UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

El conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función: estudio de tres casos

Tesis que presenta

José Rafael Couoh Noh

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias área Matemática Educativa

Directora de tesis: **Dra. María Guadalupe Cabañas Sánchez**

Codirectores de tesis: **Dr. Salvador Llinares Ciscar**
Dra. Julia Valls González

Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México — Enero, 2015

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología** (CONACyT) por el apoyo financiero otorgado para realizar mis estudios de maestría y una estancia académica y de investigación en la Universidad de Alicante, España, que culminan con este trabajo de investigación.

Becario No. 491331

DEDICATORIA

A mis padres

Zoila y Benito

Por el amor demostrado y el apoyo incondicional para alcanzar mis metas, ello me ha permitido culminar esta etapa. Gracias por inculcarme desde la infancia la importancia del estudio, los amo.

A mis hermanos

Marissa, Carlos y Yenny

Por los momentos compartidos y el amor incondicional. Gracias Dios por darme a estos hermanos.

"Porque Jehová es bueno; para siempre es su misericordia, y su verdad por todas las generaciones". Salmos 100:5

"Jehová es mi luz y mi salvación; ¿de quién temeré? Jehová es la fortaleza de mi vida; ¿de quién he de atemorizarme". Salmos 27:1

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, al ***Dios Todopoderoso "Jehová"*** por darme la fortaleza y sabiduría para desarrollar esta investigación con la cual culminó una etapa más de mi formación profesional. Gracias por tantas bendiciones.

A mi directora de tesis, Dra. ***María Guadalupe Cabañas Sánchez***, por sus sabios consejos que ayudaron significativamente al desarrollo y culminación de esta investigación, enseñanzas que indudablemente contribuyeron en mi formación académica y desarrollo personal; también por su apoyo incondicional para concretar mi estancia académica y de investigación en la Universidad de Alicante, Alicante, España. Gracias doctora Guadalupe por compartirme su experiencia y conocimientos en nuestra disciplina, la admiro, un ejemplo a seguir.

A mi codirector, Dr. ***Salvador Llinares Ciscar***, por darme la oportunidad de involucrarme en su línea de investigación en la Universidad de Alicante, su asesoramiento y grandes enseñanzas que forjaron el rumbo de este estudio. Gracias doctor Salvador por su apoyo incondicional.

A mi codirectora, Dra. ***Julia Valls González***, por sus sabios consejos y exigencias en el desarrollo de esta investigación. Su apoyo fue fundamental para contactar a los participantes de España. Gracias doctora Julia por su acompañamiento en esta etapa de mi formación profesional.

A mis sinodales, Dr. ***Armando Morales Carballo*** y Dr. ***Javier Lezama Andalón***, por las sugerencias realizadas que contribuyeron en fortalecer esta investigación.

A los investigadores que colaboraron en la asesoría y revisión de la tesis, en diferentes etapas, al Dr. ***Carlos Miguel Ribeiro***, Dr. ***Jesús Enrique Pinto Sosa*** y Dra. ***Jeannette Vargas Hernández***. Gracias por las acertadas observaciones.

A los profesores que participaron en este estudio, ¡gracias ***Armando***, gracias ***Joan***, gracias ***Mauro***!, sin su apoyo no hubiese sido posible su desarrollo.

A mis profesores de la maestría, ***Guadalupe Cabañas***, ***Catalina Navarro***, ***Celia Rizo***, ***Sugey Maldonado***, ***Flor Rodríguez***, ***Miguel Díaz,*** ***Jesús Romero***, ***Luis Campistrous*** y ***Crisólogo Dolores***, quienes con sus enseñanzas contribuyen a mi formación profesional y desarrollo personal.

A los investigadores del Departamento de Innovación y Formación Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Alicante, España, por sus enseñanzas y consejos. En especial a la Dra. ***Ceneida Fernández Verdú*** por compartirme su experiencia en nuestra disciplina.

Al Dr. ***Dante Covarrubias Melgar***, ***Victoria Gutiérrez***, por el apoyo brindado durante mis estudios de maestría.

A mi amiga ***Angélica Gálvez*** por su amistad sincera e incondicional, comprensión, consejo y motivación en los momentos más difíciles de mi vida. Gracias por todo, te aprecio mucho.

