los otros sus percepciones e intenciones frente a la tarea, de manera que trabajando juntos logren el objetivo de la misma.

La actividad perceptual desplegada es evidente, pero no es una actividad perceptual para sí mismos ésta está puesta en función de una intención colectiva, una manera responsable de encontrar en las estrategias del otro, aciertos o falencias que los encaminen a una solución que satisfaga inicialmente las aspiraciones del grupo, para que luego empiecen a satisfacer las aspiraciones de la clase. Esta misma actividad perceptual jugó en contra de la representación usada en la tarea, cuando Dayanna en L8 afirma que la pizza es ovalada se estaba fijando detalladamente en el dibujo presentado en la tarea y esto definió la manera en que representaban las pizzas, situación que inquiere y alerta sobre la necesidad de acudir a representaciones más fieles en el diseño de las tareas pues en tanto los niños utilizan las representaciones icónicas para resolver la tarea esperan de ésta que sea lo más fiel posible a la situación simulada, además estas representaciones son una variable didáctica importante en tanto perfilan formas de acción y reflexión particulares desde la interpretación de dicha representación.

Este episodio es una evidencia de labor conjunta en la que cada miembro de la comunidad está aportando algo, no para sí, sino para el grupo. Existe una responsabilidad por el otro, por ir juntos hacia un mismo ideal, este episodio nos permite evidenciar la zona de desarrollo próximo como ese espacio relacional, no físico, en el que la labor conjunta encamina a los individuos a pasar de lo social a lo individual en una comunión de conciencias que forma otros seres capaces de valorar éticamente los posicionamientos subjetivos de sus compañeros, aquí cada niño está interviniendo desde su creer, los sentidos subjetivos propios se someten a consideración de los demás y de allí obtienen retroalimentación. Estos momentos de interacción configuran lo que Radford & Roth (2010) han denominado un espacio de acción conjunta en el cual “el pensamiento aparece como un fenómeno colectivo” (p.6) y es parte de un proceso de subjetivación (Radford, 2014).

Simultáneamente el MSO *dibujo* no aparece de forma aislada, surge como parte de la labor desplegada por el grupo, cada estudiante aporta una manera de repartir las pizzas, cada estudiante está aportando un recurso semiótico, Camilo aportó 3 versiones de una misma intención, Laura aportó dos versiones de su dibujo y Dayanna aportó una. Hechos como éste han sido caracterizados en Gómez (2013) como un nodo semiótico colectivo[4], una parte de la actividad de los estudiantes en la que cada uno aporta recursos semióticos propios para la solución de la tarea. Además los aportes al grupo, son un indicio de que la tarea está permitiendo que los estudiantes sean con otros, que encuentren otras voces igualmente validas, que son susceptibles de considerar o desechar, particularmente cuando se centran en la discusión de la igualdad entre las partes del todo y que ha de verse reflejado en las partes de la pizza, sin embargo parece que los argumentos de Laura y Dayanna no son suficientes para persuadir a los demás sobre su forma de acción y es la forma de repartir las pizzas sugerida por Camilo la que termina imperando.

[4] Inicialmente llamado nodo semiótico social. En discusiones posteriores se ha considerado más conveniente reemplazar el término social por colectivo. (Primer simposio sobre Teoría de la Objetivación. Enero de 2014.)

A partir del despliegue de los recursos semióticos considerados podemos situar a este grupo en un estrato de generalidad contextual en el que los niños acuden a los dibujos y sus consecuentes explicaciones para resolver la tarea, los dibujos están dentro del contexto de la tarea y consideran tangencialmente discusiones subjetivas con respecto a la partición de un todo circular en tercios. En la manera de resolver la tarea utilizada por este grupo emerge como un aspecto característico del pensamiento multiplicativo el establecimiento de relaciones entre números que no hace parte solamente del pensamiento multiplicativo sino que posibilita la instanciación de formas prototípicas de comprender los números racionales a través de las fracciones como partes de un todo para el ítem a y como operadores para los ítems b y c.

Para abordar los ítems b y c de la tarea acudimos al grupo de Samuel en donde encontramos el despliegue de ciertas formas de acción que nos permiten problematizar una posible tipología de estratos de pensamiento multiplicativo, toda vez que en este episodio Samuel acude a palabras clave para resolver la tarea, pero simultáneamente acude a un registro simbólico, mediado por el uso de la calculadora, que podría considerarse como indicio de un estrato de significación simbólica en la cual la dilatación semiótica hace difusa la ubicación entre un estrato de significación y otro.

Cuando Samuel y Jonathan estaban resolviendo el ítem b y c visité el grupo para indagar cómo estaban contestando a estas preguntas:

L1.P: *¿como dicen ustedes que lo pueden hacer?*
L2.Samuel: *Yo digo que dividiendo*
L3.Nicolas: *dividiendo, si*
L4.P: *¿qué en qué?*
L5.Samuel: *siete entre tres*
L6. Nicolás: *siete entre tres* [hablando al tiempo con Samuel. Realiza un deslizamiento sobre la cantidad de niñas]
L7.P: *¿y en el otro caso?*
L8.Samuel: *ehh ya ese si es, de de a un pedazo*
L9. Nicolás: *tres* [hablando al tiempo con Samuel. señala los niños]
L10.Samuel: ***que tres dividido en uno***, *da uno*
L11.P: *tres dividido en un pedazo, háganlo así, háganlo así y me cuentan a ver cómo, a que llegaron, listo*
L12.Samuel: ahh listo
L13.P: *Háganlo así y a ver si podemos contestar las preguntas, ¿Quién comió más pizza?*

Al terminar de resolver la tarea el grupo es entrevistado por el investigador auxiliar

L14. Nicolás: *y en el segundo nosotros vimos que aquí decía que según esto, a cuanto le correspondía a cada uno*
L15.Samuel: *a los niños, entonces nosotros* ***dividimos tres entre uno*** [señala tocando los niños (foto 1, figura 23) y luego la pizza (foto 2, figura 23)] *que da uno* [señala tocando la

pizza] *y* ***siete entre tres*** [realiza un deslizamiento con su dedo índice sobre las pizzas y luego sobre las niñas (fotos 3 y 4, figura 23)] *y nos dio un resultado de que las niñas necesitan ee dos punto tres de para cada uno¸ y después miramos de que ¿a quién les corresponde mas pizza? Y es a los niños, porque a las niñas son, es* ***una pizza para entre tres*** *y* ***acá*** *es lo mismo pero hay una niña más* [levanta el índice derecho (foto 5, figura 23)], *o sea que faltaría más comida. Y* ***acá*** *en los cuadritos*
L16.I: *espera, ¿cómo llegaron a saber que eso era más?*
L17.Samuel: *porque nosotros dividimos* [señala las pizzas y las niñas]
L18. Nicolás: *dividimos* [hablando al tiempo con Samuel]
L19.I: *¿cómo?, muestren como dividieron*
L20.Samuel: *pero nosotros …*
L21. Nicolás: *dividimos* ***uno entre tres, y tres, siete entre tres*** [señala la pizza y los niños]
L22.Samuel: *Entonces ahí miramos, cuál, cuál, que niña, cuanto le correspondía a cada niña*
L23.I: *¿hicieron la división en una calculadora, ooo?*
L24.Samuel: *si en la calculadora*
L25.I: *y entonces que les dio. Esa división*
L26.Samuel: *si*
L27. Nicolás: *dos punto tres* [hablando al tiempo con Samuel]
L28.Samuel: *dos punto tres*
L29.I: *y ese dos punto tres, ¿qué es?*
L30.Samuel: *que da dos punto tres, más o menos*
L31. Nicolás: *le corresponde*
L32.Samuel: *Como menos de un medio de pedazo le toca a cada niña, para que alcancen las tres pizzas*

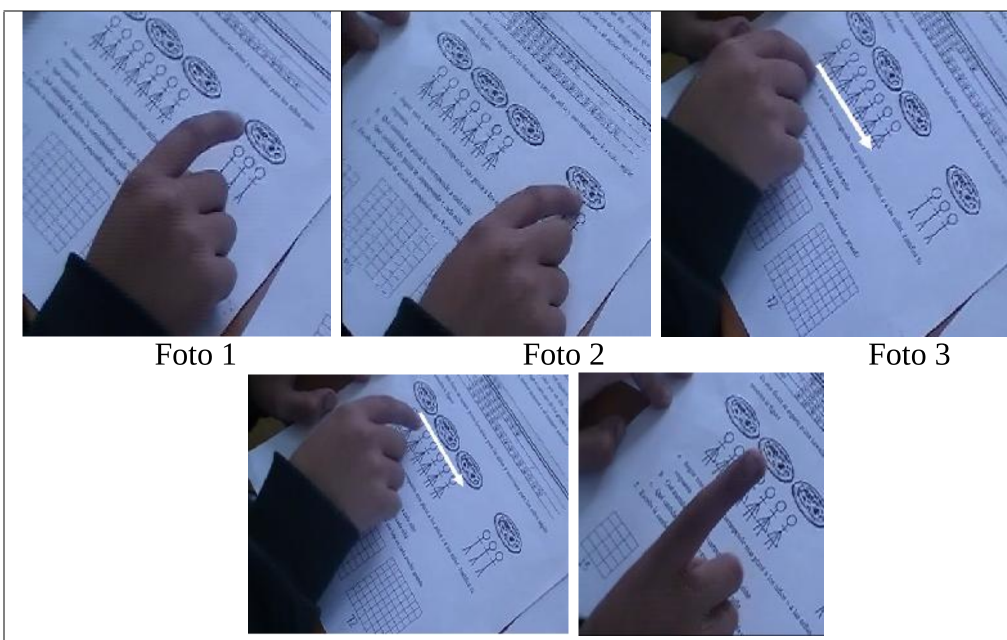


Foto 1 Foto 2 Foto 3

Foto 4 Foto 5

Figura 24. Señalamientos y deslizamientos usados por Samuel y Nicolás para explicar la manera en que repartieron las pizzas entre niños y niñas.

Los estudiantes reinterpretan el problema desde lo que conocen, lo hacen adaptando la situación de la tarea y al no encontrar posible dividir un número entre otro más grande que él, acuden a conmutar los términos de la división, esta forma de acción con los números puede corresponder a una forma de significación cultural, una manera de abordar tareas de este tipo en las que no se ha tomado conciencia del significado del número obtenido en la operación dentro del contexto de la tarea, aquí es posible suponer una desvinculación entre lo que se hace con los números, en sí mismos, y lo que debería hacerse con los números en el contexto de la tarea, es decir enuncian que les corresponde "*dos punto tres*" "*que es menos de un medio*" y al afirmar que les corresponde mas a los niños estarían asumiendo que uno es mayor que dos punto tres. Existe la conciencia de hacer una operación pero al resultado de dicha operación no se le asigna el significado que tiene dentro de la tarea. De donde vemos la complejidad de los procesos de normación, que requieren reinterpretar la situación en términos de la nueva unidad.

Desde el punto de vista semiótico, los *deslizamientos* sobre la cantidad de niñas y las pizzas se hacen para indicar la presencia de varios de ellos, se utiliza con la intención de mostrar cierta cantidad, es decir que están subitizando a partir del deslizamiento, igualmente en la foto 1(figura 23) vemos un *señalamiento* tocando para referirse a los tres niños, allí también se esta subitizando pero esta vez con el señalamiento que además se complementa con la *enunciación* de la cantidad de niños. La manera en que son desplegados estos tres signos nos permiten comprender su naturaleza, esto es su intención comunicativa que hace corpóreo el conteo de elementos de un conjunto y adquiere materialidad a través de estos signos con los cuales se subitiza, en síntesis estos signos se usan como manifestaciones de un sofisticado conteo que no requiere listar los elementos de un conjunto sino que basta con referirse a su cardinal como una sola entidad.

En este episodio nos encontramos con el uso de un artefacto como la calculadora, la cual halla el número que le ordenaron calcular, en este caso el dos punto tres, pero esto no quiere decir que el simple uso del artefacto sea garantía de una mediación o que siempre ayude a los niños a resolver la tarea, se trata del tipo de uso que se le da, de las intenciones con que actuamos con él, pues en este caso aún no se ha tomado conciencia de la relación entre el resultado y el requerimiento de la tarea.

La forma de acción de este grupo ofrece la reflexión en torno a las posibles razones por las cuales los niños al no poder dividir un número entre otro más grande, conmutan los términos de la división para dar una respuesta aún cuando de ésta no se pueda dar razón en el contexto de la tarea. Pareciera entonces que los niños están actuando con las formas de reflexión que tienen a su disposición, es decir con los números naturales, pero, o lo hacen por cumplir con dar una respuesta numérica o porque aún no se han instanciado formas de acción con tareas de este tipo o es quizás porque existen unos significados didácticos, del funcionamiento de la clase, que son instaurados por el tipo de labores habituales en las que se ven implicado los niños que orientan las acciones a obtener un resultado, más allá de encontrar su significado.

Desde los aspectos característicos del pensamiento multiplicativo en este episodio podemos aludir una concepción del que hacer multiplicativo basado únicamente en su cualidad de ser *operación entre números*, pues la movilización de MSO kinestésicos o lingüísticos en la solución de la tarea recaen directamente sobre los símbolos numéricos, es decir que en este grupo no es posible evidenciar los procesos de unitización y normación utilizados, sin que ello indique su inexistencia; creemos que esta forma de acción y reflexión de la multiplicación obedece a procesos de objetivación en los cuales se ha logrado un nivel de abstracción que no requiere explicitar la conformación de unidades, o bien a instanciaciones de la multiplicación, producidas por el tipo de labores, en las cuales la multiplicación solo ha tenido esa forma de aparición concreta.

Tal como señalamos al iniciar el análisis de este episodio, la categorización de este grupo en algún estrato de generalidad se complejiza al contrastar por un lado la expresión semiótica de los niños en la solución de la tarea, en la cual acudieron a recursos escritos a través de símbolos numéricos, con su toma de conciencia frente al significado de dichos números, razón por la cual consideramos que el tipo de números posicionan a los niños en dos dimensiones del proceso de objetivación de la multiplicación, por un lado la lógica cultural de la multiplicación con números enteros positivos y por otro lado la toma de conciencia de esta operación con numerales con coma, hecho que nos lleva a posicionar a este grupo en un estrato de pensamiento simbólico en el universo numérico de los enteros positivos pero en un estrato de generalidad factual en el universo numérico de los numerales con coma.

4.2.3 Tarea 3. Los cuadritos. Uno de los hallazgos de la sesión de pilotaje fue la recurrencia con la que aparecen los conteos y cómo estos son manifestados a través del ritmo en la entonación de las palabras número, así como la movilización de gestos principalmente kinestésicos en los cuales se evidenció el movimiento de los dedos, razón por la cual diseñamos una tarea que nos permitiera ver en funcionamiento la movilización de tales recursos semióticos y nos dejara analizar de cerca la naturaleza de estos signos, tal decisión se legitima desde el posicionamiento en la relación $\boldsymbol{\varphi}$ de la terna hegeliana que define nuestras intenciones pedagógicas, entre las que se encuentra el diseño de tareas.

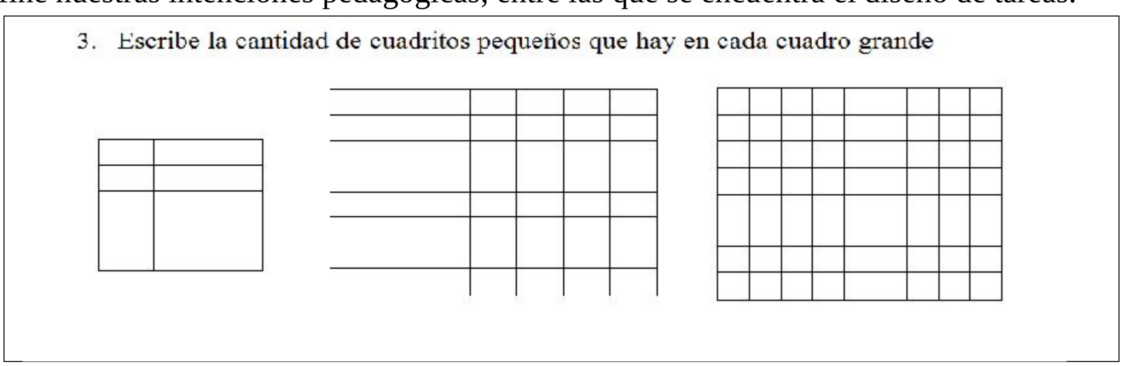


Figura 25. Tarea 3

En el desarrollo de la labor emprendida por los grupos de trabajo con esta tarea hallamos que mayoritariamente los niños acudían al conteo de los cuadritos y lograban en la interacción refinar su estrategia para pasar del conteo a la multiplicación; como evidencia de ello tomamos un episodio de la actividad del grupo de Vanessa, Jeimy y Leidy quienes acuden a una forma cultural de reflexión que permite confirmar su toma de conciencia, es decir las niñas verifican o comprueban que la multiplicación efectivamente es más eficiente que el conteo o la suma.

L1. Vanessa: *siete por ocho, … Leidy siete por ocho*
L2. Leidy: *no se*
L2. Jeimy: *Aquí hay quince* [Señala con el esfero el cuadro pequeño]
L3. P: *¿cómo supiste que había quince ahí?*
L4. Jeimy: *Contando*
L5. P: *¿los contaste?*
L6. Jeimy: *hummm* [afirmando que había contado los cuadritos pequeños]
L7. Vanessa: *Yo pues acá, cinco* [mueve el lápiz horizontalmente sobre el borde del cuadro] *y tres* [mueve el lápiz verticalmente sobre el borde del cuadro], *pues quince … siete por ocho* [empieza a contar los cuadritos con el lápiz, señalando cada cuadrito pequeño (foto 1, figura 26)]
L8. Jeimy: [cuenta los cuadritos pequeños señalando con el lápiz]… *cincuentaiseis. Vanesa a usted cuanto le dio acá.*
L9. Vanessa: [Extiende su mano indicando que espere y sigue señalando los cuadritos con el lápiz para contarlos]
L10. Leidy: *ocho por siete*
L11. Jeimy: *cincuentaiseis … hay acá* [señalando el cuadro mediano]
L12. Leidy: *ocho por siete cincuentaiseis*
L13. Vanessa: *si*
L14. P: *¿tu como lo hiciste?* [Dirigiéndose a Leidy]
L15. Leidy: *pues* ***contando los cuadritos de acá*** [mueve el lápiz horizontalmente sobre el borde del cuadro (foto 2, figura 26)] ***y de acá*** [mueve el lápiz verticalmente sobre el borde del cuadro (foto 3, figura 26)] ***y multiplicándolos*** [señala el interior del cuadro haciendo un movimiento horizontal y luego vertical]
…
L16. Vanessa: [señala con el lápiz horizontal y verticalmente sobre el borde del cuadro contando los cuadritos en cada dimensión] *ocho por nueve setentaidos, hay setentaidos cuadros ahí.*

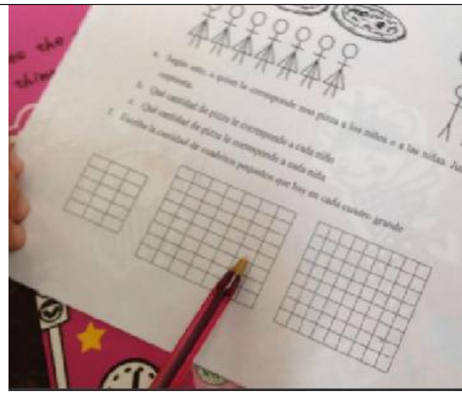


Foto 1

Foto 2

Foto 3

Figura 26. Señalamientos y deslizamientos realizados por Vanessa, Leidy y Jeimy, para realizar conteo de unidades simples y múltiples.

