Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones

Tomás Ortega del Rincón, Universidad de Valladolid (España)

Cristina Pecharromán Gómez, Universidad de Valladolid (España)

Recibido el 28 de Marzo de 2014; aceptado el 26 de Febrero de 2015

Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones

Resumen

En este trabajo, se presenta una investigación sobre el aprendizaje de varias definiciones elementales de Geometría por los alumnos del Grado de Educación Primaria. Se considera que en estos aprendizajes es muy importante la visualización y la interpretación verbal del concepto. En los procesos de docencia se enfatiza la lectura de las figuras geométricas construidas por los propios alumnos de forma interactiva, utilizando GeoGebra. A pesar de todo, comprobamos que los alumnos tienen serias dificultades en la adquisición de estos conceptos y, en suma, del lenguaje matemático y en la adquisición de las competencias implícitas.

Palabras clave: visualización; GeoGebra; ángulo; circunferencia; tangente; mediatriz.

Learning geometry concepts through visualization

Abstract

The goal of the current work is learning of basic geometry definition for the students of the Primary Education. It is considered that the visualizations and the verbal explanations are fundamental to understand geometry. It is underlined that in the didactic process the importance of the interactive process with students using the tool of GeoGebra. Although, we observe the students had difficulties to acquire these concepts and in consequence, the mathematical language and the implicit competency.

Keywords: visualization, GeoGebra, angle, circumference, tangent, perpendicular bisector.

Aprendizagem de Conceitos Geométricos Através de Visualizações

Resumo

Neste trabalho apresenta-se uma investigação sobre a aprendizagem de várias definições elementares de Geometria, por alunos do Curso de Licenciatura em Educação Básica 1º Ciclo. Considera-se que, nessas aprendizagens, são muito importantes as visualizações e interpretações verbais de conceitos. Nos procedimentos pedagógicos, enfatiza-se a leitura das figuras geométricas construídas pelos próprios alunos de forma interativa, usando o GeoGebra. No entanto, verifica-se que os mesmos têm sérias dificuldades na aquisição desses conceitos, bem como da linguagem matemática e ainda de competências implícitas.

Palavras chave: visualização, GeoGebra, ângulo, circunferencia, tangente, mediatriz.

Para citar: Ortega, T. & Pecharomán, C. (2015). Aprendizaje de conceptos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 95 - 117.

Apprentissage des concepts géométriques par la visualisation

Résumé

Cet article rend compte d'une recherche sur l'apprentissage d'un ensemble de définitions de base / fondamentales en Géométrie sur un corpus d'étudiants universitaires de Grado de Educación Primaria. Il est considéré que la visualisation est très importante dans ces apprentissages, c'est pourquoi, au cours de l'enseignement, nous avons mis l'accent sur la lecture des figures géométriques construites par les étudiants eux-mêmes de manière interactive et à l'aide de GeoGebra. Nonobstant, nous avons constaté que les élèves ont des difficultés graves dans le cadre de l'acquisition de ces concepts et, en somme, du langage mathématique et, donc, dans l'acquisition des compétences implicites.

Mots clés: Visualisation, GeoGebra, angle, circonférence, tangente, médiatrice.

1. Introducción

Este trabajo presenta una investigación sobre el aprendizaje de varios conceptos geométricos en el Grado de Educación Primaria. Es un aprendizaje que tiene lugar por el reconocimiento del concepto a través de su representación gráfica y de su representación verbal (definición). El alumno debe ser capaz de construir tanto la representación gráfica, como la verbal con rigor.

El aprendizaje de los conceptos geométricos tiene lugar a través de representaciones externas desde las que el alumno desarrolla representaciones internas o imágenes mentales. Asimismo, consideramos que la visualización fundamenta el aprendizaje de los objetos geométricos a través de sus representaciones gráficas. Finalmente, siguiendo a Duval (1999) consideramos que el aprendizaje tiene lugar cuando existe una coordinación entre las representaciones internas que el alumno desarrolla sobre el concepto. Por tanto, la docencia parte de la representación gráfica del concepto y, desde ella, se interpreta y se va construyendo la representación verbal (definición del concepto), para que los alumnos reconozcan después la definición del objeto geométrico a través de su representación gráfica. El marco teórico que se presenta describe brevemente estas ideas, que fundamentan el aprendizaje de los conceptos geométricos.

Se proponen tres objetivos de investigación, a través de los que se interpreta el aprendizaje de unos conceptos geométricos. Un objetivo considera la influencia del conocimiento previo en las percepciones que tiene los alumnos de unos conceptos geométricos básicos. Otro objetivo atiende a las dificultades para el desarrollo de representaciones tanto internas como externas a partir de dichas percepciones. Y, el último objetivo versa sobre la construcción de la definición verbal del concepto.

Para el desarrollo experimental de la investigación, se utiliza el marco metodológico de investigación cualitativa del estudio de casos (Stake, 2005). Siguiendo a este autor, en este caso, dada las características de la muestra, se trata de un estudio de casos denominado múltiple o colectivo que está caracterizado por un hecho común de los elementos de la muestra: las concepciones erróneas que tienen los alumnos del Grado de Educación Primaria (GEP) sobre los conceptos básicos de Geometría. La investigación se lleva a cabo con alumnos del (GEP), que ya tienen un conocimiento previo sobre los conceptos geométricos que se tratan, pero tienen que desarrollar este conocimiento de manera que adquieran las competencias necesarias para ser docentes de esos contenidos. En concreto, la precisión y el rigor en la expresión.

Tras la valoración del aprendizaje y observar los errores y dificultades del mismo, se presentan las conclusiones de la investigación, que están orientadas por los objetivos enunciados al principio de la misma y los resultados observados en el desarrollo experimental. Destacamos que las concepciones previas sobre el concepto dificultan su percepción y el desarrollo de adecuadas representaciones internas, con la consecuente dificultad para la construcción de la definición verbal precisa del concepto.

2. Marco teórico y antecedentes

A pesar de los rechazos conductistas y constructivistas sobre las representaciones internas y externas, coincidimos con Goldin (2007) en que las interacciones entre ambas favorecen el aprendizaje de la geometría. En nuestro caso, el profesor genera representaciones externas de los conceptos a mano alzada en la pizarra tradicional o en la pizarra digital con GeoGebra, y los alumnos reproducen o construyen la representación gráfica de los conceptos también a mano alzada o con Geogebra, en interacción por pares.

Consideramos que las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones, con o sin discurso, sobre la producción de representaciones externas. Presmeg (2006) considera que la imaginería visual (representación interna) es subyacente a la creación de una disposición espacial o a un dibujo o diagrama, por lo que no tiene sentido la separación entre representación interna y representación externa.

Siguiendo a Fernández (2013), concebimos el procesamiento visual como el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, así como el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Por otra parte, de las seis categorías que describe esta autora, nosotros estamos interesados en la formada por la comprensión de conceptos y propiedades.

Atendiendo a la teoría de Van Hiele sobre el aprendizaje de los objetos geométricos, concedemos especial importancia a las figuras geométricas (Laborde, 1993; Presmeg, 1997), en cuanto que son representaciones de objetos geométricos (Batista, 2008). Asimismo Hershkowitz (1990, 81) destaca la importancia de los procesos visuales en la formación de las imágenes conceptuales, pero somos conscientes de que las concepciones previas afectan a sus percepciones (Battista, 2007).