A ***Luis Cabrera*** por sus consejos, sugerencias y cuestionamientos que motivaron la reflexión en esta investigación.

A mis compañeros de la maestría, generación 2012-2014, ***Ivón García***, ***Luz Reyes***, ***Karen Calderón*** y ***Bartolo Ponce***, por los momentos que compartimos.

A mis amigos y colegas de Yucatán, que a pesar de la distancia mantuvimos comunicación, a ***Flory Várguez***, ***Nayky Chan, Yenny Bonilla***, ***Benjamín Chan*** y ***Edwin Can***.

A todas aquellas personas que me han brindado una amistad sincera.

¡Gracias!

Sinceramente: **José Rafael Couoh Noh**

ÍNDICE

CONTENIDO **PÁG.**

Resumen

En este documento se exponen los resultados de un estudio que se planteó como objetivo determinar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza. El modelo teórico que se usa para determinar el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) puesto de manifiesto por el profesor es el planteado por Ball, Thames y Phelps (2008). Los participantes fueron tres profesores de matemáticas, dos de España y uno de México. Los datos se obtuvieron a través de una entrevista semiestructurada que contempló: datos personales del profesor, el aula de clases, la planificación del profesor sobre el concepto de límite al infinito de una función y la del investigador respecto al mismo concepto. Los resultados evidencian que el profesor de matemáticas usa elementos del MKT para tomar decisiones y justificar la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

Abstract

In this document the results of a study, proposed as an aim to determine the knowledge that puts into action the Math Professor in the planning concept of the infinite limit of a function for teaching. The theoretical model used to determine the *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) revealed by the teacher is the one planted by Ball, Thames and Phelps (2008). The participants were three math professors, two from Spain and one from Mexico. The data obtained through a semi-structured interview that contemplated: Professor personal data, the classroom, the planification of the Professor about the concept of infinite limit of a function and the researcher, about the same concept. The results show that the Math Professor uses elements from MKT to take decisions and justify the planning of the teaching concept of the infinite limit in a function.

Introducción

En este documento se reportan los resultados de una investigación que examinó el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza. El interés por desarrollar este estudio refiere a la propia experiencia docente, convencidos del importante papel que desempeñamos como profesores de matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos, y la necesidad de determinar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función, ya que determina el aprendizaje de los estudiantes. Por ello, esta investigación es relevante y pertinente para y en los programas de formación de profesores de matemáticas y actualización docente.

Para el desarrollo de este trabajo utilizamos el modelo teórico *Conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT) propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008), el cual nos permitió determinar y clasificar el conocimiento que moviliza el profesor de matemáticas en la planificación del tópico para su enseñanza.

En el estudio participaron tres profesores de matemáticas, dos de secundaria de España y uno del Nivel Superior de México. La investigación se desarrolló en España en el contexto del Bachillerato de la Comunidad Valenciana (estudiantes de 16 a 18 años) y en México en el Nivel Superior, en particular, en el contexto de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (estudiantes de 18 años en adelante). Los datos se obtuvieron a través de una entrevista semiestructurada que involucró los aspectos siguientes: datos personales de los participantes, el aula de clases, la planificación del profesor sobre el tópico límite al infinito de una función y la planificación del investigador respecto al mismo tópico. El análisis de los datos se realizó en tres fases: Generación de unidades de análisis, agrupación de las unidades de análisis en los subdominios del MKT y determinación del conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

El reporte de la investigación se presenta en cinco capítulos. El primero refiere a la revisión de la literatura científica donde se exponen aspectos relacionados con la práctica profesional del profesor, el conocimiento profesional, el programa de estudios para establecer el nivel educativo donde es objeto de estudio el concepto de límite al infinito de una función y la delimitación del objetivo de la investigación. El segundo, contiene el marco teórico que sustenta nuestro estudio y culmina con la pregunta de investigación. En tanto, en el capítulo tres se detalla el diseño de la investigación e involucra los aspectos siguientes: El contexto y los participantes, el guión de entrevista, el desarrollo de la entrevista y las fases involucradas en el análisis. Luego, en el capítulo cuatro se reportan los resultados del conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función. Por último, el capítulo cinco presenta las conclusiones del estudio, en donde se da respuesta a la pregunta de investigación.

CAPÍTULO I.