Existe en nuestra cultura escolar cierta tradición a generar mecanismos de prueba que cobijen de certeza nuestras acciones, así que encontramos necesario solicitar a los niños que verifiquen sus resultados, que se convenzan que el dato obtenido, efectivamente resuelve el problema. Esta práctica docente se arraiga en los niños y se nos muestra como una autentica manera de significación, es decir, se puede tomar conciencia de la efectividad de las acciones realizadas a través de la prueba de que lo realizado efectivamente se corresponde con el significado local de referencia.

En algunas investigaciones se estudian las maneras o estrategias que usan los niños cuando resuelven ciertas tareas de tipo multiplicativo, entre las que se destacan aquellas en las cuales los niños acuden al conteo de grupos iguales, al respecto de esta estrategia algunas investigaciones han considerado poco conveniente que la multiplicación tenga solamente este significado, sin embargo no encontramos nada de malo en ello, pues según la concepción de multiplicación que aquí consideramos el conteo es necesario, hay que hacer el cambio de unidad posteriormente, pero el conteo es un necesario inicio. Las niñas de este grupo están tomando conciencia de un significado de la multiplicación a partir de una tarea de arreglo rectangular, en la cual es posible determinar su cantidad de unidades cuadradas o bien contando los cuadros pequeños o bien multiplicando la medida de cada una de las dimensiones del arreglo. Este tipo de tareas hacen parte de una posible interpretación de la multiplicación que en la literatura se conoce como productos de medidas o problemas de combinación, los cuales por su estructura, generan formas de acción y reflexión distintas de aquellas en las que la multiplicación aparece como un isomorfismo de medidas o como una razón. Los modos de acción y reflexión desplegados por este grupo demuestran que el conteo es una legítima forma de multiplicar y además toman conciencia, no solo de esta forma prototípica de aparición de la multiplicación, sino de que la multiplicación es una manera sofisticada de contar. Esta reducción en los MSO, pasar del conteo de cuadros al conteo de las unidades presentes en la longitud de las dimensiones (largo y ancho), sugiere una contracción semiótica, una evolución del nodo semiótico en el cual las palabras, los dedos y la actividad perceptual trabajaron juntos para contar la cantidad de cuadros y ahora la contracción realizada permite evolucionar este conteo uno por uno a dos conteos con cuyos cardinales se realiza una multiplicación y con ésta se obtiene la cantidad de cuadros del arreglo.

Para ilustrar el uso simultaneó de estas dos formas de acción consideramos el caso de Vanesa, quien para hallar los cuadritos del primer cuadro acude a la multiplicación de sus dimensiones (foto 1, figura 27), para hallar los cuadritos del segundo acude a contarlos uno por uno (foto 2, figura 27) y para los del tercero acude a la multiplicación de la medida de sus dimensiones (foto 3, figura 27).

Foto 1 Foto 2 Foto 3

Figura 27. Dos modos de acción para realizar un conteo. Indicio de contracción semiótica.

Considerando la forma de acción de este grupo nos encontramos con una manera de significar la multiplicación como una sofisticada y económica forma de contar, es decir que la multiplicación también es un conteo abreviado y de lo cual podemos deducir otro aspecto característico del pensamiento multiplicativo: *el conteo,* tanto de unidades simples como de unidades compuestas formadas a través del proceso de unitización. En este episodio evidenciamos un conteo de unos o unidades simples dispuestas en un cierto arreglo en el cual la multiplicación se nos presenta como una operación de reducción en las cuentas, una forma de acción culturalmente codificada en la cual las niñas lograron transitar de un estrato de significación factual a un estrato de significación contextual, producto de la contracción semiótica realizada.

Con respecto a los conteos realizados con el gesto indéxical que hemos denominado señalamiento (ver figura 27), Radford & André (2009) sostienen que:

> cuando el niño empieza a contar, toca o indica con gesto indexical los objetos contados; las acciones y gestos suponen una orientación en el espacio, sin la que el conteo se perdería. De manera frecuente, cuando algunos niños están contando varios objetos frente a ellos, "pierden" la cuenta debido a la falta de orientación espacial entre lo que ha sido tocado o indicado a través del gesto y aquello que queda por contar. Esto también significa una pérdida en el control de las acciones y de la posición respecto a los objetos que están siendo contados. (p.224)

En nuestra investigación quisimos considerar tareas que, aunque matemáticamente pueden parecer similares cuando son analizadas desde el punto de vista semiótico cultural arrojan resultados distintos, es decir que en el único e irrepetible evento de su desarrollo como labor aparecen distintas formas de acción y reflexión en tareas que, como se dijo anteriormente, pueden tener una estructura semántica similar, es así como en las tareas 9 y 10 propuestas en esta investigación, las cuales referían respectivamente a hallar la superficie de una región rectangular y a calcular las posibles combinaciones entre blusas y pantalones, los niños desplegaron una actividad perceptual, kinéstesica y lingüística diferente a la desplegada por los estudiantes en esta tarea de hallar la cantidad de cuadritos. Esto sugiere una distinción entre tareas que requieran contar arreglos rectangulares, aquellas que indagan por la cantidad de superficie y aquellas en las cuales se debe establecer una correspondencia entre elementos de dos conjuntos, pues nos hace considerar que son las formas de acción de los niños sobre las tareas de tipo multiplicativo las que podrían permitir caracterizarlas y no solamente, como en la literatura se ha sugerido (Vergnaud, 1994), a partir de su estructura semántica o sintáctica.

Adicionalmente, encontramos que en esta tarea no solamente subyace una evidencia de los mecanismos de prueba que usan los estudiantes, aparece también una manera de extender las acciones realizadas, llevarlas más allá y lograr trascenderlas de las situaciones espacio temporales actuales a otras que pueden considerarse como generalizaciones. Es así como el grupo de Sebastián y Jonathan muestran indicios de un tipo de generalización aritmética para esta tarea

L1. Sebastián: *Entonces yo vi que cometió un error Jonathan porque él era así: un, dos, tres* [señala con el esfero los tres primeros cuadritos del primer rectángulo], *entonces yo le dije ¡NO! Jonathan* ***<u>hay una forma más eficiente o fácil</u>*** *de hacer que, usted coge y mira los cuadros de acá* ***<u>un, dos, tres, cuatro, cinco. ¡Cinco!</u>*** [Señalando con el esfero los cuadritos verticales de la primera columna]. *Un, dos, tres.* [Señalando con el esfero los cuadritos horizontales de la primera fila] *y cinco por tres quince, y mira si ves que habías escrito catorce. Y yo le dije no Jonathan eso no se hacía así. Entonces* ***<u>medimos</u>*** *estos y yo hice la primera formula. Entonces la segunda,* ***<u>un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho. ¡OCHO¡</u>*** [Señalando con el esfero los cuadritos verticales de la primera columna] *por,* ***<u>un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete</u>***. [Señalando con el esfero los cuadritos horizontales de la primera fila] L2. Jonathan: *siete*

L3: Sebastián: *ocho por siete … ocho por siete, cincuenta y seis. Entonces uno escribe acá el cuadrito. Y en el último, que, pues era más cuadros, más chiquitos, acá había nueve* [realiza un deslizamiento horizontal en la primera fila] *y acá había ocho*, [realiza un deslizamiento vertical en la primera columna] *y nueve por ocho setentaidos*.
L4. Jonathan: *Entonces, sería, en éste sería quince* [señala el primer rectángulo], *en éste sería cincuenta…iseis* [señala el segundo rectángulo] *en éste setentaidos* [señala el tercer rectángulo] *por estos, por esos*
L5: Sebastián: *contando los cuadritos, contando los cuadritos*
L6. Jonathan: *y las columnas. Contando los cuadritos que hay de pabajo (sic) y las columnas que hay de al lado, le podemos calcular que siete por … así*
L7: Sebastián: *bueno, profe entonces yo, yo te miro, yo te explico. Entonces acá tu coges, en, así, la,* ***sea cualquier cantidad de cuadros****, cojo desde acá y cuentas, uno, dos, tres, cuatro y cinco* [Señalando con el esfero los cuadritos verticales de la primera columna]. **Ese número lo guardas** acá, lo escribes, cinco, [con el esfero dibuja un 5 pero sin dejar el trazo, como si lo pusiera en el aire] *y acá en la columna total hay tres.* [Señalando con el esfero los cuadritos horizontales de la primera fila] *entonces cinco por tres, y lo multiplicas; y acá pasa igualito, pero con una cantidad más, más grande. un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho.* [Señalando con el esfero los cuadritos verticales de la primera columna] *Y ya es más grande el número,* ***entonces coges y lo guardas*** [con el esfero dibuja un 8 pero sin dejar el trazo, como si lo trazara en el aire] *ocho. Un, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete*. [Señalando con el esfero los cuadritos horizontales de la primera fila] ***Lo multiplicas y te da el resultado*****.** *Y* ***no tienes que*** *ponerte a hacer, uno, y marcar con punticos, tres, cuatro, cinco* [señalando el respectivo cuadrito], *me entiendes profe,* ***es como una formula*** *más fácil*.

Sebastián generaliza su modo de acción, convirtiendo su proceder en una forma de conciencia estable, que le permite sugerir que para cualquier tarea similar la forma de acción ha de ser la misma, inclusive esgrime argumentos para desechar el método de inscripción de Jonathan para hacer conteos, haciendo ver su procedimiento como una forma más económica y sofisticada. Sebastián tomó conciencia de la economía de los signos utilizados pues cuando usa frases como "*hay una forma más eficiente o fácil*" (L1) o "*no tienes que*" (L7) está manifestando que con la multiplicación de las medidas de las dimensiones no es necesario acudir al conteo, esta sobriedad en los signos, que repercute en una manera más sofisticada de hallar la cantidad de cuadritos, es evidencia de la actualización de un saber, es una toma de conciencia en la que el cuerpo interviene para manifestar su hallazgo toda vez que con las expresiones usadas se movilizan los dedos para realizar deslizamientos que indican la subitización de las dimensiones del arreglo y que hacen que en la explicación ofrecida se acuda al cuerpo para dar cuenta de su forma de acción, este hecho ha sido considerado por Radford (2010a) como formulas corpóreas, expresadas a través del cuerpo y que según Gallese & Lakoff (2005, citados por Radford & André, 2009) es un saber virtualmente encarnado, es decir un saber unido de manera intima al funcionamiento del sistema sensorio-motor. A partir de estas formas corpóreas se puede evidenciar una generalización aritmética aun cuando no se acuda a registros numéricos o alfanuméricos para expresar tal generalidad. Sin embargo podríamos incluso considerar que este grupo está trabajando intuitiva, corporal y lingüísticamente con lo indeterminado, uno de los vectores del pensamiento algebraico temprano (Vergel, 2014a). Estas formas de acción de los niños nos permiten situar a Sebastián y Jonathan en un estrato de significación contextual y ratifican las necesarias conexiones que se pueden establecer entre formas de pensamiento particulares, en este caso la manera en la que se pueden articular tareas de tipo multiplicativo como tareas previas a la generalización aritmética, camino posible hacia la generalización algebraica de patrones. Estos vínculos y posibles conexiones hacen plausible considerar nexos potentes entre formas prototípicas de pensamiento aritmético y formas de pensamiento multiplicativo propulsadas a partir de tareas que puedan ser generalizables o llevadas a momentos espacio temporales que trascienden el aquí y el ahora.

El desarrollo de este evento suscita importantes reflexiones, en primer lugar nos muestra un uso de la multiplicación para verificar o comprobar si los conteos estaban bien contados, donde aparece un uso de la multiplicación como mecanismo de reducción en las cuentas y de otro lado nos ofrece la posibilidad de extender un modo de acción a otros escenarios y poder realizar generalizaciones aritméticas.

4.3 Sesión 2. Tarea 4. La alcancía

En la segunda sesión de trabajo con los niños, se propusieron en la hoja de trabajo dos tareas, que con ocasión de una posible agilidad en el desarrollo de la primera tarea pudieran abordar la segunda, sin embargo el evento de su puesta en marcha permitió que se desarrollara solamente la tarea de la alcancía durante el tiempo de la clase.

Para su cumpleaños, David recibe una alcancía. Él ahorra semanalmente la misma cantidad de dinero, al final de la primera semana tiene $950; al final de la segunda semana tiene $1900 y así sucesivamente.

a. ¿Cuánto tendrá ahorrado David en la quinta semana? Explica tu respuesta.
b. ¿y en la semana 32? Explica tu respuesta.
c. ¿En un año? Explica tu respuesta.
d. Al cabo de cuánto tiempo David tendrá ahorrados $38.000. Explica tu respuesta.
e. Escríbele un mensaje a otra persona para que esta persona pueda saber la cantidad de dinero que tendrá ahorrada David en cualquier semana.

Durante la labor de resolución de esta tarea nos encontramos con varios aspectos que permiten visualizar que los constructos de la TCO no son exclusivos del pensamiento algebraico, el uso de artefactos, el despliegue del cuerpo como un sistema semiótico, la alteridad como posibilidad de instanciación de saberes y el desarrollo de una metodología de clase que posibilita la construcción de seres y saberes únicos.

Sin ser nuestra intención, ni el objeto de estas tareas, al igual que en la tarea anterior, los niños están produciendo significados más allá del pensamiento multiplicativo, sus producciones y pronunciamientos nos permiten encontrar huellas de algunos aspectos característicos del pensamiento algebraico, como la referencia a lo indeterminado (Radford, 2010b). Iniciamos considerando una intervención de Karen cuando laborando en su grupo nos cuenta lo que supusieron:

L1. Karen: *Pues lo que nosotras suponemos era que en la a* [refiriéndose al ítem A de la tarea que pregunta por la cantidad ahorrada en la quinta semana] *cada… en la quinta semana tendrían cuatro mil novecientos pesos*
L2.P: *¿Por qué?*
L3. Karen: *Porqué, porque cada semana subía mil pesos. La primera semana era novecientos cincuenta y en la segunda era mil novecientos, y entonces en la segunda entonces tendrían que ser dos mil ... ah no en la tercera tendría que ser dos mil novecientos,* ***<u>subimos cada semana mil pesos más que la anterior</u>****. Entonces en la quinta semana tendríamos cuatro mil novecientos pesos. En la semana treintaidos tendríamos treintaiunmil novecientos porque le quitamos un número, porque en la primera tuvimos novecientos cincuenta entonces le quitamos un número a la semana,* ***<u>al número de semana que sea</u>***
L4. P: *¿Cómo así que le quitaban un número?*
L5. Karen: *o sea son un número de semanas. Es el treintaidos que tenemos acá, entonces como en la primera tuvimos novecientos cincuenta y no tiene un numero mil, entonces le* ***<u>tenemos que quitar un numero a la semana que sea</u>*** *entonces tendríamos treintaiun mil novecientos, en la semana treintaidos*
L6.P: *¿Le quitan un número? ¿Cual número le quitaron ahí?*
L7. Karen: *Acá al treintaidos le quitamos uno, que quiere decir que quedarían treintaiuno y le ponemos el novecientos, treintaiunmil novecientos*
L8. P: *¿y todas lo hicieron así?*
L9.Laura: *Si señor*
L10. P: *y entonces en el segundo como hicieron*
L11. Karen: *pues le quitamos*
L12. P: *Ahh perdón en el tercero, que pena*
L13. Karen: *en el tercero, pues contamos las semanas en* [es interrumpida por Laura]
L14. Laura: ***<u>Contamos la semana lo multiplicamos y al resultado que nos dio le quitamos un número</u>***
L15. Angie: *no*
L16.Laura: *no*
L17. Karen: *no, hicimos lo mismo de acá pero con el número de semanas que tendría todo el año, a David le quedaría cincuentaiun mil novecientos*
L18. Laura: *Le quitamos dos números*
L19.Angie: *Uno*
L20. Karen: *uno*
L21. Laura: *Porque aquí eran cincuentaitres semanas*
L22. Karen: *Ahh sí, yo me equivoque*
L23. Laura. *Bueno, entonces acá nos quedamos en quee, que teníamos cincuentaidos semanas porque le quitamos dos números y era uno solito porque eran cincuentaitres*

semanas L24. Karen: *Porque nos equivocamos* L25. Laura: *Y acá, en la cuarta* L26. Karen: *Treintaiocho mil, tendríamos treintainueve semanas, pues si le quitamos al treintainueve uno quedaría treintaiocho mil,* ***y así con todos*** L27. Laura: *Y así, y así* [realiza un movimiento con el dedo como siguiendo el texto] L28. P: *¿Y el mensaje que hicieron como fue?* L29. Laura: *Acá esta* L30. Karen: *David tendrá cada semana ahorrados mil pesos de mas que quiere decir que, ejemplo, la semana treintaiuno David tendrá treinta mil pesos ahorrados pues le quitamos uno y en la semana treintaidos tendría treintaiun mil.* ***sube cada semana mil pesos más que la anterior***