Esta investigación trata el reconocimiento de los objetos matemáticos a través de sus representaciones gráficas. No se pretende deducir propiedades de los objetos geométricos, por tanto, no es tan importante el dinamismo de las figuras (Sinclair, 2003; Acuña y Larios, 2008; Sack y Vazquez, 2008). Aunque se trata de alumnos adultos (estudiantes del 2º curso del Grado de Educación Primaria), es importante que dispongan de tiempo suficiente para la creación de las imágenes mentales (Bishop, 1989) y que superen las dificultades asociadas a las interpretaciones de las representaciones de los conceptos como la organización preceptiva, el reconocimiento y la representación, (Gal & Linchevski, 2010).

Finalmente, en relación con el aprendizaje y comprensión de los conceptos matemáticos seguimos a Duval (1999), según el cual *no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación,* (Duval, 1999, 13). Como los registros de representación en los que puede ser representado el concepto son diversos, el autor considera que se llega a distinguir entre representante y representado cuando existe una coordinación espontánea de las representaciones en al menos dos registros semióticos. En concreto, se deben cumplir dos condiciones para acceder al objeto representado (comprensión conceptual): disponer dos representaciones del concepto, y convertir "espontáneamente" las representaciones de un sistema semiótico a otro (Duval, 1999, 30).

3. Objetivos de la investigación

Las investigaciones referenciadas y otras más, nos han aportado resultados y posiciones interesantes, pero son investigaciones que han trabajado con alumnos de corta edad, no con alumnos del Grado de Educación Primaria. Estos alumnos ya han estudiado Geometría en los seis cursos de Educación Primaria y en los cuatro de Educación Secundaria Obligatoria. Es importante tener presente este planteamiento previo, ya que, presumiblemente, influye en la percepción e interpretación de las representaciones externas de los conceptos y en la formación de imágenes mentales.

Así, formulamos los siguientes objetivos de investigación:

Averiguar si las concepciones previas de nuestros alumnos afectan negativamente en la percepción de los conceptos de Geometría y en su aprendizaje.

Esperamos que estas concepciones se identificarán en el debate que se establece sobre los objetos que se van a estudiar.

Analizar si nuestros alumnos tienen dificultades en la formación de representaciones internas y representaciones externas de unos conceptos de Geometría.

Suponemos que estas dificultades se pondrán de manifiesto en los debates y en las respuestas verbales.

Comprobar si el aprendizaje de los conceptos desarrolla la competencia lingüística necesaria para ejercer la profesión de profesores de la geometría curricular de Educación Primaria.

Creemos que la competencia lingüística se podrá analizar a través de las respuestas verbales que han emitido los alumnos a las preguntas formuladas.

4. Metodología de investigación

La investigación tiene su origen al observar las grandes dificultades que tienen los alumnos de 2º curso de Grado de Educación Primaria en la asignatura "Fundamentos de la forma y el volumen. Estrategias didácticas para su enseñanza" a la hora de enunciar la definición de los objetos básicos de la Geometría de forma rigurosa.

Se ha elegido una muestra de alumnos que cursan la asignatura de Geometría en el Grado de Educación Primaria. Todos ellos reciben una docencia similar, inspirada en el ciclo didáctico de Mariotti (2013), que parte del reconocimiento gráfico de los conceptos. Se observa y se debate con los alumnos los elementos que los configuran y, aplicando "geometría dinámica", se introduce su definición o representación verbal rigurosa. En primer lugar, con el fin de identificar las concepciones previas, se pregunta a los alumnos por las definiciones de los conceptos a través de actividades diseñadas con Geometría Dinámica, construidas con GeoGebra, y, en ocasiones con dibujos a mano alzada. Se propone que estas actividades se resuelvan por pares. A continuación, se establece un debate en el aula sobre las respuestas erróneas, que es grabado en audio. En este debate, se impulsa la competencia lingüística promoviendo la expresión verbal de los alumnos. En concreto, se les pide que interpreten verbalmente las figuras representadas de forma gráfica, que expresen las representaciones internas que hayan desarrollado a partir de la visualización previa de las figuras o, en su caso, que expresen verbalmente lo que están "leyendo" o percibiendo visualmente en ese momento. Se procede de forma interactiva entre profesor y alumno, resolviendo las dudas que se plantean. Sigue un proceso docente interactivo y, en todos los procesos, se pretende orientar al alumno para que exprese la definición del concepto desde las representaciones internas que ha desarrollado mediante el proceso de visualización del concepto a través de su representación gráfica.

Finalmente, para valorar los aprendizajes, se han elaborado cuestionarios escritos, implementados después de la docencia. En ellos, el alumno debe dibujar el concepto y/o escribir su definición.

La muestra estaba compuesta por 202 alumnos, de cuatro grupos diferentes de los 6 disponibles. Emitieron un total de 335 respuestas. Así pues, se puede considerar un estudio de casos múltiple o colectivo en el que se prevén diversidad de respuestas a las preguntas que se formularon con el fin de valorar los aprendizajes. Se trata de preguntas ad hoc, incluidas en varias pruebas de evaluación, posteriores a la docencia, a lo largo de dos años. (Intervinieron todos los alumnos, pero no todos respondieron a todos los ítems). Las respuestas de los alumnos se agrupan según los errores que cometen, pero no se hacen categorías de respuestas, ya que estas generalidades ocultarían las características específicas de cada caso.

La investigación se ha llevado a cabo por dos investigadores. Ambos han efectuado conjuntamente el análisis de las repuestas de los alumnos, que fueron recogidas de forma verbal en interacción con los alumnos, en la docencia que introduce los conceptos y en forma escrita a través de los cuestionarios. La participación interactiva de los dos investigadores en el análisis de los datos permite cierta triangulación en la valoración (interpretación) de los mismos.

A continuación, se presentan las definiciones de los conceptos geométricos sobre los que se ha investigado, para que se puedan interpretar con precisión los errores cometidos por los alumnos y, a través de ellos, se puedan observar las dificultades de aprendizaje. Tales definiciones aportan un marco de análisis de las respuestas desde las competencias lingüísticas y permiten detectar errores de expresión y aprendizaje.

Ángulo: Porción de plano limitada por dos semirrectas con origen común, que se llama vértice. Estas dos semirrectas, que se llaman lados, determinan dos ángulos: uno convexo y otro cóncavo.

Circunferencia: Curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan de uno fijo llamado centro. El segmento que une el centro con uno cualquiera de sus puntos es el radio (En la docencia se considera que deben relacionarse los dos elementos que la definen: centro y radio).

Recta tangente a una circunferencia: Recta perpendicular al radio de la circunferencia en el punto de tangencia.

Bisectriz de un ángulo: Semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales y tiene su origen en el vértice del ángulo. Otra definición aceptada: es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. (Con esta interpretación la bisectriz sería una recta).

Mediatriz de un segmento: La recta perpendicular al segmento en su punto medio. Otra definición considerada: Recta formada por el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Altura de un triángulo sobre un lado (base): Segmento determinado por el vértice y la intersección de la recta que contiene a la base (lado opuesto) con la perpendicular a esta recta por dicho vértice.