Problemática de investigación

CAPÍTULO I. Problemática de investigación

Los sistemas educativos se han sometido a reformas en sus planes y programas de estudio a través del tiempo. Como consecuencia se han implementado programas de capacitación y actualización dirigido a los profesores de las distintas áreas que comprenden estos planes de estudio, sobre enfoques de enseñanza; elaborado libros de texto y materiales de enseñanza; e introducido nuevas tecnologías en el aula de clase. Sin embargo, el nivel de desempeño alcanzado por los estudiantes en su mayoría, se ubica por debajo del deseado, tal como se evidencia en los resultados de pruebas internacionales, como los de PISA (Pastrana, 2012). Lo anterior se puede explicar ya que las estrategias planteadas no alteran de manera apreciable el elemento más determinante del aula: el profesor (Mochón y Morales, 2010), quien como representante institucional interpreta el currículum, lo pone en funcionamiento y encara dificultades tanto sobre los procesos de reforma como con el contenido y métodos de enseñanza entre otros aspectos (Cabañas-Sánchez, 2011).

En esta investigación analizamos el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. Este conocimiento se encuentra normado (condicionado) por la práctica profesional del profesor. Diversas posturas se han adoptado en Matemática Educativa (ME) respecto a la práctica profesional, por ello se describen algunas de ellas en el primer apartado de este capítulo. Por la naturaleza de la investigación, también se revisaron algunos estudios focalizados en indagar acerca del conocimiento profesional del profesor, y con base en ello adoptamos una postura, en el segundo apartado. En el tercero, se describen algunos aspectos del sistema educativo de España y México, países en los que se realizó la investigación; así también, se analizan los programas de estudio, a fin de identificar el nivel educativo en el que es objeto de enseñanza el concepto de límite al infinito de una función. Dado que el conocimiento matemático para la enseñanza del tópico límite al infinito de una función se analiza a partir de las planificaciones, se revisan en el apartado cuatro algunas propuestas de enseñanza en torno a este concepto. Finalmente, en el quinto apartado, se presenta el problema y objetivo de investigación.

I.1. La práctica profesional del profesor

La ME estudia los fenómenos didácticos asociados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar. Las investigaciones desarrolladas en este campo tienen como fin último contribuir en la mejora de esos procesos. En ese marco se han desarrollado investigaciones interesadas en el estudio de errores y dificultades que exhiben los estudiantes con determinados conceptos matemáticos, en particular del Cálculo (e. g. Tall, 1990; Artigue, 1995; Gücler, 2013; Cornu, 1991), propuestas metodológicas (e. g. Morales, 2013; Premier y Lazarte, 2009) y estudios epistemológicos (e. g. Medina, 2000). No obstante, pocos se han centrado en el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Particularmente, en México, son escasas las investigaciones realizadas en esta línea (Pinto y González, 2008).

En las últimas dos décadas se ha reconocido como una problemática de investigación en el campo de la ME y se ha estudiado desde diferentes enfoques y marcos teóricos o conceptuales. Estudiar al profesor de matemáticas, a través de diferentes marcos conceptuales permitiría comprender, entre otras cosas, cómo construye los significados matemáticos, los transforma y los representa en su práctica docente, tal como lo sostienen Pinto y González (2008). Por su parte, Gavilán, García y Llinares (2007b) reconocen al menos cuatro enfoques desde los cuales se estudia la práctica del profesor: El cognitivo, el antropológico, la teoría de situaciones didácticas y el sociocultural.

Desde un punto de vista cognitivo *"la práctica del profesor no son sólo las cosas que los profesores hacen (planificar, evaluar, interactuar con los estudiantes) sino también las cosas que piensan, conocen, creen sobre lo que ellos hacen"* (Simon y Tzur, 1999, citado en Gavilán et al., 2007b; p. 158). Desde esta perspectiva, el análisis se realiza con la herramienta teórica denominada "informe de la práctica" que consiste en caracterizar las ayudas que proporciona el profesor a sus estudiantes en el proceso de aprendizaje de un contenido matemático.

Respecto del punto de vista antropológico *"el profesor asume el papel de director del proceso de estudio de las matemáticas entendido como un proceso social articulado a través de diferentes momentos didácticos considerando la influencia de las restricciones institucionales en el desarrollo de praxeologías didácticas"* (Chevallard, 1999, citado en Gavilán et al., 2007b; p. 158).