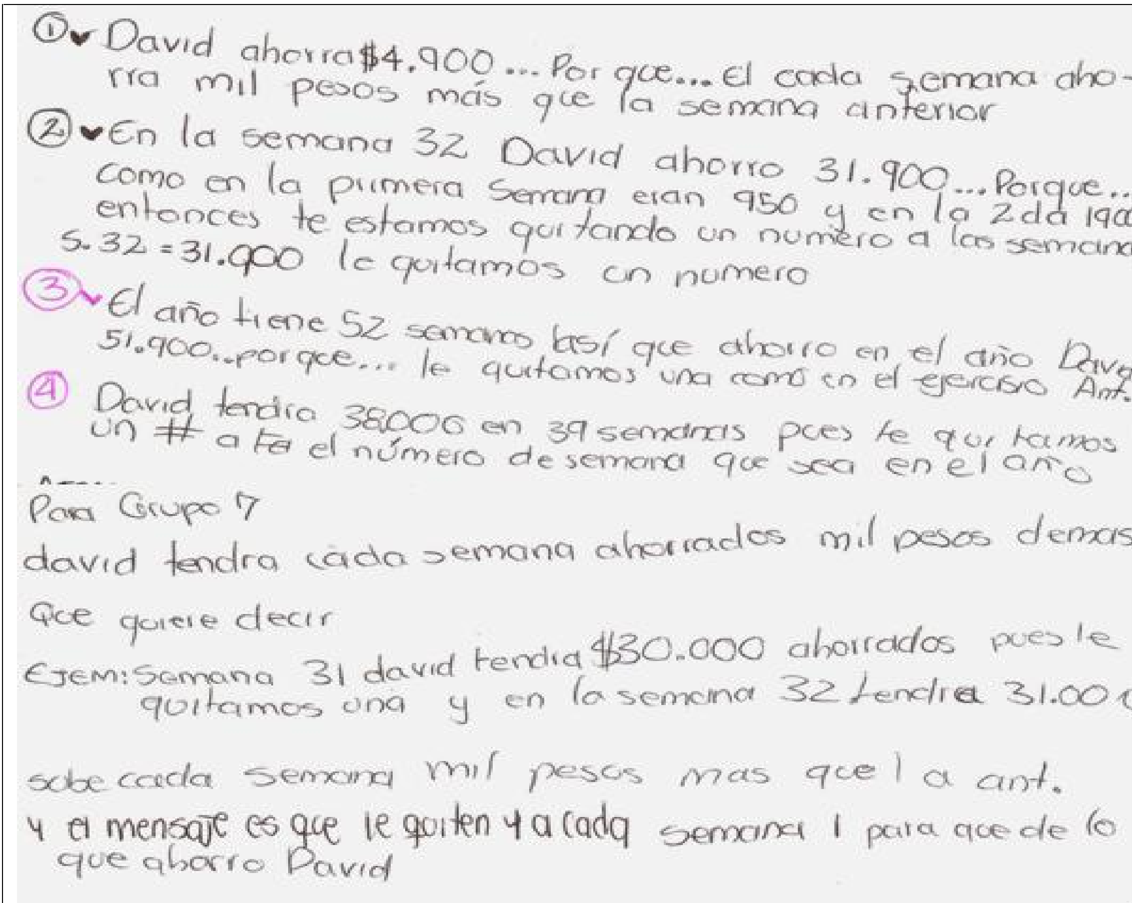

① David ahorra $4.900 ... Porque... El cada semana ahorra mil pesos más que la semana anterior
② En la semana 32 David ahorro 31.900 ... Porque... Como en la primera Semana eran 950 y en la 2da 1900 entonces te estamos quitando un número a las semana S. 32 = 31.900 le quitamos un numero
③ El año tiene 52 semanas así que ahorro en el año David 51.900.. porque... le quitamos una como en el ejercicio Ant.
④ David tendria 38000 en 39 semanas pues le quitamos un # a ta el número de semana que sea en el año
Para Grupo 7
david tendra cada semana ahorrados mil pesos demas
Que quiere decir
Ejem: Semana 31 david tendria $30.000 ahorrados pues le quitamos una y en la semana 32 tendra 31.000
sube cada semana mil pesos mas que la ant.
y el mensaje es que le quiten 1 a cada semana 1 para que de lo que ahorro David

Figura 28. Hoja de trabajo de Laura, Karen y Angie.

La explicación dada por el grupo de Karen, que supondría un despliegue de recursos semióticos que explicitaran la forma de reflexión frente a la tarea no contó con dicha dilatación semiótica, la interpretación teórica de este episodio está sujeta a las expresiones escritas utilizadas; de entrada tenemos que reconocer que la forma de acción de las niñas no se corresponde con la esperada (figura 28), su particular comprensión y posterior estrategia de solución a la tarea no da respuesta a las preguntas planteadas, sin embargo las niñas están abordando la tarea como una generalización aritmética en la cual emergen términos como "*número de semana que sea*" (L3) o "*tenemos que quitar un numero a la semana que sea*" (L5), expresiones que desde la TCO son manifestaciones de la analiticidad como una forma particular de trabajar con lo indeterminado (Radford, 2010b; Villanueva, 2012; Gómez, 2013; Vergel, 2014a). Este modo de acción y reflexión nos lleva a considerar que algunas tareas no solamente producen instanciaciones de un tipo particular de forma de pensamiento, a su vez permiten establecer conexiones entre otras formas de pensamiento, la manera de proceder de las niñas nos permite inferir que este grupo se halla situado en un estrato de significación en el que la indeterminancia ha aparecido y que permite incluso ubicarlas en un pensamiento algebraico contextual con la presencia de algunos características de pensamiento multiplicativo también contextual.

Cuando las niñas abordan el ítem e de la tarea (L30), permite comprender su forma de acción, dado que este ítem convoca a explicar la manera en que trabajaron y se constituye así en una potencial forma de explicitar o visibilizar los MSO utilizados, las estrategias y conclusiones que obtuvieron en la resolución de la tarea. Este ítem se incluyó precisamente con la intención de capturar las producciones de los niños condensadas en un mensaje, en el cual debe explicarse el procedimiento seguido y puede generar un despliegue de acciones que le permitan comunicar a los otros sus resultados, tal como se ha utilizado en Radford (2012a), Gómez (2013) y Vergel (2014a). Este despliegue de acciones requiere hacer manifiesta la manera como se logró abordar la tarea y por ello los recursos semióticos se despliegan nuevamente, se extienden en una dilatación de aquellos signos que permitieron lograr la toma de conciencia y que podemos considerar como una dilatación semiótica, es decir un fragmento de la actividad en la cual los niños necesitan desplegar recursos semióticos de distintos tipos para explicar a otros, e incluso a sí mismos, la manera en que han logrado instanciar alguna de las formas de acción que llevan a la solución de la tarea y que fueron mediatizadas por recursos semióticos que pueden ser desplegados nuevamente.

Al encontrar la particular forma de proceder de este grupo y antes de iniciar la socialización general del trabajo realizado en los pequeños grupos, las niñas son entrevistadas junto con otro grupo que resolvió la tarea de una forma diferente, de manera que se pusiera en consideración de otros compañeros la manera en que trabajaron las niñas, el grupo con el que interactuaron comprendió el enunciado de la tarea, pero al igual que otros grupos, tuvieron dificultad en hallar el valor ahorrado en un año al no conocer la cantidad de semanas que hay en un año. La discusión entre los grupos inicia con la explicación de la manera en que cada grupo resolvió la tarea, luego el grupo de niñas le explica al investigador la manera en que desarrollaron la tarea

L1. Angie: *porque era la segunda semana y ya tenía mil pesos, mil novecientos,*
L2. Laura: *entonces* ***nosotras pensamos que era subirle mil a cada semana****, porque como acá dice novecientos cincuenta y a la segunda semana dice mil novecientos,*

entonces lo único que le cambia es un mil, le agrega a la segunda semana un mil, porque la primera no tiene mil
L3.Angie: *porque nosotras creemos que en cada semana el ahorraba mil pesos*
L4. I: *¿y se cumple eso?*
L5 Angie: *señor*
L6. I: *¿eso es verdad? ¿Cada semana ahorra mil?*
L7. Angie: *siii* [hablando al tiempo con Laura]
L8: Sebastián: *no sabemos*
L9.I:*¿ustedes que dicen?* [Dirigiéndose a Sebastián y Jonathan]
L10.Sebastian: *nosotros que decimos*
L11. I. *tiene que preguntar, pregunten algo si no entienden*
L12.Sebastian: *pues a nosotros nos parece algo muy…*
L13. I: *lo que ellas dicen, entienden lo que ellas dicen*
L14. Sebastián: *no*
L15. Jonathan: *no profe, **<u>yo no entiendo porque aquí si ellas dicen</u>** que en cada semana ahorran mil pesos, entonces si aquí es novecientos cincuenta la primera y si por ejemplo le aumentan mil pesos, aquí tendría que dar mil novecientos cincuenta*
L16. Angie: *porque, o sea subió mil pesos*
L17. Karen: *entonces daría mil novecientos cincuenta*
L18. Laura: *entonces por eso nosotros pensamos que él le está subiendo mil a cada semana, está ahorrando mil a cada semana*
L19. Jonathan: *pero si acá es novecientos cincuenta. ¡sí!, entonces si le metió mil pesos, entonces ¿por qué aquí da mil novecientos?*
L20. Angie: *porque le subió mil*
L21. Jonathan: *¿**<u>y los cincuenta donde quedan</u>***?
L22.Karen: *No es eso, el está preguntando qué, si se supone que por ejemplo que tiene mil, no que tiene novecientos cincuenta acá y le suma mil debería dar mil novecientos cincuenta, yo si le entiendo a el*
L23.Sebastian: *bueno ehh y otra inquietud también*
L24. I: *no pero espera, espera porque todavía no… hasta que nos expliquen bien*
L25. Jonathan: *entonces aquí, entonces que si, entonces **<u>si ustedes dicen</u>** que, que da mil, le aumento mil a lo que ahorran, pues aquí tendría que dar mil novecientos cincuenta, así que no entiendo su, su respuesta*
L26. Angie: *porque es que o sea, ustedes, usted esta*
L27. Karen: *ahhh espere, espere que usted me esta confundiendo la respuesta. Pues en realidad yo no mire este cinco y nosotras pues no miramos el cincuenta porque casi no valía en ese momento, si*
L28. I: *¿en ese momento?*
L29. Sebastián: *Otra duda. Por qué ustedes sí, ustedes lo están haciendo de una manera diferente a la nuestra. **<u>Lo que yo no entiendo es porque ustedes</u>** le suman ese mil, si pues el resultado dice ahí, por ejemplo en la segunda: y en la semana, o sea ya lo que él va ahorrando, treintaidos o sea en la semana treintaidos, entonces uno porque tiene que, ustedes le tienen que sumar mil y después quitarle, o bueno como ustedes hicieron, porque a ustedes le dieron un resultado muy diferente al nuestro; si me entiende. Cierto Jonathan que a ellas le dieron un diferente muy… un resultado, o sea, ellas como si lo hicieron diferente*

L30. Jonathan: *como si le aumentaran aquí mil pesos, y tendrían el resultado*
L31. Sebastián: *aaahh, y en cambio nosotros no, entonces pues yo no sé cómo ellas lo harían, y pues no sé. Porque yo ahorita revise con mis compañeros y ellos tenían los mismos resultados que nosotros, yo no sé porque a ellas les fue a dar ese resultado*
L32. I: *entonces pues expliquen que fue, que paso por que les da diferente*
L33.Karen: *creo que* ***<u>nosotras en ese momento</u>*** ***<u>no pensamos que esto era de tipo multiplicativo</u>*** *sino pensamos que tendríamos que sumar*
L34. Laura: *y quitar*
L35.Karen: *que sumar y quitar*
L36. Angie: *que sumar y restar*
L37.Laura: *mas no pensamos que era multiplicar, nosotros quitamos y sumamos*

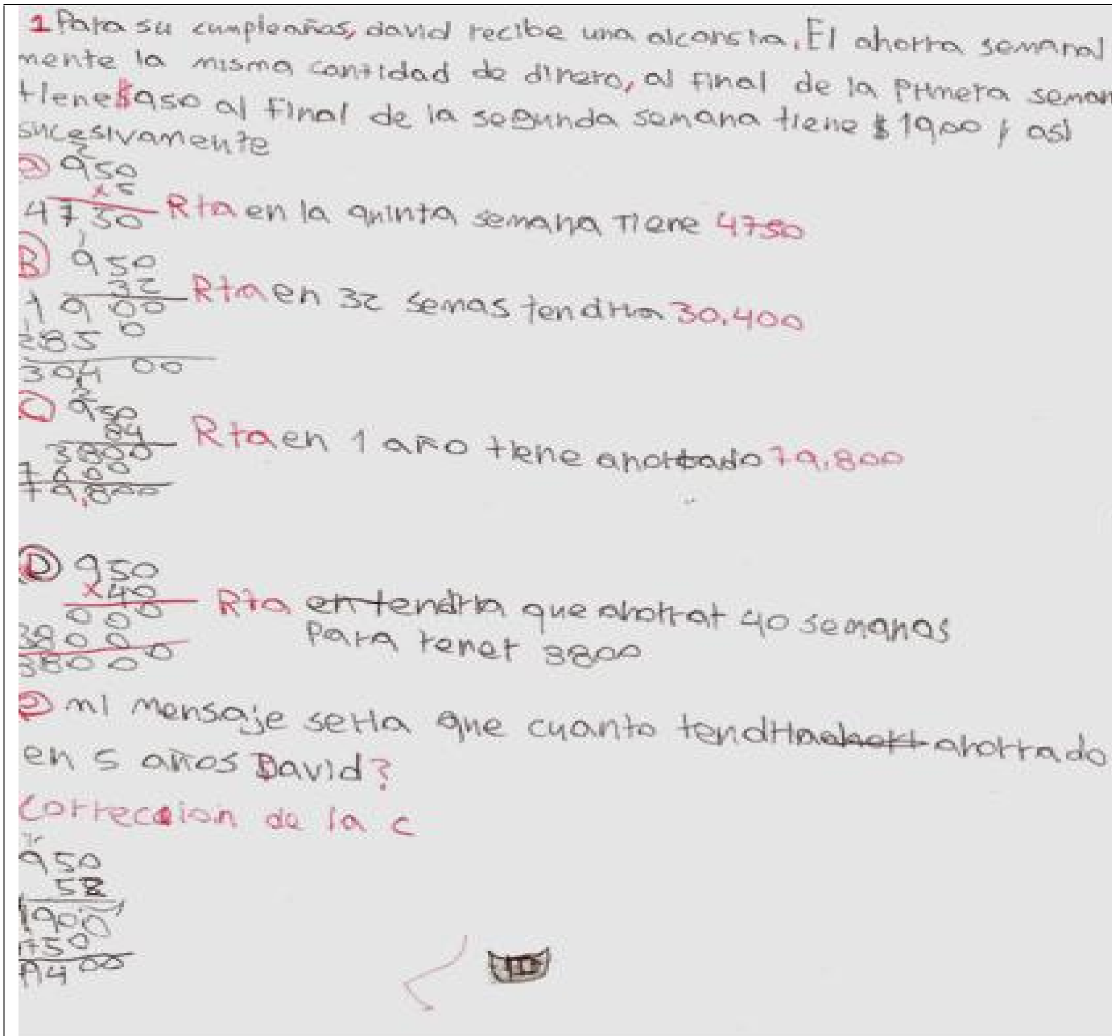


Figura 29. Hoja de trabajo de Sebastián para la tarea de la alcancía.

Este fragmento de la discusión ilustra la manera en que los niños hacen tomar conciencia a las niñas de su imprecisión y mientras Sebastián explicaba a las niñas su respuesta acerca de

la cantidad de semanas de un año logra darse cuenta que el cálculo de 12 meses por 7 días de la semana no correspondía a la cantidad de semanas de un año (Figura 29), posteriormente cuando vuelven al salón realiza la corrección de esta operación acudiendo al artefacto del calendario para investigar el número de semanas en un año. La toma de conciencia de las niñas se evidencia cuando Karen en L27 y L33 declara que en ese momento no habían tenido en cuenta el hecho de ahorrar la misma cantidad cada semana. Esta toma de conciencia de la forma de acción culturalmente aceptada que permite resolver la tarea, es indicio del proceso de objetivación iconicidad, provocada por la discusión con el otro grupo y por la orientación y las preguntas del investigador; dicha iconicidad se manifiesta lingüísticamente, en un lapso muy corto (L 33 y L 37), pero que posteriormente modifica las comprensiones de las niñas con respecto a la tarea pues en el momento de la socialización las niñas cuentan que inicialmente no habían tenido en cuenta algunos aspectos pero que posteriormente lograron entender el objetivo de la tarea.
Esta discusión entre pequeños grupos posibilita una toma de conciencia mutua en un ejercicio de escuchar y valorar éticamente las voces del otro grupo. Avocar a los miembros del grupo a entender la manera en que otros emprendieron la labor con la tarea es pieza clave en el proceso de objetivación pues es allí donde ambos grupos "cayeron en cuenta" de aquello que no habían considerado en la resolución de la tarea.

Estos espacios relacionales de acción conjunta, ofrecen oportunidades de instanciación de saberes a través de cierta interacción en la cual los grupos asumen responsablemente las formas de ser y hacer de otros, las ponen en discusión y logran simular una comunión de conciencias en torno a la manera en que procedió cada uno de los grupos para acercarse así a una toma de conciencia colectiva.

Las formas de acción y reflexión de estos grupos no fueron las únicas desplegadas durante la resolución de esta tarea, como comentamos anteriormente varios grupos se vieron enfrentados al desconocimiento de la cantidad de semanas en un año y para ello acudieron o bien a mirar en el calendario dispuesto en el salón (Foto 1, figura 30) o acudieron a un lógico razonamiento: 12 meses de 4 semanas cada uno corresponde a 48 semanas y como hay meses que tienen 31 días con ese día de mas completamos otra semana, es decir que el año tiene 49 semanas (Foto 2, figura 30).