Se han elegido estos conceptos por su carácter básico y por su importancia. Además, se considera una cuestión sobre un tetraedro irregular porque en su análisis intervienen varios de estos objetos geométricos. Finalmente, la corrección de las mismas se ha realizado con un espíritu crítico presidido por la búsqueda de los errores de los alumnos.

5. Desarrollo de la investigación

En este apartado, se describe la valoración del aprendizaje de los conceptos geométricos presentados, y las dificultades y los errores observados. Las figuras 1, 3, 4, 5, 6 y 7 son representaciones realizadas por los alumnos con GeoGebra durante la docencia.

Primera fase: Recogida de datos en la interacción verbal profesor-alumnos.

En primer lugar, se presentan los errores y dificultades de aprendizaje de los alumnos cuando se han recogido los datos en el aula de forma verbal, en interacción del profesor con los alumnos.

Muchas de las lecturas de las figuras que los alumnos realizan tras el proceso de docencia no son correctas: algunos suelen decir cosas que no tienen sentido y otros muchos se expresan de forma poco precisa. A continuación, se transcriben afirmaciones de los alumnos en los debates grabados de docencia (muchas son concepciones previas) y las respuestas escritas tras ella.

Sobre la definición de ángulo, figura 1, los alumnos dan las siguientes definiciones erróneas durante el debate:

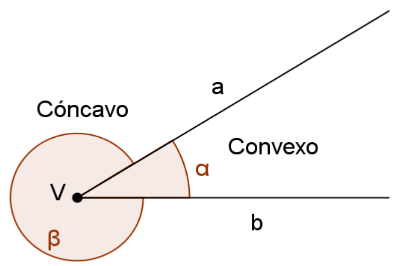

Figura 1. Ángulos convexo y cóncavo.

A1. Dos rectas

A2. Dos rectas que se cortan en punto.

A3. Dos rectas y dos arcos.

A4. Dos semirrectas.

A5. Dos semirrectas que se cortan.

A6. Dos semirrectas con vértice común.

A7. El espacio a la derecha de V.

A8. El espacio comprendido a la derecha de V y a la izquierda de “α”.

El profesor intenta que los alumnos comprendan sus errores. Así, por ejemplo, para rebatir la afirmación de A5, durante el debate, el profesor dibuja dos semirrectas que se corten en un punto, figura 2, y se procede a leer esta figura contrastándola con la anterior y enfatizando los elementos que determinan el concepto.

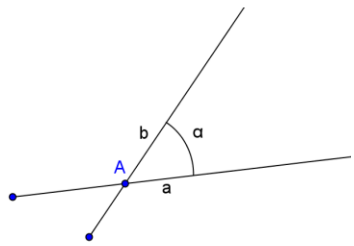

Figura 2. Contraste con la figura 1.

Sobre la definición de circunferencia, figura 3, los alumnos dan las siguientes respuestas erróneas durante el debate:

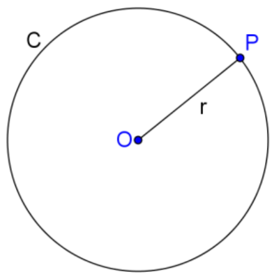

Figura 3. Circunferencia de centro O y radio r.

C1. Es una curva cerrada.

C2. Es una curva cuyos puntos están alrededor del centro.

C3. Es una línea curva y cerrada.

C4. Es una curva cerrada que tiene un centro y sus puntos están alrededor.

C5. Es una curva cerrada cuyos puntos equidistan del centro.

C6. Es una curva plana, cuyos puntos equidistan del centro.

C7. Es una curva formada por una sucesión de puntos que forman radios desde el centro.

C8. Es una curva cerrada y plana, cuyos puntos equidistan del centro. (Omite el radio)

Para rebatir la afirmación C7, por ejemplo, se dibuja una línea de puntos que equidisten del centro sin que sea cerrada y se hace ver que no cumple la definición.

Sobre la definición de recta tangente a una circunferencia, figura 4, Se pide a los alumnos que expliquen qué tiene que cumplir una recta tangente a una circunferencia en un punto, A, de la misma. Los alumnos dan las siguientes respuestas erróneas durante el debate:

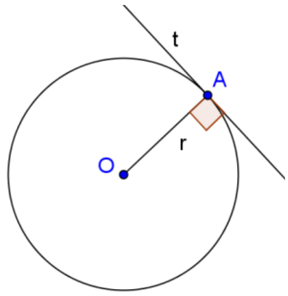

Figura 4. Recta, t, tangente a la circunferencia de centro O y radio r.

T1. Recta que toca a la circunferencia.

T2. Recta que tiene un punto común con la circunferencia.

T3. Recta que corta a la circunferencia en un solo punto.

T4. Recta que pasa por el extremo del radio.

T5. Recta perpendicular al radio.

La afirmación T2 no es válida en este curso de geometría, aunque se indique que el punto es único, ya que de ella no se infiere un método para su trazado. Estos alumnos, según sus intervenciones recogidas, tienen el hábito mal adquirido de "trazar las tangentes" ajustando la regla a la circunferencia "a ojo" (se pueden hacer otros ajustes que apenas difieran del anterior, dibujar las rectas correspondientes y preguntarles cuál de esas rectas trazadas es realmente la tangente). Deben aprender que la definición da la solución única.

Sobre la definición de mediatriz, figura 5, los alumnos dan las siguientes definiciones erróneas durante la docencia:

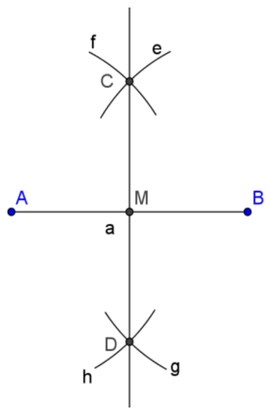

Figura 5. Mediatriz de un segmento.

M1.Es el punto medio de un segmento.

M2.Es la recta que divide al segmento en dos partes.

M3.Es el segmento que corta por la mitad al segmento dado.

M4.Es la semirrecta perpendicular al segmento por el punto medio.

M5.La semirrecta que pasa por el punto medio del segmento.

M6.Es la recta que divide al segmento en dos partes iguales.

M7.Línea que pasa por el punto medio del segmento.

Se rebaten en forma de debate cada una de las respuestas erróneas de los alumnos presentando figuras que cumplen la respuesta dada por ellos, pero que no cumple los requisitos necesarios para que sea mediatriz. Por ejemplo, para rebatir la respuesta M6 se dibuja una recta oblicua al segmento que pasa por su punto medio.

Sobre la definición de bisectriz de un ángulo, figura 6, los alumnos dan las siguientes definiciones erróneas durante el debate:

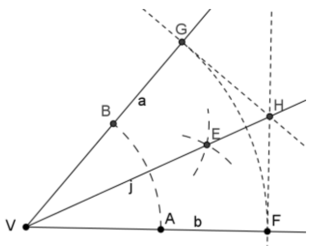

Figura 6. Bisectriz de un ángulo.