Por otra parte, desde la teoría de las situaciones didácticas la práctica del profesor se caracteriza mediante las clases ordinarias, donde las técnicas de enseñanza utilizadas por el profesor son fundamentales para comprender sus acciones (Gavilán et al., 2007b).

Desde el enfoque sociocultural, Gavilán et al. (2007b) sostienen que el análisis de la práctica se centra en modelizar cómo el profesor crea en su aula escenarios que favorecen la modificación de las maneras de participar de los estudiantes, en el desarrollo de la actividad matemática, para darle significado a las nociones matemáticas individualmente. Una manera de comprender la práctica del profesor, desde este enfoque, implica centrarse en dos aspectos: 1) identificar los instrumentos de la práctica que el profesor emplea en la realización/planificación de sus tareas, es decir, el tipo de problemas presentados a los estudiantes y cómo están organizados, y los modos de representación (sistemas de símbolos) que utiliza, y; 2) caracterizar cómo el profesor usa dichos instrumentos[1]. Así, *la práctica profesional del profesor se ve como el conjunto de actividades que genera cuando realiza las tareas que definen la enseñanza de las matemáticas y la justificación dada por el profesor* (Llinares, 2000, p. 110). Es decir, no se inscribe solamente en lo que sucede en el aula, sino que se conceptualiza desde una perspectiva más amplia, comunidad de práctica profesional donde se incluyen diversas tareas como tutorías, reuniones de seminario, de departamento, asistencia a actividades de formación, entre otros.

[1]Todo aquello utilizado por el profesor para la gestión de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tales como: el lenguaje hablado, los modos de representación simbólica, los materiales físicos, los diagramas, los símbolos convencionales, las tareas-problemas instruccionales, los materiales didácticos, etc., (Llinares, 2000).

La práctica profesional del profesor de acuerdo con Llinares (2000) es analizada desde dos perspectivas principales: sociocultural[2] y cognitiva. La primera implica el estudio de la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje y la interacción en el aula; y la segunda, refiere al análisis de la relación del profesor con el contenido. La tabla 1.1., presenta un esquema conceptual para comprender la práctica del profesor de matemáticas desde ambas perspectivas.

Tabla 1.1. Esquema conceptual generado para comprender la práctica profesional del profesor de matemáticas (Llinares, 2000)

Perspectiva Sociocultural *Gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje/Interacción en el aula* * relación conocimiento/creencias-práctica * estructura de la lección * organización del contenido matemático en la enseñanza * regularidades vinculadas a la generación del significado * comunidad de práctica * instrumentos y tecnología * “transparencia”
Perspectiva Cognitiva *Relación profesor-contenido* * dominios de conocimiento * concepciones * integración cognitiva * dotar de significado (procesos interpretativos) * dominio experiencial * reconstrucción personal de los conceptos matemáticos como objetos de E-A * dilemas * agenda de enseñanza

De esta manera, se observa un interés creciente por el estudio de la práctica profesional del profesor de matemáticas desde diferentes enfoques y perspectivas teóricas, en el campo de la ME. En ese contexto, Oliveira (2009) afirma que los estudios sobre la práctica del profesor contribuyen a mejorarla y examinar su discurso ayuda a mejorar la comunicación en las aulas y potenciar el aprendizaje de los estudiantes (Güçler, 2013).

La investigación que se reporta se lleva a cabo desde una perspectiva cognitiva cuyo foco es el análisis de los dominios de conocimiento del profesor de matemáticas (Llinares, 2000).

[2] Gavilán (2005) denomina esta perspectiva como antropológica.

I.2. El conocimiento profesional del profesor

Diversas posturas se tienen respecto del conocimiento profesional del profesor de matemáticas. A continuación señalamos algunas:

- *"El conocimiento profesional se refiere al cuerpo de conocimiento y habilidades que son necesarios para funcionar con éxito en una profesión particular*" (Tamir, 1991, citado en Sosa, 2011; p. 13).
- El conocimiento del profesorado estriba en la asociación de todos los saberes y experiencias que tiene un profesor y de los que hace uso en su labor profesional, que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional" (Climent, 2002).
- *"El conocimiento profesional del profesor es una categoría que refiere al saber teórico y práctico del docente. Se trataría de un sistema más o menos complejo que se va constituyendo en función de saberes, creencias, destrezas, habilidades y capacidades"* (Compagnucci y Cardós, 2007, p. 2).
- El conocimiento profesional del profesor de matemáticas se construye a través de la reflexión y justificación de la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje (Llinares, 2000).