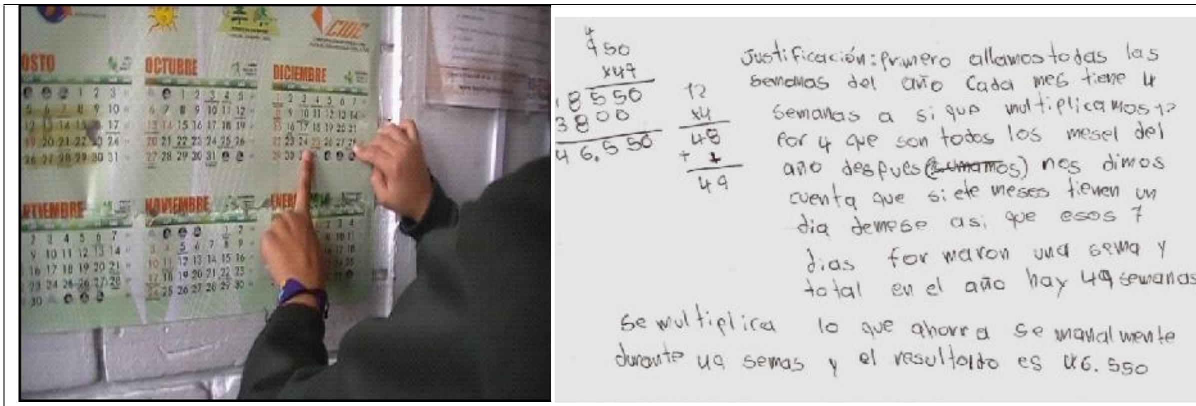


Foto 1 Foto 2

Figura 30. El uso del artefacto y la explicación escrita sobre como hallar la cantidad de semanas en un año.

Ante el numeral d que pedía hallar la cantidad de semanas en las cuales se tenían ahorrados \$38000, varios grupos acudieron a una forma de acción codificada en la cultura: el ensayo y error. Al respecto presentamos una hoja de trabajo anexa (Figura 31) usada por Catalina para hallar la semana en la cual David habría ahorrado \$38.000, en la cual realiza varias operaciones hasta llegar al valor buscado. Cuando preguntamos a Catalina como había resuelto este ítem ella afirma que siguió y siguió multiplicando, sin embargo creemos que estas formas de acción son estrategias que permiten evadir el uso de la división.

L1. Catalina: *entonces voy a seguir multiplicando hasta que me de la cantidad treintaiocho, entonces seguiiií multiplicando y seguí multiplicando, hasta que yo intenté con el treeintainueve ya estaba muy cerca a treintaiocho, a la respuesta, entonces yo multipliqué por el cuarenta y me dio esta respuesta* [señalando la operación realizada]

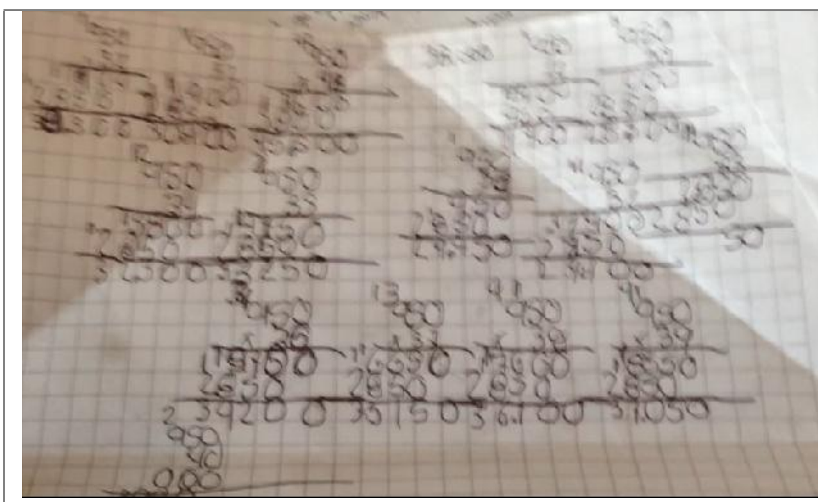


Figura 31. Hoja de trabajo de Catalina. Ensayo y error como modo de acción.

En la socialización del trabajo realizado en los grupos cada uno de ellos cuenta a la clase su manera de proceder frente a la tarea y a partir de los cuales se logran algunas conclusiones que generan acuerdos generales frente a la solución de la tarea. El siguiente episodio evidencia un fragmento de la socialización general en la cual se discutía la cantidad de semanas de un año:

L1. P: *Al fin son cuarentaiocho, cuarentainueve, cincuentaidos ¿cuántas son?*
L2. Andrea: *cuarentainueve*
L3. Sebastián: *cincuentaidos* [habla en voz baja]
L4. P: *¿por qué dices cincuentaidos?*
L5. Sebastián: *porque nosotros hicimos la multiplicación y nos dio eso y* ***al mirar en el calendario*** *vimos que en el último…* [señalando con su dedo el calendario que está pegado en la pared y haciendo un movimiento horizontal en el aire] *en el último semana, vi el número semana uno, semana dos y vimos el último número que era el cincuentaidos*
L6. P: *¿A dónde estaba eso, muéstreme?*
L7. Sebastián: [señala con el dedo índice el almanaque]
L8. Jonathan: [se pone de pie, se dirige al calendario y señala la última semana del año y al lado el número 52 (Foto 1, figura 32)] *cincuentaidos semanas*
L9. P: *ahhh ya, listo. … entonces están de acuerdo con lo que dicen los dos compañeros* [dirigiéndose a todo el curso]
L10. [Estudiantes hablando al tiempo] *no, si, no*
L11. Andrea: *No* [el profesor le da la palabra]
L12. P: *¿por qué?*
L13. Andrea: *porque uno … primero o sea nosotros multipli … eee … miramos cuanto eee cada mes cuantas semanas tenía, y tiene cuatro,* (Foto 2, figura 32) *pero hay otros meses, hay siete meses que tienen un día de mas, entonces sumamos esos días y nos dieron … siete… nos dieron una semana más, entonces sumamos esas semanas con las semanas que habíamos multiplicado por doce y nos dio cuarentainueve.*
L14. P: *Listo, entonces aquí ellos insisten en que, escuchen, hay doce meses, cada mes trae cuatro semanas, eso les da cuarentaiocho mas una semana que completan de los siete días que tienen un mes de mas, entonces les daría cuarentainueve, Al fin que hacemos son cuarentainueve o son cincuentaidos y ¿Por qué?*

Foto 1


Foto 2

Foto 3

Figura 32. Algunos MSO movilizados durante la socialización de la tarea.

Posteriormente Sebastián les dice que verifiquen en el calendario que son cincuentaidos semanas y todo el grupo se dirige al calendario para verificar esa información (Foto 3, figura 32); luego se le pregunta al grupo acerca de la conclusión a la que llegaron y ratifican que efectivamente eran cincuentaidos semanas.

En la misma socialización Karen manifiesta que ya se habían dado cuenta que el año tenia cincuentaidos semanas:

L1. Karen: *pues nosotros notamos que el año tenia cincuentaidos semanas, por que miramos en el calendario y miramos la última semana del año y ahí aparecían cincuentaidos semanas y nos dimos cuenta que nos había quedado mal*

Del desarrollo de esta tarea podemos verificar que el uso de los artefactos no es periférico de la actividad, éstos la mediatizan y van impregnados de toda una historia que nos permite acercarnos a la lógica cultural de los objetos matemáticos y culturales, en este caso a las maneras que utilizamos para medir el tiempo.

La posibilidad de interactuar entre pequeños grupos permite una toma de conciencia generada a partir de las discusiones en las que se convoque a expresar y comprender las formas de acción del otro grupo. Esto nos demuestra la efectividad de la labor funcionando bajo la metodología propuesta, que ofrece a los niños la posibilidad de exponer sus ideas ante otros, recibir retroalimentación y en esencia la posibilidad de conocer y ser con otros, esto es, el funcionamiento de la labor situado en uno de los estados de la relación θ que permite la actualización del saber.

En términos generales, esta tarea permitió evidenciar expresiones semióticas en las que se acude a los números, todos los grupos realizan las operaciones y poco requieren acudir a otros recursos semióticos, se redujeron los deícticos y los señalamientos en comparación a las tareas anteriores, este hecho podría justificarse en tanto los objetos sobre los que recae la tarea son abstractos, de difícil representación, el tiempo, el dinero y las semanas, de manera que la forma de acercarse a estos objetos, que hacen parte del contexto de la tarea, es a través de los artefactos y los signos que tienen a su disposición para referirse a estos objetos, por ejemplo las calculadoras y los calendarios.

De acuerdo a lo anterior, podemos inferir que los estudiantes considerados en los episodios anteriores podrían situarse en un estrato de generalidad simbólico en tanto se acude privilegiadamente al uso de símbolos numéricos y en donde los niños pueden interpretar la situación en términos de la unidad formada, en este caso dinero por semana. Los datos analizados hasta el momento confirman que el tipo de números presentes en la tarea impone estratos de generalidad diferentes, es decir que las formas prototípicas de pensamiento varían con el tipo de números, hecho que nos cuestiona en tanto será necesario indagar si las instanciaciones de cada forma de pensamiento o estrato de generalidad dependen de las características de los objetos conceptuales (el tipo de números por ejemplo) o solo de las acciones semióticamente mediatizadas de los niños evidenciadas a través de los MSO.

4.4 Sesión 3.Tarea 5. Los buñuelos

En la tercera sesión de trabajo propusimos la tarea de los buñuelos y las tazas de café, la cual se desarrolló de acuerdo a las consideraciones metodológicas o estados de la labor, que a su vez disponen el ambiente del salón para emprender la labor conjunta, esto es, una presentación general de la tarea, un trabajo en pequeños grupos y una socialización del trabajo realizado en los pequeños grupos.

Para unas onces hay en la mesa tres tazas de café y cuatro buñuelos. Pero llegan cinco personas. Si a cada persona se le debe dar una taza de café y se quiere mantener la relación inicial entre el número de tazas de café y la cantidad de buñuelos. (Tres tazas de café y cuatro buñuelos)

a. ¿Cuántos buñuelos deben servirse? Explica tu respuesta.
b. ¿Cuántos buñuelos deberían servirse si llegaran 9 personas? Explica tu respuesta.
c. ¿Cómo le explicarías a un mesero la cantidad de buñuelos que debe poner en la mesa según la cantidad de invitados?

Con el ánimo de aclarar nuestra caracterización del pensamiento multiplicativo de los niños a través de estratos de generalidad, examinamos en el desarrollo de esta tarea un grupo que situamos en un pensamiento multiplicativo contextual y otro que podría ubicarse en un pensamiento multiplicativo simbólico. El primer caso corresponde al grupo de Sebastián en el cual aparecen dibujos e inscripciones que develan el establecimiento de una correspondencia manifestada a través de símbolos.

Cuando el grupo de Sebastián desarrollaba el ítem B de la tarea, el nos explica que:

L1. Sebastián: *cogemos 9 buñuelos y entonces le toco uno a cada uno, sí* [dibuja nueve bolitas con un palito en la parte inferior. (Foto 1, figura 33)], *y entonces al ver que usted nos dijo que tocaba la misma cantidad que nos dio el primero, entonces un buñuelo y un tercio, pues miramos, sí, sí faltan, si en cada, si un buñuelo lo partimos entre tres, entonces faltarían seis* [señala el sexto dibujo realizado], *así que decidimos comprar tres buñuelos* [dibuja tres círculos] *y partirlos* [realiza una partición en los círculos dibujados. (Foto 2, figura 33)] *y así tendremos nuestros nueve* [realiza un gesto circular en el aire alrededor de los dibujos realizados. (Foto 3, figura 33)] *buñuelos y medio, y un tercio*.

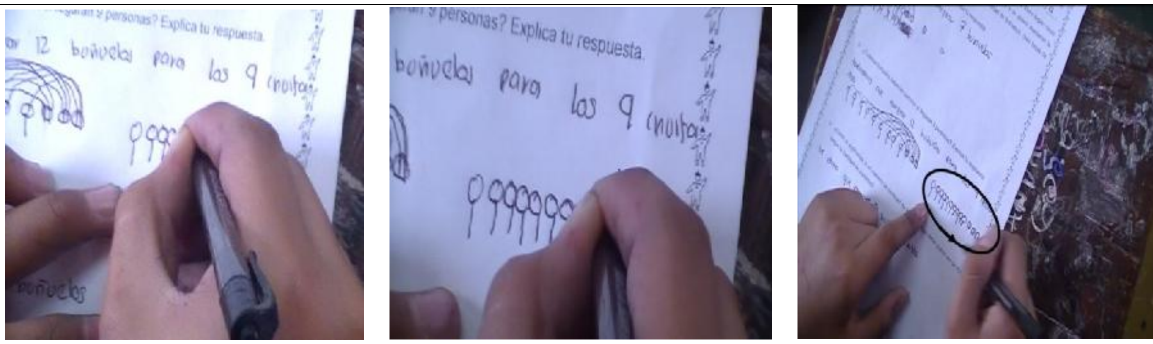


Foto 1 Foto 2 Foto 3

*Figura 33.*Dibujos e inscripciones realizados por Sebastián. Evidencia de un pensamiento multiplicativo contextual.

Para visualizar en conjunto el recurso semiótico escrito que plasmó Sebastián en la hoja de trabajo (Imagen 1, figura 34) presentamos dicha hoja y una hoja auxiliar (Imagen 2, figura 34) en la que realizó algunos dibujos

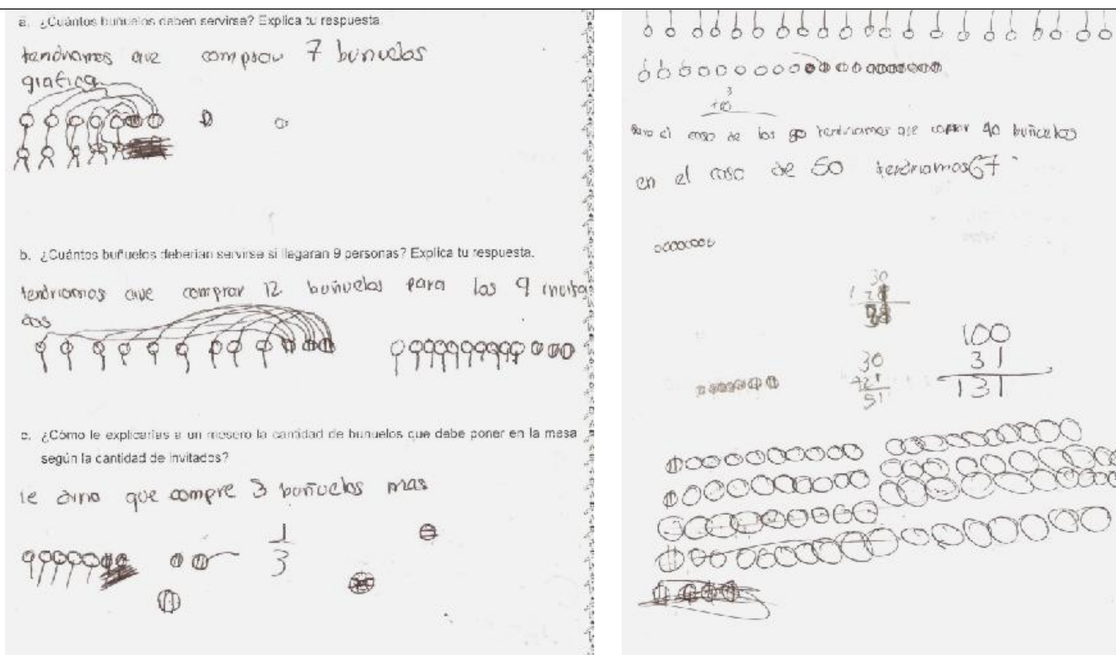


Imagen 1 Imagen 2

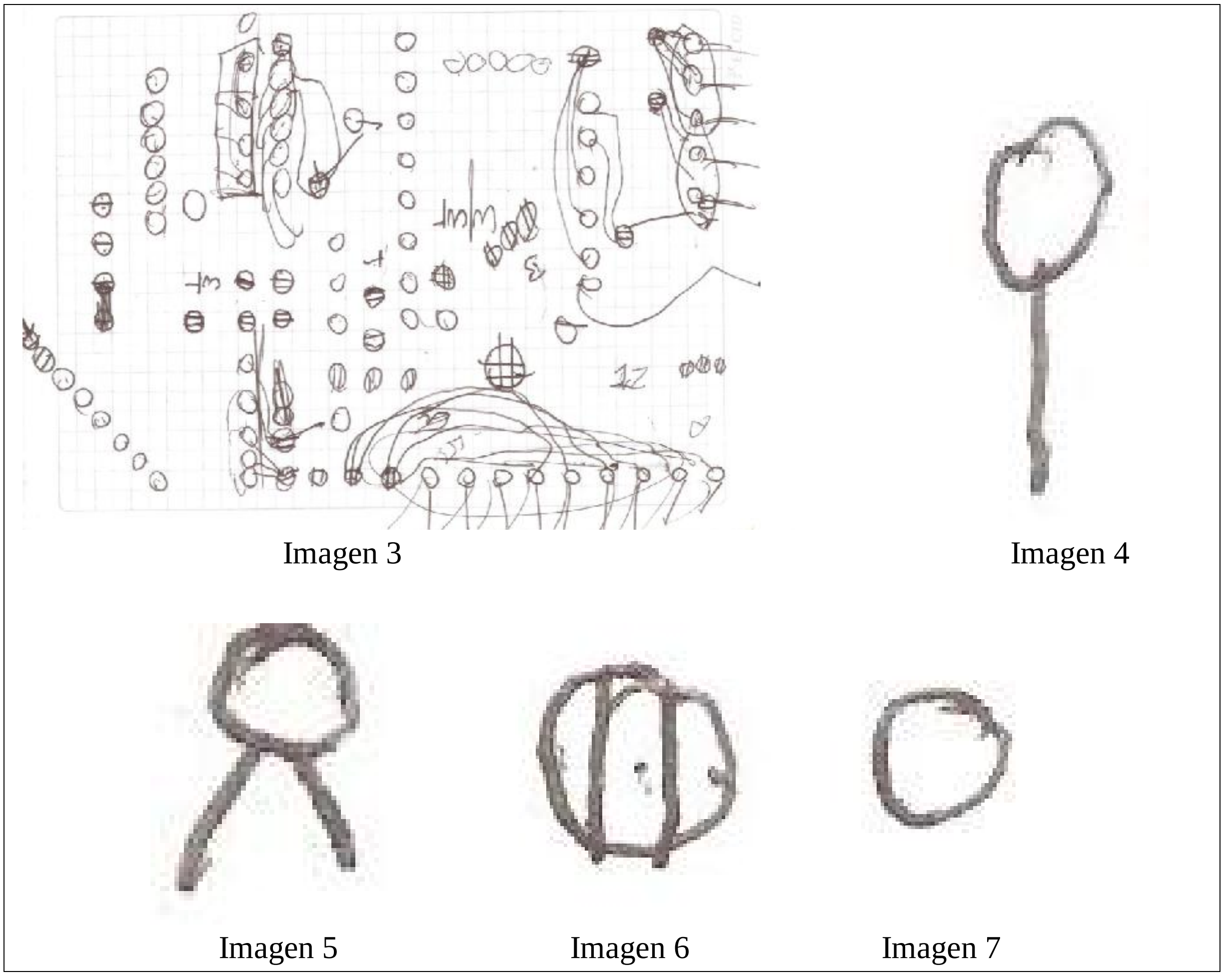


Figura 34. Recursos escritos usados por Sebastián para resolver la tarea.