B1. Semirrecta que divide al ángulo.

B2. Recta que divide al ángulo.

B3. Recta que divide al ángulo en dos partes iguales.

B4. Semirrecta que divide al ángulo en dos partes iguales.

B5. Recta que divide al ángulo en dos partes iguales.

B6. Semirrecta que divide al ángulo en dos partes iguales

Para rebatir la primera de las afirmaciones se dibuja un ángulo y una semirrecta que no sea bisectriz y se verifica inmediatamente que no cumple la definición.

Sobre la definición de altura de un triángulo, figura 7, los alumnos dan las siguientes definiciones erróneas durante el debate:

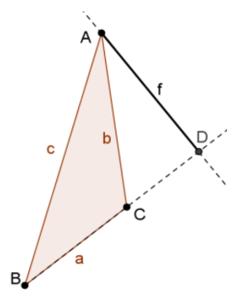

Figura 7. Altura sobre el lado BC.

H1. Segmento que une el lado con el vértice opuesto.

H2. Recta perpendicular a la base.

H3. Segmento que es perpendicular al lado opuesto.

H4. Recta que divide al triángulo en dos mitades.

H5. Segmento que divide al triángulo en dos triángulos.

H6. Longitud de un segmento que une el vértice y el lado opuesto.

H7. La distancia entre el punto medio y el vértice

Para rebatir cualquiera de las afirmaciones se construye una figura conforme a la definición errónea dada y se ve que no cumple la definición de altura.

Sobre el descubrimiento de relaciones métricas, se muestra a los alumnos la figura adjunta que representa un tetraedro y una esfera. El diámetro de la esfera mide 4 metros, el triángulo equilátero AFC está inscrito en el círculo máximo de centro O y el vértice B está sobre la esfera y en la perpendicular a dicho círculo por su centro. El alumno debe contestar razonadamente si AFCB es un tetraedro regular.

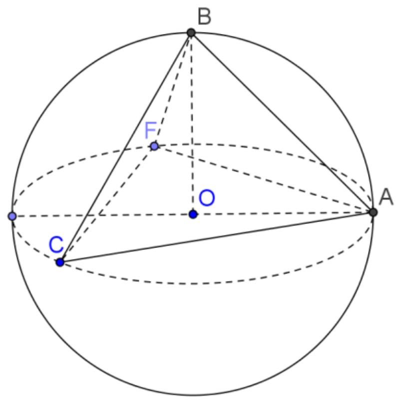

Figura 8. Esfera y tetraedro del enunciado.

Después, con el fin de que, en el supuesto de que la respuesta anterior fuese errónea, pensaran por qué razón es irregular, se les pide que calculen las longitudes de las aristas. También se les recomienda que dibujen un croquis con el círculo máximo de centro O y el triángulo AFC inscrito en él, y que hagan lo propio con una cara lateral.

Se observa que buena parte de los alumnos identifican tetraedro con tetraedro regular. Como comentario, hay que decir que, durante la docencia de poliedros, los alumnos se suelen fijar en la forma de las caras (igualdad de las mismas), pero no en el número de caras que concurren en los vértices y mucho menos en si los ángulos diedros son iguales.

Segunda fase. Recogida de datos a través de un cuestionario

En segundo lugar, se presentan los errores y dificultades de aprendizaje de los alumnos cuando se han recogido los datos de forma escrita a través de un cuestionario implementado tras la docencia.

Las respuestas se agrupan por errores. Aparte de las respuestas en blanco, algunas de las respuestas contienen más de un error y, por tanto, son susceptibles de catalogarlas en más de un grupo.

Sobre la definición de ángulo

Sólo el 25,5% de las respuestas son correctas y el 74,5% restante contienen errores. Entre éstos, el 13,7% no indican que se trata de una región del plano y, por tanto, esta concepción, va a acarrear errores en la concepción de bisectriz. El alumno A19 escribe:

Es la amplitud en grados de una recta o de un conjunto de ellas. Se calcula a través de un "portángulos".

Este alumno, además de escribir cosas con poco sentido, confunde el concepto con su medida. Otra respuesta un tanto disparatada, de las muchas que se produjeron, es la que escribe el alumno A1:

Arco que abarca desde un punto de la circunferencia a dos puntos de la misma siendo estos tres los radios

El 15,7% de los alumnos no explicita dónde se encuentra la región que limitan las dos semirrectas. Así, el alumno A2 primero lo identifica con un punto y, después, con "un espacio opuesto al vértice":

Es el punto común donde resultan 2 rectas. Es el espacio opuesto al vértice.

En este grupo también encuadramos al alumno A13 que, sin duda, no discrimina entre las acciones de "comprender" y "dividir", lo que denota una pobreza de vocabulario de la lengua castellana.

Es la porción de plano dividido por dos semirrectas con origen común.

Unas cuantas respuestas, el 9,8%, conciben al ángulo como cortes de rectas. Las respuestas dadas por los alumnos A2 y A22 estarían en este grupo:

Es la porción resultante en un plano cuando se cortan dos rectas en un punto, llamado vértice.

Aparte de las respuestas que no tienen ningún significado, un 17,6% omite que las semirrectas deben tener el origen común. El alumno A7 hace el dibujo de la figura 9 y escribe:

Porción de plano comprendido entre dos semirrectas con un punto en común llamado vértice.

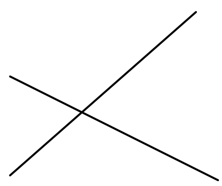

Figura 9. Respuesta del alumno A7.

El mismo porcentaje, 17,6%, es alcanzado por las respuestas con cierta significación que omiten nombrar al vértice del ángulo. La respuesta del alumno A14 está en este grupo y confunde origen y vértice:

Porción de plano delimitado por dos semirrectas con un vértice común.

Aparte de estos porcentajes, hay otras respuestas que se podrían calificar como disparatadas, ya que no tienen ninguna significación. Por ejemplo, las respuestas dada por los alumnos A1, ya transcrita, y la del A25:

Porción de la circunferencia delimitada por dos semirrectas con origen común.

Reflexión: Si tenemos en cuenta la definición considerada en la docencia, se puede afirmar que hay errores sobre todas las palabras con significación matemática que aparecen en la misma: “porción de plano”, “semirrectas”, “origen” y “vértice”, incluso utilizan el verbo delimitar en vez de limitar, uso que es incorrecto porque la porción es infinita. En relación con los objetivos planteados, el conocimiento previo de buena parte de nuestros alumnos afecta negativamente en la percepción y reconocimiento del concepto, lo que provoca serias dificultades en la formación de las representaciones internas de ángulo, y la consecuente construcción de representaciones externas, como la representación verbal rigurosa, lo que no permite el desarrollo de la competencia lingüística asociada. Se observa que tras la docencia los alumnos adquieren una percepción del objeto más correcta. Pasan de identificar al ángulo con algunos de los elementos básicos que lo definen a identificarlo con una porción de plano, pero se siguen observando errores de los elementos definitorios y, por tanto, no se produce una coordinación entre las representaciones gráfica y verbal consideradas.