La mayoría de los estudios desarrollados en torno al conocimiento profesional del profesor de matemáticas se fundamentan en los trabajos pioneros de Shulman (1986, 1987). Este investigador sostiene que debe favorecerse, en la formación del profesorado, un dominio pleno del conocimiento del contenido asociado a la enseñanza, así como su desarrollo. Para ello, Shulman (1986) propone tres categorías del conocimiento del contenido: conocimiento del contenido de la materia; conocimiento didáctico del contenido; y conocimiento curricular. El primero se refiere al conocimiento del profesor respecto del contenido de la asignatura, tales como teoremas, axiomas y justificaciones del saber; el segundo, consiste en las representaciones, los ejemplos y las explicaciones utilizadas por el profesor para la enseñanza de un tópico y el reconocimiento de los errores y dificultades por parte de los estudiantes; y el tercero considera el planteamiento de un tema en los documentos oficiales para su enseñanza.

Debido a las exigencias curriculares de una reforma educativa en Estados Unidos en esa época, Shulman se ve obligado a desarrollar las categorías propuestas en 1986. Es así que en Shulman (1987) se reconocen los distintos tipos de conocimiento[3] que debería tener el profesor de matemáticas para desempeñar su labor docente: Conocimiento del contenido, conocimiento didáctico general, conocimiento del currículo, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y de sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. Shulman (1987) reconoce que entre estas categorías, adquiere particular interés el conocimiento didáctico del contenido porque identifica los cuerpos de conocimientos distintivos para la enseñanza, es decir, representa la mezcla entre el conocimiento de la materia y de la didáctica por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses y capacidades de los alumnos, y se exponen para su enseñanza. Es así que, el conocimiento didáctico del contenido es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo. Shulman (1987) destaca cuatro fuentes principales de conocimiento base para la enseñanza:

1. Formación académica en la disciplina a enseñar.
2. Los materiales y el contexto del proceso educativo institucionalizado (por ejemplo, los currículos, los libros de texto, la organización escolar y la financiación, y la estructura de la profesión docente).
3. La investigación sobre la escolarización; las organizaciones sociales; el aprendizaje humano, la enseñanza y el desarrollo, y los demás fenómenos socioculturales que influyen en el quehacer de los profesores.
4. La sabiduría que otorga la práctica misma.

Algunas investigaciones se han centrado en el análisis del conocimiento didáctico del contenido (e. g. Pinto, 2010; Pinto y González, 2008) para determinar las concepciones de los profesores de estadística y establecer los conocimientos que tienen sobre estrategias, representaciones instruccionales, procesos de aprendizaje, errores y dificultades de sus

[3] Denominado como conocimiento base para la enseñanza.

alumnos en la representación gráfica. Con base en el conocimiento didáctico del contenido, Ball, Thames y Phelps (2008) plantean un modelo que denominan "Conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT) el cual refiere al conocimiento matemático necesario para la enseñanza de las matemáticas. La contribución de estos investigadores radica en considerar dentro del modelo, el conocimiento especializado del contenido que se refiere al conocimiento que deberían tener los profesores dedicados a la enseñanza de las matemáticas. Nuestra investigación se sustenta en este modelo del MKT que se describe en el capítulo 2, ya que al estar interesados en analizar los conocimientos que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación para la enseñanza de un tópico en particular, desde una perspectiva cognitiva, nos centramos en comprender la relación profesor-contenido enfocándonos en los dominios de conocimiento (Ver figura 1.1). Este tipo de estudios va encaminado al diseño de procesos de formación de profesores de matemáticas (Rojas, Flores y Carrillo, 2013).