La forma de acción y reflexión de Sebastián se caracteriza por la elaboración de dibujos sobre los cuales recaen posteriormente acciones como la unión a través de líneas o la división en tercios. Estos dibujos parecen simplemente representaciones de los buñuelos, sin embargo en el mismo dibujo se puede evidenciar una contracción semiótica, una economía en los signos utilizados, por ejemplo en el ítem a de la tarea Sebastián representa las personas con el signo de la imagen 5 (figura 34), los buñuelos enteros con el signo de la imagen 7 (figura 34), los buñuelos que deben partirse con el signo de la imagen 6 (figura 34), para manifestar la relación traza un segmento recto entre el buñuelo y la persona y uno curvo más largo entre la persona y el tercio de buñuelo (imagen 3, figura 34). Pero si nos fijamos en el ítem b el signo para representar las personas no aparece y en el ítem c las líneas curvas de la relación tampoco, pareciera entonces que estos signos se han subsumido en el signo de la imagen 4 (figura 34) en la cual el circulo representa el buñuelo y la línea unida a él representa su correspondencia con una persona que consume una taza de café. Esta economía en el uso de signos se corresponde con un nivel de inteligibilidad que permite ir obviando recursos semióticos que ya no es necesario explicitar porque ya hacen parte de la forma de acción y de la actividad emprendida, su desestimación permite concentrar la atención en otros aspectos de la tarea o simplemente ya no es necesario utilizarlos. En términos de la TCO podríamos considerar una evolución del nodo semiótico en el cual el dibujo, el gesto indéxical espacial para referir los nueve buñuelos, la actividad perceptual y lingüística se condensaron para lograr un modo de conciencia que permite incluso empezar a considerar, por petición de la tarea en el ítem d, cuál sería la cantidad de buñuelos para cualquier número de invitados.

Hemos considerado los dibujos como auténticos recursos semióticos, sin embargo, no todo dibujo constituye un MSO pues hay estudiantes que dibujan para representar, pero el dibujo no hace parte de la solución de la tarea, no se opera o trabaja con o sobre él, mientras que en Sebastián el dibujo se usa para establecer la correspondencia. Un caso en el que parece que el dibujo solo se usa para hacer referencia a los elementos de la tarea lo encontramos en el grupo de Eduard quien en su hoja de trabajo realiza el siguiente dibujo (figura 35).

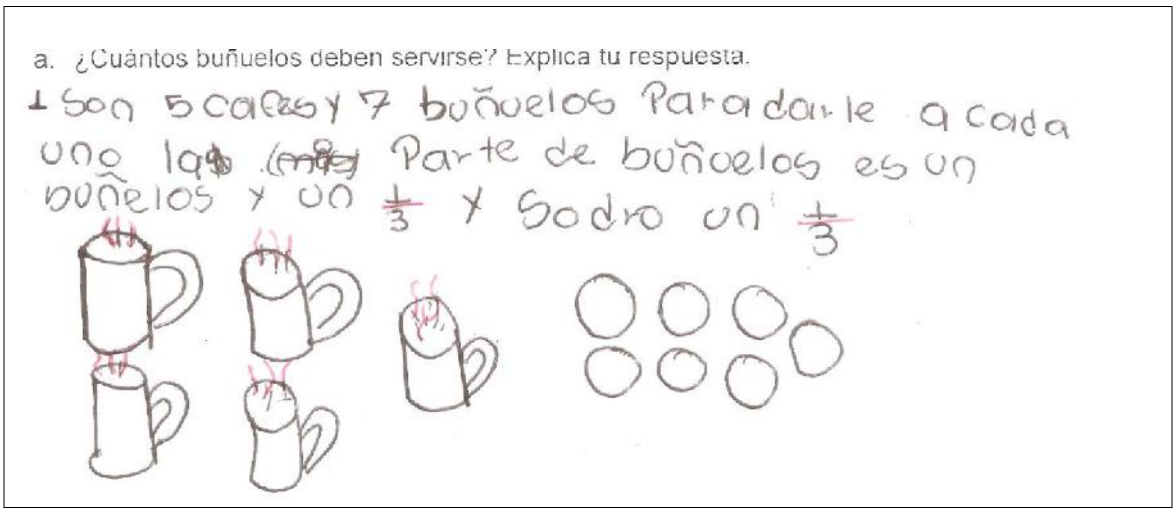


Figura 35. Dibujo utilizado por Eduard.

Por último queremos destacar que esta forma de proceder de Sebastián fue vital en la socialización, toda vez que a partir de ella varios grupos adoptaron la partición de los buñuelos a través de dibujos y cuando hizo su presentación ante el curso realizó los dibujos de los buñuelos (Foto 1, figura 36) y las particiones que él uso, adicionalmente recurrió al conteo dactilar para explicar la manera de hallar la cantidad de buñuelos para diez invitados, en donde con cada dedo iba contando tercios de buñuelo (Foto 2, figura 36), es decir que realiza un proceso corpóreo de unitización en el cual los dedos sirven para contar unidades denominadas tercios.

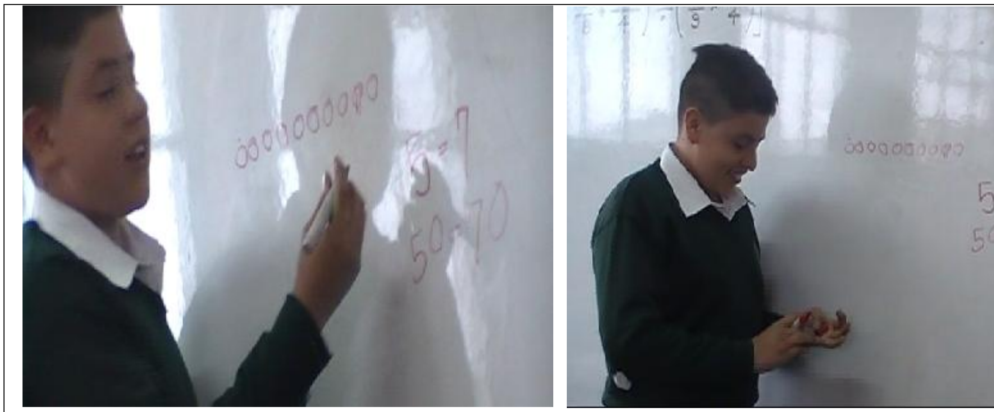


Foto 1 Foto 2

Figura 36. Recursos semióticos usados por Sebastián en la socialización.

El segundo grupo que consideramos es el de Catalina, quien utiliza únicamente los números para resolver la tarea y en consecuencia refiere las partes de buñuelo con un número con coma

L1. Catalina: *aquí sería un número, el ocho, cinco por ocho cuarenta, entonces sería cero coma ocho de porción que tiene, que cada persona tiene que …* [Esta operación la realiza en la hoja presentada en la foto 1(figura 37)]
L2. Dayana: *que coger*
L3. Catalina: *entonces cero coma ocho, buñuelos*
L4. Dayana: *para cada persona*
L5. Catalina: *para cada persona, cero coma ocho* [señala 3 veces, tocando las partes del numeral escrito] *cada persona,* ***cada cinco personas va a comer*** *cero coma ocho, igual que las tazas. Entonces aquí las tazas serian tres y el*
L6. Dayana: *pero es que ahí solo están diciendo buñuelos*
L7. Catalina: *Bueno, buñuelos sería cero coma ocho*
L8. Dayana: *No si, ese ya lo resolvimos, que es el de los buñuelos, pero no hay tazas aquí de café*
L7. Catalina: *hay que darse cuenta son tres, pero se hace lo mismo* [levantando tres dedos de la mano derecha. (Foto 2, figura 37)], *cinco, o sea la idea es cero coma*
L8. Dayana: *por eso pero aquí no hay preguntas de tazas, de café*
L9. Catalina: *ahh entonces sería lo mismo, cuatro buñuelos en nueve personas, cuatro en nueve, cero al cociente, coma tres, dos números que multiplicados, sería cuatro por nueve treintaiseis* [escribe el cuatro en el cociente y realiza un conteo con los dedos. Fotos 3 a 6 (figura 37)] *cuarenta, cero coma cuatro. O si algo se le vuelve a hacer el procedimiento pero va a dar cero coma cuatro, cero coma cuatro, cero coma cuatro,* ***los números son infinitos****, entonces por eso se le hace cero coma cuatro, entonces digamos, se multiplica ¡ENTENDIERON!*
L10. Dayana: *si*
L11. Catalina: *bueno, entonces sería en cada persona cero coma cuatro, si llega aquí en este caso y en este caso sería cero coma ocho*
L12. Dayana: *Entonces tendríamos que hacer la división*
L13. Catalina: ***por eso la división*** *y desde esta parte* [señala tocando la coma del

cociente en la división que realizó], *cuando ya exista la coma, empieza a ser un* ***número decimal****, mira que esto es una división decimál y que es diferente a lo que estamos viendo nosotros ahorita en matemáticas, nosotros estamos viendo* ***fraccionarios*** *pero aquí estamos haciendo* ***números naturales***

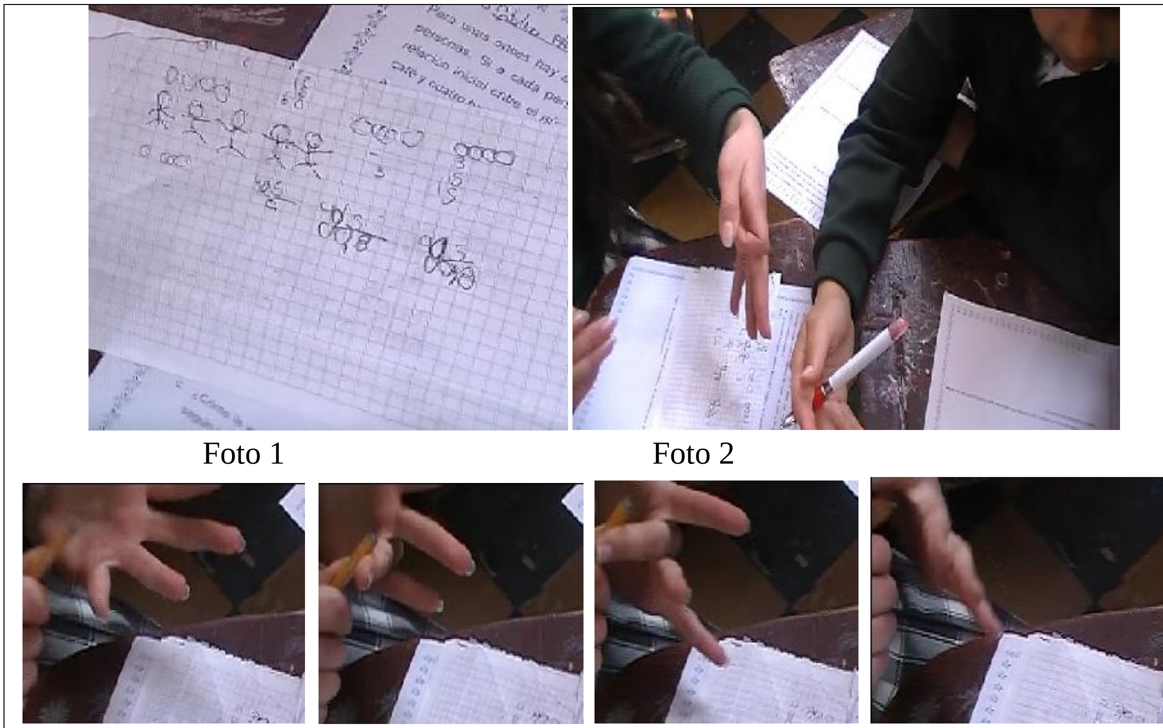


Foto 1 Foto 2

Foto 3 Foto 4 Foto 5 Foto 6

Figura 37. Recursos semióticos usados por Catalina. Evidencias de un pensamiento multiplicativo simbólico.

Catalina lleva la batuta del grupo, las demás niñas intentan seguir su discurso y hacerle caer en cuenta sobre el contexto de los números dentro de la tarea (normación), sin embargo Catalina insiste en explicar su forma de acción y para ello despliega una actividad semiótico corporal como el conteo dactilar con el cual dilata su expresión semiótica y la explícita a través del cuerpo, en este caso con sus dedos. Los señalamientos realizados recaen sobre entidades abstractas: los números, que son en este caso los objetos que hacen parte de su discurso. En L9 y L13 Catalina esgrime argumentos matemáticos que parecieran sostener su proceder y que fungen como explicaciones, por ejemplo con la expresión "*los números son infinitos*" pretende explicar la razón por la cual el número que obtiene es periódico y con el uso de los términos "*números naturales*", "*número decimal*" y "*fraccionarios*" esta argumentando la razón por la cual ella realizó la división e incluso logra manifestar los vínculos de su proceder con otras temáticas como la que está dictando el profesor titular de la asignatura. El despliegue de una actividad donde se privilegia el uso de símbolos aritméticos nos permite situarla en un pensamiento multiplicativo simbólico, en el cual también aparece el conteo dactilar como un recurso al cual acudir para realizar las cuentas, sin que ello implique una toma de conciencia de tipo factual, consideramos que este hecho, que fue provocado por la discusión entre las niñas, sugiere que la dilatación semiótica permite explicitar o extender nuevamente dichos recursos semióticos.

Los dos episodios considerados aparte de visibilizar diferencias entre formas de acción que sugieren una significación de tipo contextual en Sebastián y otra de tipo simbólico en Catalina, nos permiten reconocer indicios de dos aspectos característicos del pensamiento multiplicativo asociados a nuestros hipotéticos vectores, por un lado el significado de la multiplicación como una correspondencia y de otro lado un significado de ésta como una operación entre números, ambos significados son instanciaciones de formas prototípicas de acción codificadas en la cultura con respecto al objeto multiplicación en las cuales es necesario, por lo menos en un inicio realizar procesos de unitización y normación.

4.5 Sesión 4. Tarea 6. Los globos de helio

La labor desarrollada con la tarea seis, permitió que los niños se involucraran nuevamente con la resolución de la tarea y dieran oportunidad de socializar las acciones de cada grupo. Sin embargo con esta tarea queremos centrarnos en dos episodios que durante el trabajo en pequeños grupos ofrecen indicios acerca de los estratos de generalidad o tipos de pensamiento multiplicativo.

En un salón de grado sexto donde hay 39 estudiantes, se desea realizar una fiesta para el día de Hallowen y para ello se quieren comprar globos de helio. Un proveedor ofrece el precio más económico y vende 3 globos en $2000.

a. ¿Cuánto dinero debe pagarse por el total de los globos? Explica tu respuesta
b. ¿Cuánto dinero debe aportar cada estudiante? Explica tu respuesta
c. Si en los demás salones de grado sexto desean comprar de estos mismos globos, ¿Cuántos deberían comprar y cuanto deberían pagar en total?

Una vez terminaron de resolver la tarea, el grupo de Catalina fue entrevistado para indagar su forma de acción:

L1. Catalina: *Lo que nosotros hicimos fue* ***una regla de tres simples****, porque nos dieron*
L2.I: *no pero espera, explica que estas, que me vas a explicar*
L3.Andrea: *¿el primero?*
L4.Catalina: *el primero. Todo*
L5.I: *si todo*
L6.Catalina: *ahh, en el primero decía ¿cuánto debe pagarse por el total de los globos? Lo que nosotros hicimos fue digamos multiplicar todo esto por los tres globos cierto y y y y en realidad pues nos dio como trece cursos, trece, trece globos por cada persona*
L7.Andrea: *paquetes*
L8.Catalina: *trece paquetes de globos y entonces nos dio veintiséis mil. Bueno ahí vez el total y entonces todo el curso pago en total veintiséis mil pesos, después dividimos los veintiséis mil pesos*
L9.I: *pago veintiséis mil pesos ¿por qué?*

L10.Catalina: *por, digamos por los globos, porque decían que, que, decía se debe pagar veintiséis mil por cada globo por que se multiplican veinte, los dos mil por trece y nos dio veintiséis mil que es el resultado, y bueno, y luego en la B decía ¿Cuánto dinero debe aportar cada estudiante?, entonces*
L11.Andrea: *nosotros lo que hicimos fue, con los veintiséis mil pesos que nos dio en la respuesta anterior lo multipli, lo dividimos por los treintainueve estudiantes que era lo que decía la ésta, que ¿Cuánto dinero debe aportar cada estudiante? Entonces nosotros lo que hicimos fue los veintiséis mil los dividimos en treintainueve y nos dio seiscientos sesentaiseis pesos, entonces pues a cada estudiante le toca aportar seiscientos sesentaiseis pesos para cada globo.*
L12.Camilo: *pues aquí hicimos, multiplicamos los veintiséis mil*
L13.I: *¿en dónde?*
L14.Camilo: *¿aquí?*
L15.I: *pues sí, pero ¿que toca hacer ahí?*
L16.Camilo: *si en los demás salones de grado sexto desean comprar estos mismos globos ¿Cuántos deberían comprar y cuanto deberían pagar? Entonces, entonces aquí multiplicamos veintiséis mil, que nos da por un curso y lo multiplicamos por los siete cursos y entonces nos dieron ciento ochentaidos mil pesos*
L17.I: *y ¿qué significa ese ciento ochentaidos?*
L18.Catalina: *que lo que hicimos fue multiplicar los siete cursos por los veintiséis mil pesos, aquí lo que se hizo fue **una regla de tres** **porque nos daban solo tres informaciones,** que era ,un curso, eee pagaba veintiséis mil pesos y los siete cursos no se sabía, ahí entonces es signo interrogativo, entonces lo que se hizo fue multiplicar los siete cursos por veintiséis mil pesos y nos dio ciento ochentaidos mil pesos*
L19.I: *si, pero ese ciento ochentaidos mil qué es?*
L20.Camilo: *lo que toca pagar*
L21.Catalina: *lo que todos los cursos tienen que pagar*
L22.Camilo: *los siete cursos*
L23.Laura: *no, los siete cursos, entre los siete cursos en total pagan ciento ochentaidos mil pesos por cada globo, por el paquetico de globos*

En este episodio Catalina nuevamente utiliza expresiones matemáticas que orientan la acción, expresiones que vinculan el que hacer multiplicativo con el razonamiento proporcional aun cuando esto solo sea evidente en términos lingüísticos; habría que indagar si efectivamente el uso de la regla de tres esta instanciado para operar cuando hay tres datos o cuando hay una relación de proporcionalidad, en virtud de posibles tendencias a acudir a una regla de tres con cualquier situación que contenga tres datos numéricos (MESCUD, 2005), sin tener en cuenta la previa y necesaria existencia de la relación de proporcionalidad. En este episodio se confirma el estado de significación que tiene Catalina con respecto a la multiplicación, el cual es de carácter simbólico en tanto se haya mediado principalmente por el uso de símbolos numéricos.