Sobre la definición de circunferencia

Las respuestas que hemos considerado correctas sólo alcanzan el 13,8%. Otros dos que expresan que el radio es la distancia del centro de la circunferencia a un punto cualquiera de la circunferencia y el resto que es el segmento que une dicho centro con uno de sus puntos.

El 16% de las respuestas omiten alguna de las características de la curva (cerrada y plana) o las dos. Por ejemplo, el alumno C54 escribe lo siguiente:

Es una recta curva cerrada cuyos puntos equidistan de un mismo punto llamado centro.

Otro ejemplo de este grupo de respuestas es la que escribe el alumno C35 que incluye la noción de círculo sin que complete la definición de circunferencia. Este hecho se repite en otros alumnos.

Es una curva cerrada. Lo que hay dentro de la circunferencia es el círculo.

El 6,4% de los alumnos no caracteriza los puntos de la curva o confunden punto de la circunferencia y radio. Un ejemplo de respuestas sobre la confusión entre radio y punto de la circunferencia es la dada por el alumno C63, que escribe lo siguiente:

Curva cerrada plana, cuyos puntos equidistan del centro y se les llama radios.

Hay otro alumno, el C25, que escribe radio en vez de centro y que interpretamos como un error de expresión. Sobre los errores de caracterización de los puntos de la curva. Las respuestas de los alumnos C1 y C35 son ejemplos de estos errores:

Es una línea curva plana y cerrada de cuyo centro parten radios equidistantes a los puntos de la circunferencia.

Línea curva plana y cerrada con un punto de origen denominado centro.

El 50% de los alumnos omite la referencia al radio, que es un elemento determinante de cada circunferencia. Así, si una circunferencia fuere la solución de un problema, se tiene que determinar forzosamente su centro y uno de sus radios para poderla dibujar (determinar). Un ejemplo de estas respuestas es la dada por C4:

> *Es una línea curva, plana y cerrada. También podría definirse como conjunto de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.*

Y la más simple que escribe el alumno C27:

> *Curva cerrada y plana en la que todos sus puntos están a la misma distancia del centro.*

El 10,6 % de los alumnos no interpreta bien el centro de la circunferencia, porque asumen a priori la pertenencia del centro a la circunferencia. Por ejemplo, el alumno C11 da esta respuesta:

> *Es una línea curva, cerrada y plana que tiene un punto interior fijo llamado centro del que van a equidistar todos los demás puntos de la circunferencia.*

El error de este alumno es el mal uso de la acción verbal asociada a tener. No aprecia que "tiene un punto…" indica pertenencia. En estas respuestas también se observa que los alumnos denominan erróneamente al centro de la circunferencia, con términos como: punto medio, punto común y punto de origen. Un ejemplo es la respuesta del alumno C34:

> *Línea curva plana y cerrada con un punto de origen denominado centro.*

Finalmente, en el 3,2 % de los alumnos se observan otros errores como la discretización de la curva o la interpretación de la curva como una recta. Por ejemplo, el alumno C65 indica:

> *Curva cerrada formada por una sucesión de puntos equidistantes del centro.*

Reflexión: Se observa que el principal error es la omisión de la referencia al radio, lo que da lugar a definiciones incompletas. En otros casos, se interpreta mal la circunferencia o los elementos que la configuran. Por ejemplo, se discretiza la continuidad de la línea, no se interpreta de forma correcta el radio o el centro de la circunferencia,… En general, hay una primera percepción como curva cerrada y plana que no se sabe completar con la caracterización de los puntos de esa curva. Asimismo, no relacionan los elementos que configuran la circunferencia. La mala interpretación del concepto hace que el alumno desarrolle representaciones internas del objeto que no se corresponden con la realidad del objeto. También se observan dificultades de expresión del alumno, es decir, dificultades en la construcción de representaciones externas verbales a partir de las internas, que están fundamentadas en visualizaciones incompletas, no coordinan las representaciones consideradas, y no usan el vocabulario adecuado. La evolución de los alumnos en la concepción de circunferencia a través de la docencia es escasa. Buena parte del alumnado mantiene sus percepciones erróneas.

Sobre la definición de recta tangente a una circunferencia

Sin entrar en detalles sobre las respuestas de los alumnos, digamos que sólo el 26,8 de las mismas son correctas; el 8,1% no contesta; el 65,1% son incorrectas, pero tienen cierta significación, aunque algunas de ellas, el 4,7%, son disparatadas, como por ejemplo la que escribe el alumno T48:

La recta tangente a una circunferencia corta el perímetro de la misma formando un ángulo circunscrito "α" que es mitad del ángulo interior "β".

Dentro de las respuestas que hemos considerado correctas hay dos que denotan cierta imprecisión. Por ejemplo, T7 escribe:

Recta perpendicular al radio en el punto de tangencia (que sea perpendicular al radio y que sólo pase por ese punto, por el exterior de la circunferencia).

Es evidente que por interior se refiere a círculo y, por otra parte, si es exterior, no es tangente. Peor, si cabe, es la respuesta del alumno T15 que escribe *La recta tangente tiene que ser perpendicular al radio*, pero lo acompaña de una figura en la que aparece dibujada una cuerda, lo que en sí es una afirmación disparatada.

Entre las respuestas incorrectas, el 35,7% omite que la recta tangente debe ser perpendicular al radio, omisión importante porque esta cualidad es la que permite dibujar dicha tangente para resolver problemas de tangencias. Los alumnos T6 y T44 escriben:

Las rectas tangentes a las circunferencias sólo se pueden cortar en un punto.

Tienen que tener un punto en común pero sin llegar a cortarse. Es decir, un punto de la circunferencia constituye a la recta.

Además, parece que para el primer alumno pudiese haber más de una recta tangente a la circunferencia en un punto.

En el 4,7% de las respuestas se confunde el papel del radio y el centro o el punto de tangencia. Así, el alumno T36 escribe:

Que sea perpendicular al centro en el punto de tangencia.

Ciertamente, parece que esta respuesta, más que otra cosa, es un error de escritura, pero en los debates se comprueba que se trata de errores conceptuales.

El 9,3 % omite la unicidad del punto de tangencia y, con ello, la unicidad de la tangente, hecho que está garantizado por la unicidad de la perpendicular a una recta (a un segmento) por un punto. Así, el alumno T57 responde:

Tiene que cumplir que la recta tiene que ser siempre perpendicular al radio (o al diámetro) de la circunferencia, y que siempre tenga, al menos, un punto común con la circunferencia.

Finalmente, el 15,1% de las respuestas incorrectas son imprecisas o son expresiones gramaticales incorrectas. Son ejemplos la respuesta del alumno T57 anterior y la del alumno T65:

Tiene que ser perpendicular y nunca estar encima de la circunferencia.