I.3. El concepto de límite al infinito de una función en los programas de estudio de España y México

España

El sistema educativo español está estructurado en cinco etapas. Una primera etapa no obligatoria, denominada Educación Infantil (de 0 a 6 años); dos etapas de carácter obligatorio y denominadas Educación Primaria (6-12 años) y Educación Secundaria Obligatoria (12-16 años), también conocida como E.S.O. Una cuarta etapa no obligatoria denominada Bachillerato (16-18 años) que da acceso a la Educación Superior (18 años en adelante). Existe un estatuto que rige la educación en todo el país, sin embargo, cada una de las diecisiete Comunidades Autónomas que lo constituyen, tienen la facultad de realizar modificaciones en los planes y programas de estudio en función del contexto y sus propias necesidades. Las planificaciones de los profesores españoles que participan en esta investigación se enmarcan dentro del currículo de la Comunidad Autónoma Valenciana, en las materias Matemáticas I y II.

En el bloque 4 "Análisis" de Matemáticas I del currículo de Bachillerato de la Comunidad Autónoma Valenciana (Decreto 102/2008), bajo el epígrafe "Aproximación al concepto de límite y el estudio de discontinuidades", plantea los contenidos sobre el límite de una función (figura 1.1), contenidos en los que hemos centrado nuestro estudio.

4. Análisis.

Los contenidos que corresponden a este núcleo son:

Funciones reales de variable real. Clasificación y características básicas de las funciones elementales: Funciones lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, valor absoluto, parte entera, exponenciales, logarítmicas, circulares y circulares inversas.

Dominio, recorrido, continuidad, crecimiento y decrecimiento, extremos de una función.

Operaciones y composición de funciones

Aproximación al concepto de límite. Estudio de discontinuidades.

Derivada de una función. Derivación y continuidad. Aplicaciones geométricas y físicas de la derivada. Iniciación al cálculo de derivadas.

Extremos relativos en un intervalo.

Representación gráfica de funciones sencillas expresadas de manera analítica o gráfica, a partir del análisis de sus características globales y locales, que describan en algún caso situaciones reales.

Figura 1.1. El concepto de límite de una función en Matemáticas I del Bachillerato (Generalitat Valenciana: Decreto 102/2008, 2008)

En el curso de Matemáticas II por su parte, se plantea la enseñanza del límite de una sucesión, el límite de una función y el cálculo de límites, tal como puede apreciarse en la figura 1.2.

3. Análisis.

Los contenidos que corresponden a este núcleo son:

Límite de una sucesión. Límite de una función. Cálculo de límites.

Continuidad de una función. Tipos. Derivabilidad de una función. Interpretación geométrica y física. Propiedades elementales.

Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, producto, cociente y composición de funciones. Derivada de las principales familias funcionales. Diferencial de una función e interpretación geométrica. La función derivada. Teoremas de las funciones derivables.

Aplicación al estudio de las propiedades locales y la representación gráfica de funciones elementales. Optimización.

Primitiva de una función. Cálculo de integrales indefinidas inmediatas, por cambio de variable o por otros métodos sencillos. Integración de funciones racionales.

Integrales definidas. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas.

Figura 1.2. El estudio del tópico límite en Matemáticas II del Bachillerato (Generalitat Valenciana: Decreto 102/2008, 2008)

México

El sistema educativo mexicano por su parte, se estructura también en cinco etapas: Educación Preescolar (hasta los 6 años), Educación Primaria (6-12 años), Educación Secundaria (12-15 años), Nivel Medio Superior[4] (15-18 años) y Nivel Superior (18 años en adelante). La Educación Básica Obligatoria en México comprende desde la Educación Preescolar hasta la Educación Secundaria y se norma por la Ley General de Educación de la Secretaría de Educación Pública del país, donde se establece el fin de la educación, los derechos y las obligaciones de cada individuo inmerso en ella y la organización del sistema.

La planificación que se analiza del profesor mexicano, se enmarca en los programas de estudio de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAM-UAGro[5]), en donde se reconoce el estudio del tópico de límite en la unidad de aprendizaje Cálculo I"[6] (Figura 1.3).

Unidad 2. Límite y Continuidad

El objetivo de esta unidad es hacer que el alumno determine el dominio de una función, además de que entienda y maneje el concepto de límite.

Siendo capaz de aplicar este conocimiento a problemas de continuidad de funciones y al cálculo de discontinuidades de funciones y a su clasificación, esto se puede encontrar en [1], [3], [4], [5].

2.1 Funciones reales de variable real.
- 2.1.1 Graficación de funciones especiales
- 2.1.2 Dominio e Imagen de una función.
- 2.1.3 Operaciones de funciones (Suma, Producto y Composición)

2.2. Límite de funciones.
- 2.2.1. Definición intuitiva y formal de límite.
- 2.2.2. Propiedades del límite.
- 2.2.3. Ejemplos y Contraejemplos.