En el caso anterior encontramos a los niños trabajando sobre los números al haber comprendido la relación entre ellos a través de la regla de tres, sin embargo al momento de realizar las cuentas no es explicita la manera en que lo hicieron, aunque presumimos que se realizó mentalmente, pero esto es solo uno de los pocos casos en que eso ocurre pues en general encontrábamos a varios niños acudiendo al artefacto de las tablas de multiplicar y al conteo dactilar, como ejemplo observamos a Sebastián realizar una multiplicación acudiendo al artefacto tablas de multiplicar y a su vez al conteo dactilar, en este episodio de la grabación el niño no hablaba solo multiplicaba (figura 38).

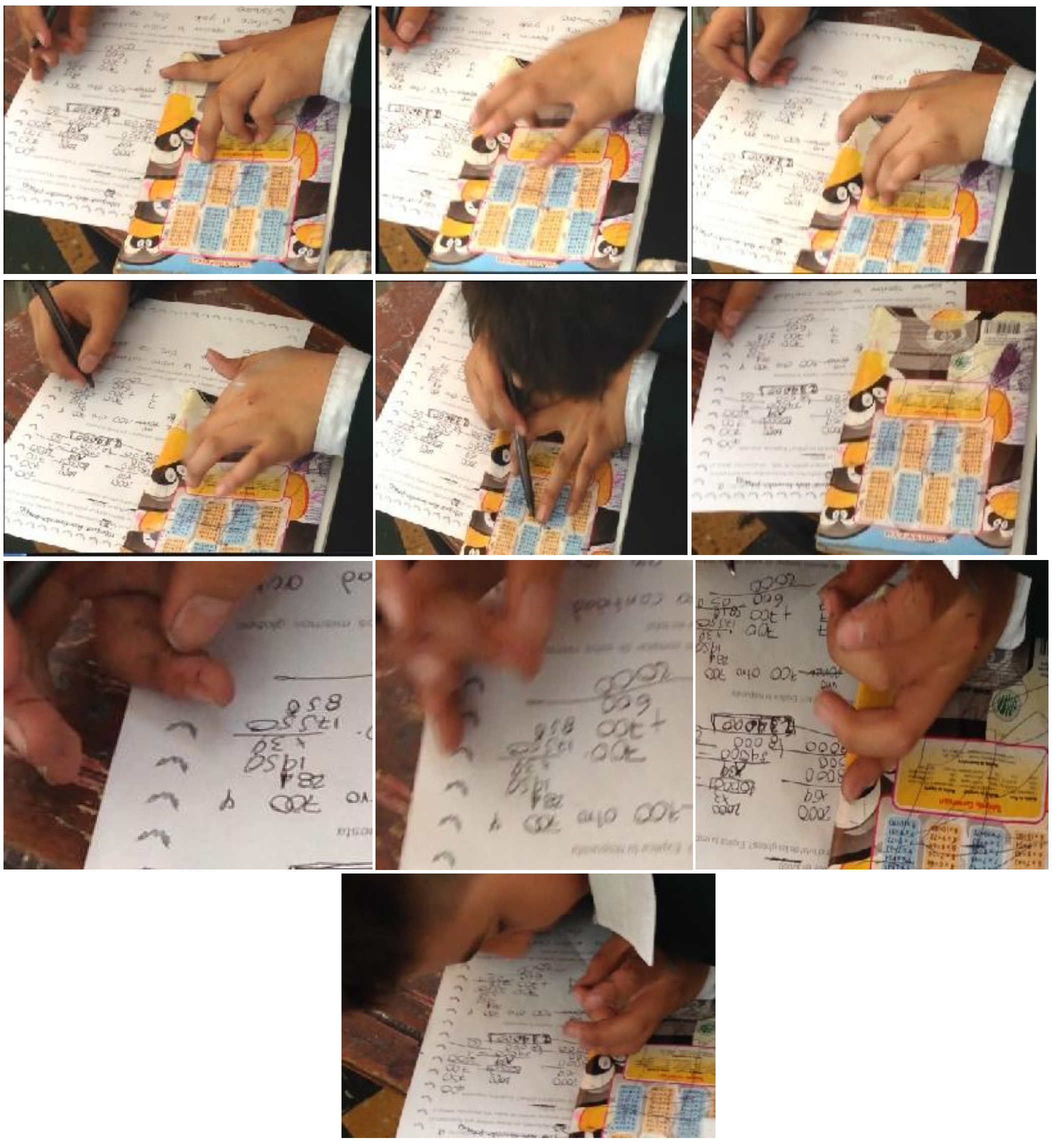


Figura 38. Uso del artefacto tablas de multiplicar y del conteo dactilar para resolver una multiplicación.

Pareciera que el niño está en un pensamiento multiplicativo simbólico, en el cual aparece un uso de la multiplicación asociado a su significado como operación entre números, sin que ello implique la desvinculación con el uso de artefactos, que no solo facilitan la resolución de la tarea, sino que sirven para ayudar a recordar por ejemplo el resultado de un producto, simultáneamente aparece la movilización del MSO kinestésico conteo dactilar que podría llegar a considerarse como un proceso de iconicidad en tanto está retomando experiencias, semiótico corporalmente mediadas, anteriores para resolver la tarea, además y a partir de lo que afirman Radford y André (2009) podríamos suponer que el niño durante su actividad está activando la hendidura interparietal izquierda de su cerebro en la resolución de la multiplicación.

En última instancia consideramos el caso de Samuel, que para resolver la tarea parece haber hecho varias cuentas mentalmente y que por lo tanto deja mucho a la especulación

L1. Samuel: *El punto decía que hay trientainueve estudiantes y* ***que tres globos son dos mil, eee cada, cada tres globos valen dos mil pesos****, entonces nosotros* ***multiplicamos*** *de que tres por trece, soon treintainueve entonces da el número de estudiantes entonces trece por dos mil, entonces nosotros miramos y nos dio vintes .. veintes… se me trabo la lengua, veintiseis mil pesos y entonces, nos dio veinteseis mil pesos multiplicando trece que es el numero multiplicado para que nos de los estudiantes, por dos mil pesos, que es* ***lo que vale cada uno****. En el segundo punto decía que*
L2. P: *¿O sea que en total cuanto tienen que pagar?*
L3. Samuel: *veintiseis mil pesos*
L4. P: *¿quiénes?*
L5. Samuel: ***los del salón***
L6. P: *los de este salón, listo*
L7. Kevin: *todos los del salón*
L8. Samuel: *solo los de este salón. En el segundo punto dice que a cada cuanto, a cada uno cuanto le toca, pagar, entonces nosotros* ***dividimos*** *lo que es dos mil en tres*
L9. P *¿Cómo lo hicieron?*
L10. Samuel: *dos mil en tres, que son* ***dos mil pesos lo que valen los tres globos***
L11. P: *y a donde hicieron la, o sea como hicieron, cuanto les dio mejor dicho?*
L12. Samuel: *Dos mil en tres, porque digamos como son tres globos o tres, o digamos en tres niños, para que nos, para no tener que sumar dos,* **para no tener queee que hacer en treintainueve, veintiseismil en treintainueve, hicimos dos mil en tres, en tres niños**
L13. P: *o sea que, pero también lo hubieras podido hacer por el otro lado*
L14. Samuel: *si*
L15. P: *listo*
L16. Samuel: *lo mismo. Y nos dio un total de seiscientos sesentaiseis pesos*
L17. PD: *y eso que es*
L18. Samuel: *seiscientos sesentaiseis pesos es los que le toca dar a cada uno para*
L19. Kevin: *a cada niño*
L20. P: *a cada niño*
L21. Samuel: *a cada niño para completar los tres globos*

Desde lo declarado por Samuel podríamos situarlo en un pensamiento multiplicativo simbólico y podemos suponer que el reconoce muy implícitamente una proporción en la que 26000:39 :: 2000:3, además su forma de resolver la tarea permite inferir que él está reconociendo una relación entre términos de una proporción, sin embargo algunos recursos lingüísticos como "*multiplicamos*" (L1), "*dividimos*" (L8) son palabras claves que nos generan dudas con respecto a un estrato de significación contextual o simbólico, porque permitirían ubicarlo en un estrato contextual por el uso de palabras clave, pero las palabras en sí mismas están indicando que se acudió al recurso simbólico o numérico para hallar las cantidades, este episodio nos confronta nuevamente con la dificultad de categorizar estudiantes en uno u otro estrato de generalidad dada la dilatación semiótica que supone un despliegue de recursos semióticos mayoritariamente lingüísticos para explicar la forma de acción y reflexión frente a la tarea.

En cuanto al pensamiento multiplicativo notamos que Samuel está trabajando con distintas unidades: la unidad "*dos mil pesos lo que valen tres globos*" (unidad razón), "*vale cada uno*" (unidad), "*los del salón*" (todo) y "*seiscientos sesentaiséis pesos es los que le toca dar a cada uno*" (unidad: unidad razón), aunque no es explicito consideramos que a partir de lo declarado por Samuel, él logro tomar conciencia de los diferentes tipos de unidades presentadas en la tarea y cuando está refiriéndose a las cantidades obtenidas busca la manera de precisar el significado de estos numerales, es decir que está desarrollando un proceso de normación para reinterpretar la situación en términos de los resultados obtenidos. A partir de la transcripción realizada y teniendo en cuenta los intentos de precisar el tipo de unidad que estaba considerando Samuel, relacionamos las líneas de la transcripción con las posibles relaciones que establece Samuel entre las magnitudes puestas en la tarea, en la siguiente tabla.

Línea	Estudiantes	Paquetes de Globos	Globos	Precio $
1	3	1	3	2000
1	39	13	39	26000
8	1	1/3	1	666

Capitulo 5. Conclusiones

Lo importante es
no dejar de hacerse preguntas
Albert Einstein

El reporte de esta investigación concluye con la respuesta a la pregunta de investigación y la argumentación acerca del cumplimiento de los objetivos trazados. Adicionalmente consideramos menester exponer algunas de las reflexiones más importantes con respecto a la experiencia de extrapolar los constructos de la TCO al pensamiento multiplicativo, las cuales generan nuevas preguntas de investigación.

Respuesta a la pregunta de investigación

Al inicio de esta investigación nos preguntamos ¿Cuales son los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto (10 – 13 años) cuando afrontan tareas de tipo multiplicativo? Indagar por cuales son los procesos de objetivación de los niños de grado sexto cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo tiene su razón de ser en tanto nos interesó investigar, y aun nos interesa seguir investigando, las maneras en que los niños producen significados en torno a la multiplicación, para ello tomamos como referencia para nuestra exploración las categorías de la TCO usadas en el pensamiento algebraico, específicamente en la generalización de patrones. Así las cosas y con respecto a dichos procesos de objetivación podemos concluir que existe evidencia empírica, no concluyente, con respecto a los procesos de objetivación contracción semiótica e iconicidad en el desarrollo del pensamiento multiplicativo, los cuales requieren mayor estudio con el fin de poder caracterizarlos a través del seguimiento a la evolución de los MSO, de igual manera consideramos que hace falta mayor documentación con respecto a la posible configuración de estratos de generalidad factual, contextual y simbólico en el desarrollo del pensamiento multiplicativo y sus vínculos con los hipotéticos vectores de unitización y normación en cada estrato de generalidad. No obstante, y a partir de las categorías de la TCO utilizadas en este estudio podemos presentamos indicios acerca de estos procesos de objetivación desde los MSO movilizados por estudiantes que ya han instanciado formas de acción y reflexión en torno a la multiplicación, luego de seis años de experiencias matemáticas.

MSO kinestésicos

El gesto más recurrente es el conteo con los dedos denominado MSO conteo según Villanueva (2012) y que aquí denominamos ***conteo dactilar o digital***, el cual es una forma corpórea de significar los conteos y que ha sido histórica y culturalmente constituida. Su evidente y muy frecuente uso para realizar conteos de unidades simples y múltiples, que como signo manifiesta el dominio abstracto de las cantidades, es una materialización o manifestación del pensamiento de los niños con respecto a las cantidades y sus operaciones.

La frecuente movilización que dieron los niños a este MSO podría ser un síntoma que indica la existencia necesaria de la objetivación por lo menos del conteo y luego el de las agrupaciones, antes que el de la multiplicación, es decir que éstos hacen parte del proceso de objetivación que Radford (2008a) denomina iconicidad, el cual hizo aparición constante durante todas las tareas cuando los niños hacían referencia a experiencias anteriores como el acudir a este recurso antropomorfo para contar, que ya se ha encarnado en la forma de actuar de los estudiantes. Esta forma corpórea no solamente puede sino que debe ser considerada tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de los números, sus operaciones y propiedades con el fin de aprovechar la materialización de la idea abstracta de cantidad.

Los ***señalamientos*** realizados por los niños tienen la intención de mostrar el objeto al que se refieren, sin embargo notamos que cuando señalan cantidades de objetos, no solo señalan el objeto sino que refieren a su cantidad, es decir que este movimiento de los dedos es a su vez un signo que da cuenta de la subitización. De otro lado encontramos que estos señalamientos parecen funcionar de forma distinta cuando se tocan los objetos de referencia a cuando no se tocan, adicionalmente estos señalamientos que funcionan en ocasiones como gestos indéxicales a veces aparecen para referir la conformación de unidades compuestas, como lo realizó Sebastián en la tarea de los buñuelos para referir a un grupo de buñuelos. Un señalamiento particular corresponde al realizado por Maicol en la tarea de los extraterrestres en la que despliega un doble gesto indéxical para contar y comparar cantidades de dos espacios de medida distintos, en el espacio de los extraterrestres va contando con ritmo y entonación grupos de tres extraterrestres y en el espacio de las raciones de comida va tapando las cantidades que va contando.

Los ***deslizamientos***, que pueden considerarse como signos kinestésicos indéxicales espaciales son utilizados por los niños para referir unidades compuestas en las cuales está implícito el proceso de subitización, a su vez también aparecieron para referir las dimensiones de arreglos rectangulares tales como el largo y el ancho. Este movimiento también parece tener un acento particular evidenciado cuando en el deslizamiento se toca la superficie de la hoja y que es distinto de aquel que se realiza en el aire, en este último es usado para hacer referencia al objeto pero sin acentuar la atención en alguna de sus características como la cantidad o la forma.

Las ***inscripciones*** realizadas por los niños en las hojas de trabajo resultan ser otro MSO, a través del cual se deja un registro o una marca de aquello que se considera relevante en la solución de la tarea, tal como ocurrió en el grupo de Estefanía y Jessica en la tarea de los extraterrestres, quienes acudieron a inscribir en un ovalo los grupos de tres extraterrestres usados para la comparación.

Los ***dibujos*** que realizan los niños también pueden ser considerados MSO en la medida que estos posibilitan el acceso o fungen como re-presentación de los objetos, relaciones o cualidades presentes en la tarea, su uso permite a los niños traer al plano material aquello que no puede ser comprendido o que quiere ser explicado a los otros. Estos dibujos son signos usados intencionalmente para poner algo de presente para sí mismo o para los demás y fueron evidenciados en las tareas de la pizza y los buñuelos, sin embargo no todas las tareas provocaron su emergencia y es allí donde aparece la reflexión acerca del tipo de tareas que provocan su uso, las cuales pueden estar requiriendo una menor abstracción de las relaciones matemáticas.

MSO Lingüísticos

Los deícticos espaciales (éste, esto, acá) y temporales (serán, fueron, son) aparecen frecuentemente acompañados de señalamientos, razón por la cual preferimos obtener la información de los señalamientos que nos ubican espacialmente en los objetos que se indican o señalan. Por lo tanto consideramos que en el pensamiento multiplicativo los deícticos espaciales no pueden ser considerados como MSO dado que aparecen para acompañar los señalamientos y en sí mismos no constituyen signos que permitan producir significados sobre la multiplicación, esto no quiere decir que no tengan aparición o no sean importantes, ocurre que no son lo suficientemente informativos acerca de las formas de acción y reflexión de los niños.

Las **palabras o frases clave** utilizadas por los niños constituyen una manera de capturar una relación o definir lingüísticamente una operación, por ejemplo cuando Samuel en la tarea de los extraterrestres afirma que "*es una comida por tres*" está haciendo referencia a una razón que luego procede a comparar aun cuando no exprese dicha razón en símbolos numéricos. Las frases "*veces más*", "*por cada*" y "*una tiene tantos*" son expresiones que evidencian la captura o el establecimiento de relaciones entre cantidades y que luego funcionan para definir modos de acción particulares a partir del recurso lingüístico que orienta la acción.

La **entonación** y el **ritmo** constituyen MSO a través de los cuales los niños logran poner de presente la cardinalidad de un conjunto o realizar conteos de unidades múltiples; estos recursos semióticos tienen su asidero en los significados atribuidos por los niños a la secuencia numérica, la cual perfila modos de acción particulares con las cantidades y que son evidenciados en la forma en que los niños cuentan grupos de objetos. Por ejemplo en la tarea de los extraterrestres cuando Maicol cuenta los extraterrestres acude a un *conteo rítmico* para realizar conteos en grupos de tres. La entonación más alta o repetición del último número de una secuencia funciona para comunicar el cardinal del conjunto y es usada frecuentemente por los niños cuando cuentan elementos de un conjunto, tal como lo hace Sebastián en la tarea de los cuadritos.

Nodos semióticos

Como aludimos anteriormente los MSO frecuentemente aparecen simultáneamente y provienen de distintos sistemas semióticos que se complementan en una misma intención, hecho que ha sido considerado por Radford como un nodo semiótico y que da cuenta de varios signos trabajando sincrónicamente para hacer evidente una intención y se convierten en modos de acción que en el tiempo tienden a ser subsumidos por formas de expresión más sobrias o sofisticadas.