Reflexión: Cuando no tiene lugar el reconocimiento correcto del concepto surgen respuestas disparatadas o sin sentido. Esta falta de reconocimiento o interpretación del concepto puede ser debida a un conocimiento previo insuficiente de los elementos básicos que permiten el desarrollo del nuevo concepto, como la perpendicularidad al radio. Esta omisión hace que la definición sea incompleta y no represente de forma adecuada al concepto, hecho que imposibilitaría el trazado de la tangente y aplicar esta cualidad en problemas de tangencias. También se observan definiciones imprecisas que pueden ser debidas a dificultades para configurar la representación verbal del concepto y para utilizar un vocabulario adecuado. En consecuencia, se producen escasas coordinaciones entre los sistemas de representación gráfico y verbal, y no se producen desarrollos adecuados de la competencia lingüística de los alumnos. Se observan confusiones en la caracterización de los elementos que configuran el concepto y, en otros casos, la incompletitud de la definición no permite el reconocimiento del concepto. La evolución de los alumnos con la docencia es escasa y buena parte de ellos siguen omitiendo la caracterización que proporciona la perpendicularidad al radio de la circunferencia

Sobre la definición mediatriz

Esta definición registra el mayor porcentaje de respuestas correctas, un 64,6%, y muy pocos la definen como lugar geométrico. El porcentaje de respuestas incorrectas, un 35,4%, sigue siendo alto para unos alumnos que aspiran a ser profesores de Educación Primaria.

El 12,5% de las respuestas incorrectas identifican a la mediatriz con el punto medio del segmento. Un ejemplo de estas respuestas es la que da el alumno M5, quien además añade un procedimiento inadecuado.

> *Es el punto medio que divide al segmento en dos partes iguales. Sirve para la construcción de triángulos equiláteros.*

El 33,3% de estas respuestas omite la condición de perpendicularidad y, por tanto, se trata de respuestas con un error conceptual importante. Son ejemplos de estas respuestas las de los alumnos M7 y M21:

> *La mediatriz de un segmento divide al segmento en dos partes iguales.*
>
> *Es la recta que divide al segmento en su punto medio y divide al plano en cuatro partes o sectores iguales.*

En realidad, el primero de ellos enuncia la propiedad de dividir al segmento en dos partes iguales y el segundo, además, añade una aserción carente de sentido.

Un 12,5% de las respuestas incorrectas omite la condición de que la mediatriz debe de pasar por el punto medio del segmento o confunde el concepto con mediatriz o circuncentro. Los alumnos M16 y M54 escriben:

> *Es la recta perpendicular a un segmento por un punto dado.*
>
> *Es la recta perpendicular al segmento en su punto medio. El punto que las corta se denomina circuncentro.*

Un 20,8% de las respuestas incorrectas confunde los conceptos de recta con semirrecta o con segmento. Se transcriben las respuestas de los alumnos M41 y M45:

> *Es la semirrecta que pasa por el medio de dicho segmento.*
>
> *Recta perpendicular a otra que pasa por el punto medio.*

La segunda afirmación es más grave aún, porque consideran que las rectas tienen punto medio.

Finalmente, un 20,8% de las respuestas son expresiones incorrectas. Por ejemplo, el alumno M43 parece que identifica o confunde línea con línea recta:

Es la línea perpendicular que divide al segmento en dos partes iguales.

Reflexión: Se observan definiciones incompletas que no permiten el reconocimiento y representación adecuada del concepto (no se especifica la condición de perpendicularidad o la ubicación del objeto). También hay respuestas incorrectas que son debidas a una errónea interpretación del concepto, posiblemente fundamentada en falsas percepciones que desarrolla el individuo y que conducen a una formación de representaciones internas incorrectas sobre el concepto (por ejemplo, identificar la mediatriz con el punto medio). Las definiciones incorrectas también permiten observar un inadecuado conocimiento previo de los elementos básicos que configuran el nuevo concepto, o la carencia de significación de dicho conocimiento (en este caso, confusión entre recta, semirrecta y segmento). También se observan respuestas imprecisas porque la representación verbal es insuficiente o inadecuada para expresar correctamente el concepto. Todo esto y el reducido porcentaje de representaciones gráficas correctas indican la escasa coordinación de las representaciones consideradas. En las concepciones previas a la docencia se observó la omisión generalizada de la condición de perpendicularidad y tras la docencia se ha observado que, aunque han evolucionado positivamente en esta percepción, siguen estando lejos de interpretar adecuadamente el concepto.

Sobre la definición de bisectriz

Sólo el 5,7% de las respuestas son correctas y el mayor error que cometen es la identificación de igualdad de ángulos con igualdad de regiones planas. Este porcentaje es el 50,2% de las respuestas erróneas.

La respuesta dada por el alumno B31, que también confunde recta con semirrecta, impide considerar correctas a las respuestas como ésta: *recta que divide al ángulo en dos partes iguales*. Y acompaña al texto de un dibujo como el de la figura 11.

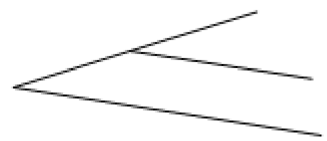

Figura 11. Respuesta del alumno B31.

La infinitud de la región plana hace que “las dos partes iguales” no sea equivalente a “dos ángulos iguales” ya que en el primer caso la recta o semirrecta puede no ser equidistante de los lados del ángulo. Las respuestas de este tipo son el 53% de los casos y, aparte de la dada por el alumno B31, se transcriben estas de los alumnos B2 y B14. Éstas, además, contienen otras incorrecciones:

Dividir al ángulo en dos partes iguales. Se cortan en el inscrito.

Es la semirrecta que divide al ángulo en dos partes iguales pasando por el vértice del mismo.

El 37,9% de los alumnos no expresa que el origen de la semirrecta debe coincidir con el vértice del ángulo. Son ejemplos la respuesta anterior del alumno B14 y las de los alumnos B22 y B28:

Es la semirrecta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

Se trata de una recta que divide al ángulo en dos partes iguales por un mismo punto.

Finalmente, el 6,1% son respuestas disparatadas y en el 3% está mal expresado el concepto. La respuesta del alumno B34 es un ejemplo:

Es la línea que corta al ángulo en dos ángulos iguales.

Reflexión: Sea por una expresión inadecuada, sea por una percepción insuficiente del concepto, se aprecian identificaciones de igualdad de ángulo con igualdad de región plana, lo que da lugar a definiciones incorrectas. Otras respuestas son incompletas al no ubicar la bisectriz en el ángulo (origen en el vértice). Entre las respuestas mal expresadas, también encontramos aquellas que no utilizan la representación verbal adecuada de los elementos básicos que forman parte de la definición del nuevo concepto. Tras la instrucción, se observa que persiste el error asociado a la identificación del origen de la semirrecta con el vértice del ángulo y una descoordinación entre las representaciones consideradas.

Sobre la definición de altura de un triángulo

Sólo el 25,0% de las respuestas son correctas y un 8,3% no contesta. Entre las incorrectas abundan muchos errores y, algunas de ellas, como en los conceptos anteriores, tienen más de un error. En el 22,5% de las respuestas incorrectas, a la altura no la denomina ni segmento ni distancia y en su lugar los alumnos del Grado invocan conceptos muy dispares (medida, longitud, perpendicular, recta, semirrecta). Los alumnos H2 y H23 escriben:

La altura de un triángulo es la medida que existe entre uno de sus vértices y su perpendicular.

Es la longitud de línea que abarca desde el punto superior de un triángulo a su base formando 90º

Además, estas aserciones carecen de sentido, pero no son las únicas y, de hecho, el mayor porcentaje de incorrecciones, el 25,0%, son aserciones que carecen de sentido. Como ejemplos citamos la respuesta del alumno, ya transcrita, H23 y la del H26:

Es la distancia del triángulo usualmente vertical o en la dirección de la gravedad.