2.3. Propiedades de las funciones continuas.
- 2.3.1. Interpretación intuitiva y definición formal de continuidad.
- 2.3.2. Propiedades de continuidad.

2.4. Ínfimos y Supremos.
- 2.4.1. Cotas inferiores y cotas superiores de un conjunto
- 2.4.2. Axioma del supremo.

2.5. Los tres teoremas fuertes.

Figura 1.3. El estudio del concepto de límite de una función en Cálculo I de la UAM-UAGro (UAGro: Nuevo plan de estudios de la licenciatura en matemáticas, 2009)

[4] Se conoce como preparatoria o bachillerato, es muy diversificado debido a las salidas terminales que ofertan y capacitan al individuo para continuar con estudios profesionales o incorporarse al campo laboral.
[5] El profesor mexicano que participó en la investigación se encuentra adscrito a la UAM-UAGro.
[6] Asignatura obligatoria para los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas en la UAM-UAGro.

Con base en la revisión de los programas de estudio de ambos países, se reconoce que el concepto del límite al infinito de una función se articula desde la enseñanza del concepto de límite de una función y del límite de una sucesión. Es decir, aparece en los programas de estudio el contenido del límite, pero no aluden explícitamente al concepto del límite al infinito, límite finito (en un punto), límite infinito y límite al infinito en el infinito. Esto conlleva a que los profesores tengan que determinar la profundidad del tratamiento de los tópicos en la enseñanza. Desde nuestra perspectiva, consideramos una deficiencia de ambos programas de estudio que no se especifique los contenidos matemáticos a enseñarse y el nivel de profundidad con que deben abordarse.

I.4. Propuestas de enseñanza del concepto de límite de una función

Es relevante para la investigación determinar desde qué aproximación se establece la enseñanza del concepto de límite de una función. Al respecto, Valls, Pons y Llinares (2011) identifican dos aproximaciones, la dinámica y la métrica.

La aproximación dinámica se expresa como *"Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe* $Lim_{x\to a} f(x)$*, si cuando x se acerca al número a, sus imágenes f(x) se acercan a L"* (Valls et al., 2011, p. 326).

Mientras que la aproximación métrica (Valls et al., 2011), incorpora la notación épsilon-delta, esto es, "$\mathrm{Lim}_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$" (p. 326).

Desde el punto de vista didáctico, Duval (1993) sostiene que la formación[7] de conceptos matemáticos implica una coordinación de varios registros de representación semiótica. Respecto del concepto de límite, el registro numérico se apoya de tablas de valores, el gráfico mediante el uso de gráficas en los ejes cartesianos, el simbólico en la simbología matemática adecuada y el verbal, definiendo el concepto utilizando palabras

[7] De acuerdo con Duval (1993) la formación refiere a una comprensión conceptual del contenido representado.

coloquiales (Aquere et al., 2009). Sin embargo, la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo (Artigue, 1995).

Si bien se reconoce que es difícil hacer más simple conceptos complicados del Cálculo, si pueden desarrollarse experiencias más ricas basadas en contextos (Tall, 1990). Las investigaciones actuales relacionadas con la Didáctica del Cálculo proponen una aproximación más intuitiva y una metodología más activa para su enseñanza, así como la búsqueda de estrategias que contribuyan en una mejor comprensión por los estudiantes, ya que para ellos es un concepto árido, poco atractivo y demasiado abstracto (Engler et al., 2008). A este respecto, algunos investigadores se han dado a la tarea de realizar propuestas de enseñanza del concepto de límite de una función. A continuación se describen algunas:

1. *El significado de* $a/0$. Se trata de una propuesta didáctica sobre el concepto de límite infinito en el nivel superior en la que se usa como metodología la ingeniería didáctica (Camacho y Aguirre, 2001). Se realiza un análisis preliminar del concepto a través de los libros de texto de antaño para identificar el tratamiento del concepto, indagan sobre la concepción del profesor con la pregunta: ¿Qué significa para usted la expresión: $^{a}/_{0}$? y de los estudiantes mediante cuestionarios y problemas. La manera en la que se plantea la situación didáctica está fundamentada en la necesidad de prever las dificultades y los errores de los estudiantes e incorporarlas como un medio para la construcción de conocimiento. Esta experiencia adopta las dos aproximaciones, dinámica y métrica, del concepto de límite.