Por ejemplo, encontramos una *subitización generada a partir de un nodo semiótico* en el cual distintos signos operan sincronizadamente para realizar una agrupación, por ejemplo las palabras (tres), deslizamientos y señalamientos (dedos índice y pulgar) desplegados en la tarea de los extraterrestres por el grupo de Estefanía para realizar agrupaciones o composición de unidades simples. Estos signos y su conjunción pueden aprovecharse en la enseñanza inicial del conteo para hacer visible las maneras en que se puede realizar la composición de unidades simples, que permiten posteriormente realizar sumas y multiplicaciones de cantidades pequeñas.

Otro importante uso de los nodos semióticos ocurre en la correspondencia y la agrupación de cantidades, las cuales son acciones semióticas que realizan los niños para unitizar y que requieren la coordinación del sistema semiótico perceptual y kinestésico, lo cual se manifiesta a través de señalamientos e inscripciones sobre los objetos que van acompañados de expresiones lingüísticas como los deícticos espaciales. Estos señalamientos e inscripciones son manifestaciones de lo que ocurre al interior de nuestra mente, que no se construye de asimilaciones y acomodaciones sino más bien de instanciaciones y actualizaciones, que son entendidas desde la complejidad del paso entre lo social a lo individual a través de la acción reflexiva.

Acerca de nuestros objetivos

Para el desarrollo de esta investigación nos planteamos tres objetivos específicos a los cuales vamos a hacer referencia

1. *Identificar una serie de tareas de tipo multiplicativo, adaptarlas e implementarlas bajo los principios de la Teoría Cultural de la Objetivación en un grupo de estudiantes de grado sexto*.

Los diversos tipos de tareas propuestos resultaron, desde nuestra visión semiótico cultural, más que simples tipos de tareas, éstas permitieron tomar conciencia de la importancia de su diseño, sus pretensiones y las maneras en que son asumidas por los niños, ya que con cada una de ellas se propulsan formas prototípicas de pensar multiplicativamente, que son mediadas, orientadas por el tipo de tareas. Es decir que al proponer solamente tareas de multiplicación como suma reiterada, estaremos posibilitando solo la objetivación de esa forma prototípica de pensar multiplicativamente, mientras que diseñar tareas en cada una de estas formas prototípicas de pensar multiplicativamente hará que el acercamiento a las formas semiótico culturales históricamente formadas sea de tal riqueza que la toma de conciencia del objeto multiplicación, comprenda varias formas de acción y reflexión, así como, distintos horizontes semióticos, en los que el estudiante no solamente tome conciencia de un saber, sino que además sea con ese saber dentro de su contexto cultural. Al respecto del tipo de tareas utilizadas podemos concluir que aquellas tareas en las que aparecía un gráfico o dibujo propulsaron mayor movilización de MSO que aquellas que no la tenían y a su vez las tareas que consideraron situaciones muy simples, no resultaron retadoras para los niños y por lo tanto no lograban implicarse conjuntamente en su solución, aun cuando durante dicha solución individual y ágil, si se movilizaran MSO y se pudiera dar cuenta del posible tipo de pensamiento multiplicativo en desarrollo. En síntesis consideramos que la estructura de las tareas y su consiguiente desarrollo como evento dentro de la labor, es de vital importancia para evidenciar los procesos de objetivación del pensamiento multiplicativo, toda vez que éstas propulsan formas distintas de significar la multiplicación de cantidades y deben posibilitar que los niños se impliquen en procesos sociales de toma de conciencia en los cuales se logre el refinamiento progresivo de subjetividades, esto es de procesos de objetivación.

Frente al tipo de intervención de aula realizada, en la cual no se pretendió explícitamente enseñar algo, queremos aclarar que nuestro interés fue describir y analizar una situación desde una postura teórica, pero no por ello queremos direccionar las maneras en que los estudiantes proceden con este tipo de tareas, no es nuestro interés juzgar, es conocer como proceden los estudiantes, entender las manifestaciones de una mente que trabaja con la multiplicación de cantidades y con distintos tipos de tareas, en una labor conjunta, que permitieron conocer algunos aspectos de cómo se manifiestan formas de significar la multiplicación escolar a través de la actividad de los niños. Es importante aclarar que cuando los niños actuaban desde sus subjetividades, estas eran cuestionadas o posicionadas como inconvenientes ante la clase, es decir que en la socialización se generaba la opción de reorientar las acciones de los niños que no se correspondían con la solución esperada a la tarea, evitando así generar la sensación que cualquier acción, aunque era valorada, fuese correcta o la esperada.

2. *Describir los medios semióticos de objetivación movilizados por un grupo de estudiantes de sexto grado cuando resuelven las tareas adaptadas de tipo multiplicativo*.

Consideramos que en el capítulo de análisis multimodal y en el apartado anterior donde dimos respuesta a la pregunta de investigación se evidencia la identificación y análisis del rol que juegan estos signos en la resolución de las tareas, el contexto y uso de su movilización y una posible caracterización en términos de su procedencia, es decir kinestésicos o lingüísticos.

3. *Describir y analizar la evolución de los medios semióticos de objetivación conforme resuelven las tareas adaptadas de tipo multiplicativo*.

En el desarrollo de la investigación y a partir de los datos obtenidos encontramos posible sugerir estratos de generalidad plausibles en el pensamiento multiplicativo, los cuales están caracterizados por el tipo de MSO movilizados por los niños y por la manera en que estos evolucionan y van siendo subsumidos por maneras de expresión más sofisticadas y económicas; para definir esta evolución nos basamos en la idea de Radford quien define la contracción semiótica como el indicador de tránsito entre estratos de generalidad y por lo tanto esta evolución hacia estratos de generalidad ocurre en la evolución de los nodos semióticos. Sin embargo queremos aclarar que en nuestra investigación no pudimos hacer un rastreo minucioso a esta evolución de nodos semióticos por dos razones: la primera tiene que ver con las características de nuestra población pues, al ser estudiantes que ya tenían un encuentro cultural con la multiplicación, se tornaba complejo definir cuales instanciaciones habían sido provocadas por las tareas y cuales ya eran un modo de conciencia estable y la segunda con las características de nuestras tareas pues todas las tareas estaban poniendo en juego desde su selección, adaptación e implementación distintos aspectos característicos del pensamiento multiplicativo, por lo que no era posible realizar el seguimiento a la evolución de los MSO en un tipo particular de tareas.

Como objetivo general de esta investigación nos propusimos *Estudiar y analizar los procesos de objetivación desarrollados por un grupo de estudiantes de grado sexto (10 – 13 años) cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo*, ante lo cual tenemos que declarar que durante el estudio y análisis de los procesos de objetivación desarrollados por los niños, podemos sostener que los MSO evidenciados en este estudio sugieren la existencia de formas prototípicas (histórico culturalmente formadas) de pensamiento multiplicativo, ello implica que en tanto se reconoce y posiciona la multiplicación como un objeto de la cultura, es posible reconocer modos en los que este saber (general) se instancia y se actualiza en el conocimiento (singular) a través de la mediación semiótica de la actividad o labor (particular), la cual se convierte en un objeto de la conciencia a través de un proceso de mediación semiótica de toma de conciencia o de objetivación al cual nos acercamos desde subjetividades compartidas o intersubjetividades que confluyen en una alteridad (bajtiniana) que posibilita no solamente el saber sino el ser en una comunidad de aprendizaje que busca luchar contra la alienación impuesta por las violentas (en el sentido de violencia simbólica) y comunes prácticas de enseñanza de carácter contemplativo y alienante.

Para lograr elaborar significados de esas formas semiótico culturales históricamente formadas es necesario hacer un esfuerzo por que los niños se impliquen en labores que posibiliten los posicionamientos críticos, responsables y subjetivos ante sus compañeros y ante las tareas. Es a partir de procesos de objetivación, de procesos continuos, no terminados, de toma de conciencia de esas formas presentes en la cultura semiótica que se logra elaborar los significados de la multiplicación. Actualmente tenemos distintos modos de significar la multiplicación, cuál sugerimos acá; aquel que puede entender la multiplicación de una manera tal que englobe o tenga algo de cada una de aquellas formas de acción y reflexión que históricamente han contribuido a conformarse como los patrones de acción fijos incrustados en la cultura que hoy conocemos, de manera que pueda atenderse en el proceso de su enseñanza aprendizaje a ese recorrido epistemológico deseado en el cual el estudiante es capaz de transitar por los momentos que históricamente han permitido significar una forma de acción, codificarla y asumirla como valida dentro de una sociedad.

Con lo anterior estamos sugiriendo que las tareas que proponemos a nuestros niños con respecto a la multiplicación deben apuntar a comprenderla como un cambio de unidades, una forma de acción particular o un tipo de pensamiento prototípico, lo suficientemente sólido para soportar diferentes significados de la multiplicación en distintos universos numéricos de forma unificada.

Tomar conciencia de los aspectos semióticos que mediatizan la actividad matemática de los estudiantes nos hace trascender esta información al desarrollo de las prácticas docentes, toda vez que pueden ser usadas en las maneras en que los docentes hacemos que los estudiantes tomen conciencia de las diferentes interpretaciones que puede tener la multiplicación, esto puede ejemplificarse con el uso del doble gesto indéxical movilizado por Maicol en la tarea de los extraterrestres, pues cuando el docente sabe que los niños movilizan ese doble gesto indéxical para referir la variación constante en dos espacios de medida, este gesto puede ser utilizado o valorado por el docente cuando trabaja con tareas de dependencia. Otro ejemplo puede estar en el uso de los dedos como mecanismo de conteo de unidades simples y unidades múltiples, lo cual acerca al niño a las formas de significación histórico cultural, y hasta genéticamente, constituidas para hacer conteos. En tercer lugar proponemos que se valore y potencie el uso de palabras clave o recursos lingüísticos acompañados de movimientos kinestésicos para realizar agrupaciones, conteos y establecer relaciones, un nodo semiótico que puede ser usado por el maestro en sus intervenciones para acercar a los niños a las formas de relación multiplicativa entre cantidades a través de formas corpóreas. En síntesis consideramos que es necesario e importante prestar atención a los MSO y procesos de objetivación desarrollados por los niños cuando afrontan tareas de tipo multiplicativo, toda vez que éstos son utilizados por los niños para tomar conciencia de las formas codificadas histórico culturalmente de significar la multiplicación en sus distintas formas de aparición y permite al docente tomar decisiones pedagógicas y emprender acciones didácticas que contribuyan a desarrollar procesos de objetivación de los objetos matemáticos en particular el de la multiplicación.

La información obtenida sugiere empíricamente que los constructos de la teoría cultural de la objetivación no son exclusivos del pensamiento algebraico y que pueden ser usados en otros dominios como el pensamiento multiplicativo siempre y cuando se provea a la clase las tareas necesarias para emprender labores conjuntas que encaminen a los niños a comprender la multiplicación como un cambio de unidades.

Objetivación y pensamiento multiplicativo

Asumir una postura semiótico cultural para explorar formas de acción y reflexión de los niños en el pensamiento multiplicativo nos llevo a generar algunas reflexiones particulares en torno a los complejos procesos de objetivación del pensamiento multiplicativo. Es decir, que si bien, proporcionamos indicios de los procesos de objetivación contracción semiótica e iconicidad, cuando nos centramos en el estudio de dichos procesos encontramos que éstos están íntimamente relacionados con vectores del pensamiento multiplicativo y con la idea de estratos de generalidad o tipos de pensamiento, razón por la cual en la sección 2.4 propusimos unos hipotéticos vectores del pensamiento multiplicativo, así como algunas características de posibles estratos de generalidad que en el análisis multimodal quisimos sondear y poner a prueba, de manera que pudieran evidenciarse las razones por las cuales emergieron estos vectores y estratos a partir de los datos de la investigación y no como una simple especulación a partir de la teoría. Sin embargo insistimos que estos aspectos siguen siendo objeto de estudio y podrían llegar a modificarse o replantearse según se pongan a prueba en otras investigaciones.

Los estratos de generalidad factual y contextual son de carácter pre simbólico mientras que el estrato simbólico está caracterizado por la designación simbólica preferentemente con signos numéricos y operaciones que recaen principalmente sobre ellos. Sin embargo es necesario definir estratos de significación distintos según la multiplicación se haga con números naturales o con fracciones o decimales o porcentajes, dado que el tipo de cantidades impone formas de acción y reflexión distintas.

Es necesario aclarar, que desde los principios de la TCO el objeto matemático no se construye, no se asimila, no se transmite, no es solo toparse con el objeto, el objeto matemático aparece ante el estudiante, empezando a hacer parte de su conciencia a través de los contrastes, las opiniones de otros, las persuasiones intelectuales que logran producir significados subjetivos e idiosincráticos que posteriormente se vuelven más sofisticados y que el sujeto va refractando en esa relación dialéctica en la cual se van produciendo los significados atribuidos por la semiótica cultural históricamente formada del objeto.

Una de las formas de reflexión evidenciadas con respecto a la multiplicación consiste en hacer o interpretar la multiplicación como una suma reiterada, un modelo cultural a partir del cual, probablemente, se instanció el significado de la multiplicación, ello admite la posibilidad de pensar que toda vez que se comprende la multiplicación de esta manera, los niños evocan este significado para reflexionar con respecto a tareas que, aunque multiplicativas, deberían ser resueltas con otro tipo de acciones y reflexiones.

A partir de las tareas propuestas y de los recursos semióticos desplegados por los niños en la resolución de las tareas fue posible evidenciar las siguientes formas prototípicas de pensamiento multiplicativo: Suma reiterada, conteo de objetos dispuestos rectangularmente, combinación de elementos de dos conjuntos, cálculo de la cantidad de superficie de una región rectangular, operador en un espacio único de medida, isomorfismo de medidas, establecimiento de relaciones de proporcionalidad, cambios de unidad, establecimiento de relaciones, calculo mental, operación netamente numérica, comparación numérica, razón, función lineal. Sin embargo difícilmente una tarea puede ser ubicada categóricamente en un tipo de pensamiento u otro ya que las diversas formas de acción y reflexión de los niños frente a una tarea multiplicativa pueden ser la puerta de entrada a otras formas de pensamiento, por ejemplo vimos como la tarea de los extraterrestres confino a algunos niños a entablar relaciones corporales entre cantidades similares a las de una proporción y en el caso de la tarea de la alcancía los niños lograron incluso manifestar características de un tipo de pensamiento algebraico contextual.

Cuestiones abiertas

Los datos empíricos aquí presentados, que son evidencias y además son coherentes con los supuestos metodológicos y con las orientaciones teóricas, no pueden entenderse como concluyentes, al respecto falta mucho por indagar, pues si bien los datos presentados demuestran algunos MSO que persisten en el tiempo, y que luego de algunos años de contacto con el objeto multiplicación aún se mantienen, es necesario explorar cuales serian esos MSO emergentes, por ejemplo en los preescolares, pues los aquí presentados se entienden como movilizados como pre existentes, es decir, que ya son una forma de acción, un modo estable de conciencia frente al objeto multiplicación. A su vez se puede ganar mayor comprensión acerca de otros aspectos que podría entrañar el pensamiento multiplicativo y su posible desarrollo a través de un seguimiento exhaustivo a la evolución de los MSO que podrían definir otro tipo de procesos de objetivación, analizados desde la infancia.

La certeza de los datos depende de la frecuencia con que estos aparezcan y por tal razón es necesario realizar un seguimiento particular con cada una de las interpretaciones de la multiplicación, de manera que sea posible evidenciar claramente los procesos de contracción semiótica que en este estudio aparecen como insinuaciones y que requieren mayor documentación. De igual manera es conveniente emprender indagaciones acerca del tipo de reflexiones y acciones que realizan los niños cuando cambia el tipo de números utilizados ya que estos inicialmente imponen limitaciones pero posteriormente son posibilitadores de nuevas formas de reflexión.

A partir de los datos obtenidos, de las hipótesis formuladas y de las conclusiones presentadas proponemos algunos elementos para la discusión:

Asumiendo la unitización y la normación como vectores hipotéticos en el pensamiento multiplicativo y la existencia de posibles estratos de generalidad de tipo factual, contextual y simbólico, consideramos que estos aspectos guardan estrecha relación entre sí por lo que podrían emprenderse estudios rigurosos y sistemáticos que permitan identificar las formas de aparición de estos vectores en cada uno de los estratos de generalidad.

Conjeturamos la existencia de un proceso reversible al de contracción semiótica el cual denominamos dilatación semiótica, el cual puede estar relacionado con el proceso de iconicidad, sin embargo creemos que este proceso de dilatación puede ser una característica general del pensamiento provocada por situaciones en las que se requiere comunicar o explicar algo.

Creemos posible que los procesos de unitización pueden estar dando cuenta de procesos de contracción semiótica, en tanto la conformación de unidades múltiples provee cierta sobriedad al pensamiento y a las acciones de los niños y simultáneamente la normación podría estar relacionada con los procesos de dilatación en los que se requiere reinterpretar una situación en términos de la unidad.

Consideramos la posible existencia de un sentido de la numerosidad, con ciertos atributos como la capacidad de unir y separar sus elementos. Dicho sentido podría considerarse un aspecto característico previo a la unitización y estar asociado a los procesos de objetivación de la secuencia numérica y sus procesos aditivos. Igualmente creemos que puede existir cierto sentido de la operatividad que puede estar desplegándose después de los proceso de normación y que permite a los niños obviar la unitización y la normación, para pasar a un nivel de abstracción en el cual la multiplicación aparece solamente como una operación entre números.

Finalmente y teniendo en cuenta que el estudio realizado es de tipo exploratorio son más las preguntas que deja que las que responde. Concluimos que en tanto la objetivación es un proceso perpetuo, es necesaria mayor evidencia que permita documentar los aspectos relacionados con los procesos de objetivación de la multiplicación y por lo tanto es conveniente investigar estos procesos teniendo en cuenta aspectos asociados a la edad, el tipo de tareas, la forma prototípica o interpretación de la multiplicación, los vectores del pensamiento multiplicativo, los estratos de generalidad, el tipo de cantidades y el tipo de labores, de manera que para seguir comprendiendo el pensamiento multiplicativo desde una perspectiva semiótico cultural deberán generarse estudios referidos a:

- Los procesos de objetivación según el tipo de números (N, Z, Q)
- Los procesos de objetivación según el tipo de magnitudes (extensivas e intensivas)
- Los vínculos con otro tipo de razonamientos (relacional, aditivo, exponencial, algebraico, proporcional)
- El tipo de tareas según su carga epistémica
- El tipo de pensamiento multiplicativo instanciado extraescolarmente
- La movilización de recursos semióticos del profesor y su incidencia en los procesos de objetivación de los niños, e incluso sería interesante
- Una comparación con los hallazgos realizados en el campo cognitivo al respecto del pensamiento multiplicativo.