Un 10,0% de las respuestas incorrectas confunde el concepto de altura con el de recta perpendicular, como ejemplo reproducimos la respuesta del alumno H3, quien además añade una aserción carente de sentido.

Es una recta perpendicular que va desde el vértice a la base y divide a ésta en dos segmentos.

Otro 10,0% de las respuestas incorrectas considera que la base de un triángulo es única. Son ejemplos la respuesta del alumno H23, ya transcrita, y la del alumno H1:

Es la distancia que hay desde un segmento al punto más alto del triángulo.

En ambos casos se considera una orientación particular del triángulo de manera que la altura sea la relativa al vértice más alto y, lo mismo que el alumno H26, un 7,5% considera que el triángulo debe tener una orientación fija (la base es horizontal). Este alumno escribe:

Es la distancia del triángulo usualmente vertical o en la dirección de la gravedad.

Hay otro 10% que confunde altura con mediana o con mediatriz. Los alumnos H10 y H14 escriben:

Es la recta que divide a dicho triángulo a la mitad.

La recta que divide al triángulo en dos mitades desde uno de sus vértices hasta la mitad de uno de sus lados.

Un 5% confunde el concepto de altura de un triángulo con el teorema de la altura de triángulos rectángulos y, finalmente, los mismos porcentajes alcanzan las respuestas que utilizan el concepto de distancia, pero carente de sentido, o los de triángulos isósceles o equiláteros. Son ejemplos de estas respuestas de los alumnos H2 y H26 ya transcritas.

Reflexión: Entre las respuestas incorrectas encontramos aquellas que indican concepciones impropias desde el conocimiento previo, llamándole por ejemplo, medida, longitud, perpendicular, recta o semirrecta. Otras respuestas incorrectas carecen de sentido y reflejan el inadecuado reconocimiento del concepto. Hay un conocimiento previo, considerar una orientación particular del triángulo de manera que la altura sea la relativa al vértice más alto, que dificulta la percepción y el adecuado reconocimiento del concepto. Otra conocimiento previo incorrecto es el de considerar exclusivamente triángulos equiláteros, lo que lleva a confundir altura con mediatriz o mediana en triángulos no equiláteros. Prácticamente no se observa una evolución adecuada de sus percepciones iniciales mediante la docencia, ya que siguen cometiendo bastantes errores similares a los iniciales y no se producen coordinaciones entre las representaciones.

Sobre las relaciones métricas asociadas a un tetraedro inscrito en una esfera

El 75,8%, de los alumnos, responde que el tetraedro es regular y expresan razonamientos erróneos, que se basan exclusivamente en interpretaciones de sus percepciones visuales externas, que son erróneas, y no se dan cuenta de que la imagen que se presenta, por ser bidimensional, altera la forma real de un cuerpo de tres dimensiones. Considerando esta regularidad, basados en su imagen externa afirman que todas las aristas son iguales y sólo calculan las de la base horizontal. Son ejemplos de las respuestas de GT22 y T29:

Sí que es un tetraedro regular porque su base es un triángulo equilátero y la altura del mismo es el centro del propio triángulo, por lo que todas las aristas miden lo mismo, formando así cuatro triángulos equiláteros iguales.

Al tener de base un triángulo equilátero, es decir, con todos sus lados iguales, y cada una de sus caras al tener sus bases en uno de los lados de este triángulo equilátero de la base, estas caras laterales también serán triángulos equiláteros, además de por lo dicho ahora, porque el vértice de la figura está sobre la esfera y es perpendicular al centro del círculo, por lo que llegamos a la conclusión de que ACB está formado por cuatro caras, las cuales son todas triángulos equiláteros, por tanto, se trata de un tetraedro regular.

Sólo un 15,2% dibuja los croquis recomendados, pero los hacen mal porque están convencidos de su regularidad.

El 9,1% dice que el tetraedro no es regular e invoca que las alturas de las caras laterales y la horizontal son diferentes, pero no justifica el porqué de esta afirmación. La aserción del alumno T21 es un ejemplo de esto, pero no calcula las alturas:

No es regular porque las alturas de ABC y AFC son diferentes.

Parece una opinión no fundamentada más que otra cosa. Sin embargo los alumnos T1 y T7 sí que fundamentan sus respuestas:

AFCB no sería un tetraedro regular, ya que sería irregular debido a que se "meten" como si fuera un pico.

No es regular porque se encuentra a la mitad de la esfera, así es que está achatado.

Un 3% de los alumnos no se pronuncia, aunque hace bien los cálculos y obtiene que las longitudes de la aristas laterales son menores que las del triángulo AFC. Sin duda, sus cálculos contradicen sus percepciones visuales y esto les impide pronunciarse al respecto porque anteponen sus percepciones visuales a los cálculos que han realizado (Clemens & Battista, 1992).

De las respuestas erróneas, aproximadamente la mitad hace la afirmación sin justificación alguna o por medio de alguna justificación falsa, pero que tiene cierto sentido. Así, el alumno T31 escribe:

Sí es un tetraedro regular porque todas sus caras son iguales, son triángulos inscritos en el círculo máximo de centro O y los vértices están inscritos en la esfera.

Sin embargo, la otra mitad de las respuestas encierran contradicciones en sí mismas aserciones disparatadas. La respuesta de T22 es un ejemplo:

Se trata de un tetraedro regular pues si la base es un triángulo equilátero, sus lados también lo serán, por tanto, afirmamos que es un tetraedro regular. Además de que el vértice B es perpendicular a O, por lo que el dicho vértice B se encuentra en el punto medio del tetraedro.

Reflexión: Parece que las visualizaciones externas no permiten unas representaciones del modelo real debido a que la mayor parte de los alumnos no progresan en sus percepciones erróneas y éstas les impiden construir representaciones que sean fieles al modelo real. Para ellos, lo que perciben es rigurosamente cierto y anteponen las imágenes visuales al razonamiento. Esto les impide distinguir elementos perpendiculares, diferencias de longitudes y de áreas (mayores o menores), comparación de ángulos, etc. En suma, estas percepciones visuales afectan negativamente al aprendizaje de los conceptos de Geometría. También se percibe en sus respuestas que no han aprendido el lenguaje específico de esta matemática y, por tanto, no han adquirido la competencia lingüística.

6. Conclusiones

En lo que sigue, se redactan algunas conclusiones con el referente de los objetivos planteados al principio de la investigación y los datos observados.