Referencias

Alibali, M., Nathan, M., Church, B., Wolfgram, M., Kim, S., & Knuth, E. (2013). Teachers´ gestures and speech in mathematics lessons: forging common ground by resolving trouble spots. *ZDM Mathematics education*, 45, 425 – 440. doi:10.1007/s11858-012-0476-0

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 267-300.

Arzarello, F. & Domingo, P. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. En: J., Woo, H., Lew, K., Park & D., Seo. (Eds.). Actas de la 31a conferencia internacional del grupo para la psicología de la educación matemática. 2. P. 17 – 24. Seúl Corea: PME.

Baldor, A. (1969). Aritmética. Cultural Colombiana: Bogotá.

Behr, M., Harel, G., & Post, T. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1994). Units of quantity: A conceptual basis common to additive and multiplicative structures. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (121–176). Albany, NY: State University of New York Press.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a Rational-Number-as-Operator task. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(1), 48-69.

Bender, A. & Beller, S. (2011). Fingers as a tool for counting – naturally fixed or culturally flexible?. *Frontiers in Psychology, 2*, 1-3. doi: 10.3389/fpsyg.2011.00256

Bezemer, J., & Jewitt, C. (2010). Multimodal Analysis: Key issues. En: L. Litosseliti. (Ed.), *Research Methods in Linguistics* (pp.180-197). London: Continuum.

Bjuland, R. (2012). The mediating role of a teacher´s use of semiotic resources in pupil´s early algebraic reasoning. *ZDM Mathematics Education*, 44, 665 – 675.

Bonilla M & Romero J. (2005). La resolución de problemas: sus posibilidades para el desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Revista científica*, 7, 99 -120.

Bonilla, M & Romero, J.(2008). Pensamiento multiplicativo y álgebra escolar. Algunas relaciones. XXIII coloquio distrital de matemáticas y estadística. Cursillo presentado en el XXIII coloquio distrital de matemáticas y estadística. Universidad Pedagógica nacional. Bogotá – Colombia.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. (Tesis doctoral). Universidad autónoma de Barcelona. España.

Bosch, M. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *EDMA 0 – 6: Educación Matemática en la infancia*, 1(1), 15 - 37.

Bosch, M., Castro, E. & Segovia, I. (2007). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles: una investigación en curso, *PNA*, 1(4), 179 – 190.

Cadavid, S. (2011). El proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos. En G. García, (Ed.), *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 779-787. Armenia: Gaia.

Carroll, J. (Diciembre, 2007). Developing multiplicative thinking. En: Mathematics - Making Sense of Our World. Conferencia llevada a cabo en la conferencia anual de la asociación matemática de Victoria, Universidad La Trobe, Bundoora, Australia.

Castro, E. & Castro, E. (2010). El desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 54, 31-40.

Chaves, A. (2001).Implicaciones educativas de la teoría sociocultural de Vigotsky. *Educación. Revista de la universidad de Costa Rica*, 25(2), 59 -65.

Cisneros, J., Castro, W., & Cadavid, S. (2013). La objetivación del número racional. En Morales, Y. y Ramírez, A. (Eds.), *Memorias I CEMACYC*. Santo Domingo, República Dominicana. 950 – 960.

Clark, F. & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1 -5, *Journal for research in mathematics education*, 27 (1), 41 – 51.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 291-330). Albany, NY: State University of New York Press.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, 26 (2), 135-164. doi: 10.1007/BF01273661

Confrey, J., & Smith, E. (1995) . Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (1), 66-86.

D´Amore, B. (1999). Didattica della matematica come epistemología dell´apprendimento matematico. En: *Elementi di Didattica della Matematica*. Italia: Pitagora Editrice Bologna. Traducido por Victor Larios Osorio.

D´Amore, B. (2006a). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

D´Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 177-196.

Dalmau, J. (1938). Aritmética razonada y nociones de algebra, Dalmau-Pla, Girona.

De castro, C. & Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA*, 8(3), 99 – 114.

Downton, A. (2010). Challenging multiplicative problems can elicit sophisticated strategies. En L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.). Shaping the future of mathematics education: proceeding of the 33rd annual conference of the mathematics education research group of Australasia. Fremantle: MERGA. (169 -176)

Domahs, F., Klein, E., Moeller, K., Nuerk, H., Yoon B. & Willmes, K. (2012). Multimodal semantic quantity representations: further evidence from Korean sign language. *Frontiers in Psychology, 2,* 1-10. doi: 10.3389/fpsyg.2011.00389

Fernández, C. & Llinares, S. (2010). Relaciones entre el pensamiento aditivo y multiplicativo en estudiantes de educación primaria. El caso de la construcción de la idea de razón. *Horizontes educacionales*, 15(1), 11 – 22.

Fey, J. (1990). Quantity. En: L. Steen. (Ed.). *On the shoulders of giants* (pp. 61-94). New Washington: National Academic Press.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and mathematics*. An educational approach. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*.16 (1). 3-17.

Fischer, M., Kaufmann, L. & Domahs, F. (2012) Finger counting and numerical cognition. *Frontiers in Psychology, 3*:108. doi: 10.3389/fpsyg.2012.00108

Flewitt, R. (2011). Bringing ethnography to a multimodal investigation of early literacy in a digital age. *Qualitative Research*, 11(3), 293-310.

García, G. & Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural*. Gaía. Bogotá

Godino, J & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des mathematiques*. 14 (3).

Gómez, J. (2013). *Medios semióticos de objetivación movilizados por estudiantes de grado décimo cuando resuelven tareas de generalización de patrones*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.

Gómez, B., & Contreras, M. (2009). Sobre el análisis de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. *PNA, 3*(4), 169-183.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Greer, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division. En G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). Albany, NY: State University of New York Press.

Grouws, D. (Ed.). (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Grupo MESCUD. (1999). *La enseñanza de la aritmética escolar y la formación del profesor*. Bogotá: Gaia.

Grupo MESCUD, (2005). El *Pensamiento multiplicativo: Una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula*. Informe final de investigación. No publicado. Colciencias-IDEP y la Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas

Grupo MESCUD, (2007). El *Pensamiento multiplicativo y su relación con el significado institucional de referencia acerca de la multiplicación*. Informe final de investigación. No publicado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Harel. G. & Confrey, J. (Eds.), (1994). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.

Harel, G., Behr, M., Post, T. & Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: further investigations. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 365-388). New York, NY: State University of New York Press.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 198-219). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J & Behr, M. (Eds.). (1988). *Number concepts and operations in the middle grades*. Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

ICFES. (2012). *Colombia en PISA 2012. Informe nacional de resultados. Resumen ejecutivo*. Recuperado de http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales/pisa

Jacob, L. & Willis, S. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. En L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert & J. Mousley. (Eds.). *Mathematics education research: Innovation, networking, opportunity: proceedings of the 26th annual conference in mathematics education research group of Australasia*. (Vol. 2. Pp 306 - 313). Melbourne, VIC, Australia: Deakin University.

Karplus, Karplus, Formisano & Paulsen (1979). Proportional reasoning and control of variables in seven countries. *Journal of research in science teaching*. 14 (5). 411 – 417.

Kilpatrick, J. (1998). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En J. Kilpatrick, P. Gómez & L. Rico (Ed.), Educación matemática (1-18). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Kress, G., & van Leeuwen, T. (2001). *Multimodal discourse. The modes and media of contemporary communication*. Londres: Arnold.

Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-122). Albany, NY: State University of New York Press.

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children’s partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27 (2), 170-193.

Lamon, S. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En F. Lester, (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-668). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lasprilla, A. & Camelo, F. (2012). Generalizando patrones figurales con estudiantes de 8 y 9 años: una interpretación de los medios semióticos de objetivación movilizados. *Colombian Applied Linguistics Journal*, 14(2). 35 -50.

Latorre. A, Del Rincón. D & Arnal, J (2003). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. España. Ediciones Experiencia SL.

Lemke, J. (1990). *Talking science. language, learning and values*. Nueva Jersey: Ablex.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 93-117). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Manghi, D. (2009). C*outilización de recursos semióticos para la regulación del conocimiento disciplinar. Multimodalidad e intersemiosis en el discurso pedagógico de matemática en 1año de enseñanza media*. Tesis doctoral. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Manghi, D. (2010). Recursos semióticos del profesor de matemática: funciones complementarias del habla y los gestos para la alfabetización científica escolar. *Estudios pedagógicos*, 23(2), 99 – 115.

Martínez, M. (1999). El enfoque sociocultural en el estudio del desarrollo y la educación. *Revista electrónica de investigación educativa*, 1(1), 16 -36.

Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento y gestión.20, 165 – 193.*

Maza, C. (1991a). *Enseñanza de la multiplicación y la división.* Madrid: Síntesis.

Maza, C. (1991b). *Multiplicar y dividir. A través de la resolución de problemas*. Madrid: Visor.

McNeill, D. (Ed.), (2000). L*anguage and gesture: window into thought and action*. Cambridge: Cambridge University Press.

MEN. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Magisterio.

Miranda, I. (2009). *Objetivación de saberes científico-culturales relacionados con el movimiento lineal representado con gráficas cartesianas: una experiencia con estudiantes de Bachillerato.* Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Miranda, I., Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19*(3), 5-30.

Mojica & Zamora. (2009). La multiplicación como cambio de unidad. Algunas implicaciones didácticas. Tesis de pregrado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá. Colombia.

Mulligan, J. & Mitchelmore, M. (1997). Young children´s intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in mathematics education*, 28(3), 309 – 330.

Mulligan, J. & Wright, R. (2000). An assessment framework for early multiplication and division. En T.Nakahara & M. Koyarna (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 17-25).

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: theoretical approaches and empirical findings. En J. Hiebert and M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.I9-40). Hillsdale, N.J: Lawrence Erlbaum.

Nunes, T., Bryant, P., Burman, D., Bell, D., Evans, D. & Hallet, D. (2009). Deaf children´s informal Knowledge of multiplicative reasoning. *Journal of deaf studies and deaf education*, 14(2), 260 – 277.

Nunes, T. & Bryant, P. (2003). *Las matemáticas y su aplicación: La perspectiva del niño*. México: siglo veintiuno.

Obando. G. (2007). Desarrollo del pensamiento proporcional: del pensamiento numérico al variacional. XXIII coloquio distrital de matemáticas y estadística. Cursillo presentado en el XXIII coloquio distrital de matemáticas y estadística. Universidad Pedagógica nacional. Bogotá – Colombia.

Obando, G., Vasco, C. & Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte, *RELIME*, 17(1), 59 -81.

Olive, J. (2001). Children’s Number Sequences: An Explanation of Steffe’s Cosntructs and an Extrapolation to Rational Numbers of Arithmetic. *The Mathematics Educator*, 11(1), 4-9.

Padilla, J.(1732). Arithmetica Practica (L. Radford, ed.). Ciudad de Santiago de Guatemala: imprenta de Ignacio Jacobo de Beteta.

Park, J. & Nunes, T. (2001). The development of the concept of multiplication. *Cognitive development*, *16*(3), 763-773.

Piaget, J. (1952). *The child’s conception of number*. London: Routledge & Kegan Paul.

Previtali, P., Rinaldi, L. & Girelli, L. (2011). Nature or nurture in finger counting: a review on the determinants of the direction of number–finger mapping. *Frontiers in Psychology*, *2*, 1-5. doi:10.3389/fpsyg.2011.00363

Quintero, C., & Jaramillo, D. (2013). Objetivación del límite de una función: ¿pensamiento empírico o pensamiento teórico?. *Revista científica. Universidad Distrital*. Edición especial. 430 – 434.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning. 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2005). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of Objectification. In Helen L. Chick, Jill L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of Melbourne, Australia, Vol. 1, pp. 143-145.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 103-130.

Radford, L. (2006b). Semiótica y Educación Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático*, 7-22.

Radford, L. (2006c). *Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective*. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mérida: Universidad PedagógicaNacional.

Radford, L. (2008a). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education, 40*, 83-96.

Radford, L. (2008b). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano.* (pp. 731-754). México: Diaz de Santos

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities.*PNA*, 4(2), 37-62.

Radford, L. (2010c). *Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students*. In M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.).Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 73-80. Belo Horizonte, Brazil.

Radford, L. (2010d) The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities, *For the Learning of Mathematics*, 30(2), 2-7.

Radford, L. (2011a). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez y R. Rickenmann (Eds.), *L'ctivitat docent intervenció, innovació, investigació* (pp. 33-49). Girona (España): Documenta Universitaria.

Radford, L. (2011b). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. Paper presented at the Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking epistemological, semiotic and developmental issue. *12° international congress on mathematical education*, Seoul, Korea.

Radford, L. (2013a). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2 (1), 7-44.

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista latinoamericana de Etnomatemática, 7(2), 132 - 150.*

Radford, L. (in press). Cultura e historia: dos conceptops dificiles y controversiales en aproximaciones contemporaneas en la educación matemática [Culture and history: Two difficult and controversial concepts in current approaches to mathematics education]. In I. Abreu Mendes & C. Farias da Silva (Eds.), *Cultura, Práticas Sociais e Educação Matemática*. São Paulo: Livraria da Física (2013).

Radford, L & André, M (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *12*(2), 215-250.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Beyond Words. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (3), 91-95.

Radford, L. & Roth, W. (2010). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, Online First. Doi 10.1007/s10649- 10010-19282-10641.

Rahaman, J., Subramaniam, K. & Chandrasekharan, S. (Octubre, 2012). *A network model of the mathematical concept of area*. En: epiSTEME 5. Quinta conferencia bienal del centro Bhabha Homi para la educación científica perteneciente al TIFR, Mumbai: India.

Rivas, Godino & Castro (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*. 26 (42). Doi: org/10.1590/S0103-636X2012000200008

Rojas, P., Romero, J., Mora, L., Bonilla, M., Rodríguez, J., & Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: estrategias para promover su aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Sabena, C. (2007). *Body and signs: A multimodal semiotic approach to teaching-learning processes in early Calculus*. Tesis doctoral no publicada, Università degli Studi di Torino.

Sabena, C. (2011). Studiare la multimodalità dell'insegnamento-apprendimento: focus sui gesti. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34 (3), 333-342.

Sabena, C. (2012). Tra teoria e pratica: insegnamento-apprendimento della matematica in una prospettiva multimodale. En E. Scalenghe (Ed.) *Stages transfrontalieri nella formazione degli insegnanti* (pp. 107-118). Milano: FrancoAngeli.

Sato, M., Cattaneo, L., Rizzolatti, G. & Gallese, V. (2007). Numbers within our hands: Modulation of corticospinal excitability of hands muscles during numerical judgment. *Journal of cognitive neuroscience, 19* (4), 684 – 693.

Schwartz, J.(1988).Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41 -52). NJ: Lawrence Erlbaum.

Siemon, D & Breed, M & Virgona, J (Diciembre, 2005). From additive to multiplicative thinking: the big challenge of the middle years. En *Mathematics: celebrating achievement, 100 years, 1906-2006.* Conferencia llevada a cabo en la 42ª conferencia anual de la asociación matemática de Victoria MAV. Universidad La Trobe, Bundoora, Australia.

Siemon, D., Izard, J., Breed, M., & Virgona, J. (2006). The derivation of a learning assessment framework for multiplicative thinking. In J. Norotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings of the 30thannual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp.113-120). Prague: PME.

Steffe, L. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, 4(3), 259-309. doi: 10.1016/10416080(92)90005-Y

Steffe, L. (1994) Children´s multiplying schemes. En: Harel, G & Confrey, J (Ed.). *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. (pp. 3 - 40) State university of New York press. New York.

Steffe, L., Von Glasersfeld, E., Richards, J., & Cobb, P. (1983). *Children's Counting Types*. New York, NY: Praeger.

Steffe, L., & von Glasersfeld, E. (1985). Helping children to conceive of number. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 6*(2-3), 269-303.

Steffe, L., & Cobb, P. (1998). Multiplicative and divisional schemes. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20*(1), 45-62.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York, NY: Springer.

Tamayo, O. (2001). *Evolución conceptual desde una perspectiva multimodal. Aplicación al concepto de respiración*. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona. España.

Tamayo, O., Vasco, C., Suarez, M., Quiceno, C., García, L., & Giraldo, A. (2010). *La clase multimodal. Formación y evolución de conceptos científicos a través del uso de las tecnologías de la información y la comunicación*. Universidad autónoma de Manizales. Colección Ciencias sociales y humanas. Manizales – Colombia.

Thomas, M., Yoon, C., & Dreyfus, T. (2009). Multimodal use of semiotic resources in the construction of antiderivative. En R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2). Palmerston North, NZ: MERGA.

Tzur, R., Johnson, H. L., McClintock, E., Kenney, R. H., Xin, Y. P., Si, L., …. Jin, X. (2013). Distinguishing schemes and tasks in children's development of multiplicative reasoning. *PNA*,*7*(3), 85-101.

Vergel, R. (2003). Perspectiva sociocultural del aprendizaje de la multiplicación. En *Memorias XIV Encuentro de Geometría y II de Aritmética*. Universidad Pedagógica Nacional. (pp. 493- 505)

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grado de educación básica primaria (9 – 10 años). *Revista científica*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Edición especial, Octubre. 235 - 239.

Vergel, R. (2014a). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)*. Tesis Doctoral Laureada. Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá: Colombia. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/4054/

Vergel, R. (2014b). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios*, 1(39), 65-76. Recuperado de http://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/RF.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria* (L. O. Segura, Trad.). México, D.F.: Trillas.

Vergnaud, G. (1993). La teoría de los campos conceptuales. En: *Lecturas en didáctica de las matemáticas escuela francesa*. Sección de matemática educativa del Cinvestav – I.P.N. México.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-60). New York, NY: State University of New York Press.

Vygotski, L. (2000*). Obras Escogidas. Volumen III*. (L. Kuper, Trad.) Madrid-España: Visor.

Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figúrales*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós. Version original: *Vygotsky and the social formation of mind*, Cambridge: Harvard University Press, 1985.