En relación al primer objetivo de investigación, podemos afirmar que las concepciones previas de los alumnos influyen notoriamente en la adquisición de los conceptos, tanto en sus percepciones como en el desarrollo de representaciones internas. Se observa que las percepciones que manifiestan tener los alumnos durante la docencia no evolucionan lo que cabría de esperar, ni mediante la misma, ni mediante el estudio personal. Así, hemos comprobado que, a veces, las percepciones afectan negativamente al aprendizaje de los conceptos aquí revisados, pues se desarrollan representaciones internas incorrectas y las consecuentes representaciones externas no se corresponden con un adecuado aprendizaje. Las percepciones sobre los objetos se manifiestan en las definiciones que verbalizan los alumnos, pero estas definiciones no se corresponden con el objeto que tienen que definir o se refieren a elementos integrantes de los mismos. Por ejemplo, se identifica ángulo con arco o con su amplitud,…, circunferencia con línea; mediatriz con punto medio; bisectriz con línea; altura con medida, longitud, perpendicular, recta o semirrecta; caracterización insuficiente de la recta tangente,…

Respecto al segundo objetivo, es claro que las percepciones inadecuadas o incorrectas de los objetos geométricos considerados y de los elementos que le configuran hacen que el alumno tenga serias dificultades en construir correctamente representaciones internas de los mismos y, como consecuencia de ello, cometen múltiples errores en la construcción de representaciones externas. A veces, interpretan u omiten ciertas características de los objetos y esto les impide discriminar lo correcto de lo incorrecto, y utilizarlos correctamente en situaciones que requieren establecer relaciones entre algunos de ellos, como han puesto de manifiesto las respuestas sobre las relaciones métricas del tetraedro y la esfera circunscrita.

Sobre el tercer objetivo, para que el alumno desarrolle la competencia lingüística necesaria para ser docente de los conceptos aprendidos, debe elaborar representaciones externas correctas y completas del objeto, que manifiesten el adecuado conocimiento del mismo. Sin embargo, se ha observado que los alumnos tienen serias dificultades para expresar verbalmente los objetos básicos tratados. Además, el carácter intuitivo que muchas veces (desde Educación Primaria) se asocia al objeto, y que caracteriza muchas de las percepciones que tiene el alumno sobre él, dificulta el aprendizaje y la expresión verbal precisa del concepto. La intuición los lleva a utilizar términos imprecisos, coloquiales o incorrectos para denominar los elementos básicos que configuran al objeto en cuestión, lo que da lugar a definiciones incompletas, incorrectas o imprecisas y, por tanto, están lejos de alcanzar una competencia lingüística adecuada para ser Profesores de Educación Primaria. En este sentido, proponemos realizar más debates, pero en grupos más reducidos para que puedan intervenir todos los alumnos, sobre todo, los alumnos que responden erróneamente.

Finalmente, ante la escasez de resultados positivos, se propone como metodología docente, elaborar y exponer secuencias de docencia propias de Educación Primaria en las que deban utilizar correctamente las definiciones de los conceptos. Se ha observado que en estas exposiciones, muchos alumnos, aún después de preparar su intervención, siguen cometiendo los mismos errores. En este caso, siguiendo una metodología docente dialógica, la corrección automática de los errores y la inmediata expresión de la definición precisa favorece la formación de representaciones internas más correctas. En este punto del proceso de enseñanza-aprendizaje, la comunicación es más fluida y más precisa, y se observa que el alumno tiene menos dificultades para construir representaciones externas, tanto verbales como gráficas, ambas más precisas. Por tanto, si observamos de forma conjunta todo el proceso de docencia que se ha llevado a cabo en el transcurso de esta investigación, consideramos que este trabajo aporta una metodología docente innovadora amplia y recurrente, que contribuye a la mejora de los aprendizajes y a la formación profesional de los futuros profesores de Educación Primaria.

Referencias bibliográficas

Acuña, C. & Larios ,V. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes. *ICME11.* Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/193

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives*. Greenwich, CY: Information Age Publishing Inc.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.

Clemens, D.H. & Battista, M.T. (1992) Geometry and spatial reasoning. In D.A. Grows (Edt.) *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning,* (pp. 420-464). Macmilian Pubkishing Company, New York. National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, (Colombia): Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Fernández, T (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, N. Climent, A. Estepa (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII. (XVII Simposio de SEIEM),* (19-42). Bilbao: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (2), 163-183.

Goldin, G.A. (2007). Representation in School Mathematics A Unifying Research Perspective. In J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.275-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, P. y J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge U.P.

Mariotti, A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM Mathematics Education* 45, 441-452

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology,* 121, 48-67.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and metonymies in mathematics learning* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sack, J. & Vazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: Children's non-convencional verbal representations. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A.

Sepúlpeda, (Eds.), *Proceeding of the Joint Meeting 32nd Conference of the international Group for the psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX,* 4 (pp. 217-224). Morealia, Michoacán, México: PME.

Sinclair, M.P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. In N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proccedings of the 27th PME International Conference*, 4, 191-198.

Stake, R. E. (2005). Cualitative Cases Studies *The sage handbook of Qualitative research*. Third edition. Nk Denzin & Y.S. Limcoln Editors. Londres.

Referencias de los autores

Tomás Ortega del Rincón. Universidad de Valladolid (España). ortega@am.uva.es

Cristina Pecharromán Gómez. Universidad de Valladolid (España). pecharroman@am.uva.es

Learning geometry concepts through visualization

Tomás Ortega, Universidad de Valladolid (España)

Cristina Pecharromán Gómez, Universidad de Valladolid (España)

In this paper, it is presented a research on way the students of the Primary Education Degree learn several basic definitions of Geometry. To do this, after knowing the students' preconceptions (which will affect their perceptions, Battista, 2007), it is developed a teaching method which parts from the graphic recognition of the geometry concepts, then it is further discussed with the students the elements shaping them, afterwards, representations with GeoGebra are made and finally, the concepts are institutionalized verbally (Mariotti, 2013). The results are analyzed in a sample of 202 students of the 2nd year of Primary Education Degree.

It is considered that in these learnings display is very important (Presmeg, 1997; Fernández, 2013). In order that an understanding of the concept may occur, the student must distinguish between an object and its representation. In addition, if we part from their graphic representation, as it is the case, the student must be able to interpret verbally the concept which is being represented (Duval, 1999).

In the first phase of research, data were collected in the discussions that were held on the following concepts: angle, circumference straight tangentially to a circle, perpendicular bisector, bisector, height of a triangle and finally implicit metric relations in a figure representing a tetrahedron and a sphere.

In a second phase, the data come from a questionnaire built ad hoc, which w then implemented after the two processes of teaching: in the first one, is emphasized the reading of geometric figures constructed interactively by the students using GeoGebra, and, in the second, already in the classroom, the concepts are institutionalized.

It has been observed that perceptions which the students have manifested during teaching do not evolve in the way it should be expected, nor even by means of itself, nor through personal study. It has been found that sometimes perceptions affect negatively the learning of the concepts here reviewed because incorrect internal representations are developed and the consequent external representations do not correspond to an appropriate learning.

Perceptions about objects are manifested in the definitions that students verbalize, but these definitions do not always correspond to the object they have to define or they refer to component parts thereof.

Students have serious difficulties to verbalize the basic objects treated. In addition, the intuitive nature which, from Primary Education, is often associated with the object and which characterizes the perceptions that the student has on himself, hinders the learning and the accurate verbal expression of the concept. Intuition leads them to use imprecise or incorrect colloquial terms to name the basic elements that make up the object in question, which results in incomplete, incorrect or imprecise definitions

Finally, this paper brings an extensive and recurrent innovative teaching methodology, which contributes to the improvement of learning and the vocational training of future teachers of Primary Education.