2. *Uso de espejos*. Esta propuesta didáctica tiene como objetivo mostrar una aplicación concreta del concepto de límite y fomentar el uso del lenguaje matemático para hacer referencia a una situación cotidiana (Bertoia, 2006). La propuesta se basa en la interpretación de un experimento de óptica. Consiste en colocar, de manera vertical, sobre una base dos espejos rectangulares de iguales dimensiones unidos por uno de sus bordes y un objeto sobre la base, y variar el ángulo formado por los dos espejos y observar cómo cambia el número de imágenes reflejadas. Con base en el experimento, los estudiantes determinan el

$\lim_{x\to 0} f(x)\ y\ f(0)$, donde $f(x) = \frac{360}{x} - 1$; identifican que $f(x)$ relaciona el número de imágenes obtenidas al formar un ángulo entre dos espejos (comunes, planos); y reflexionan sobre los valores obtenidos para $\lim_{x\to 0} f(x)\ y\ f(0)$. Esta propuesta está en la línea señalada por Tall (1990) e incorpora la aproximación dinámica del concepto de límite.

3. *Utilizando software dinámico*. Esta propuesta didáctica presenta una experiencia del concepto de límite de una función utilizando software y tiene como objetivo que los estudiantes construyan su conocimiento con base en la observación y el análisis de las tendencias de funciones (Clausse, 2007). A través, por ejemplo, del graficador “Winplot” se pueden analizar funciones: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas y por partes. Esta experiencia plantea la importancia de incorporar la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ya que los estudiantes se motivan en las tareas propuestas. La aproximación dinámica del concepto de límite se incorpora en esta experiencia.

4. *Uso de registros de representación semiótica*. Se contempla una situación didáctica del concepto de límite infinito de una función (Engler et al., 2008) y una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de límite de una función (Aquere et al., 2009).

   La **situación didáctica** diseñada se enmarca en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1993). En ella se consideran algunas dificultades de los estudiantes con el concepto de límite infinito y su objetivo es desarrollar habilidades para movilizarse de un sistema de registro de representación a otro (Engler et al., 2008). Contempla seis tareas relacionadas con funciones y con la noción de infinito en sentido positivo y negativo. La primera, usa el contexto *contaminación de pozos con un agente cancerígeno por el derrame de sustancias tóxicas*, donde se pide completar datos en una tabla de valores y analizarlos. La segunda, presenta tres funciones, donde hay que determinar el dominio más amplio de cada una, graficarlas y completar tablas de valores. La tercera, muestra la gráfica de una función y con base en ella se calculan algunos límites y cuestiona si son finitos o infinitos. Las tareas 4, 5 y 6 demandan graficar funciones con base en ciertas condiciones, por ejemplo, la gráfica ha de cumplir que: $\lim_{4^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{4^+} f(x) = -\infty$ y $x \neq 4$. Se incorpora la aproximación dinámica del concepto de límite.

La **propuesta didáctica** tiene como objetivo que los estudiantes interpreten información a partir de las representaciones algebraicas, numéricas, tabulares y gráficas del concepto de límite (Aquere et al., 2009). Está integrada por dos guías y un trabajo final. La primera, abarca aspectos relacionados con el concepto de límite finito y consta de siete ejercicios donde se trabajan representaciones algebraicas, tabulares y gráficas. La segunda, corresponde al concepto de límite infinito y en el infinito, consta de tres tareas, donde surge la idea de crecimiento indefinido de la función. El trabajo final, consta de nueve tareas, cuya resolución exige el uso de las representaciones algebraicas, numéricas y gráficas, así como la conversión entre ellas. La propuesta se plantea de esa forma por la importancia que tienen los errores en la construcción del conocimiento, así como las dificultades y el trabajo en equipo. En esta propuesta se utiliza la aproximación dinámica y métrica, pero se potencia la primera.

De manera general, las características observadas en las propuestas de enseñanza son las siguientes:

1. Predomina la aproximación dinámica del concepto de límite de una función.
2. Se otorga importancia a los errores y a las dificultades de los estudiantes con el tópico límite de una función.
3. Se favorece el uso de distintos registros de representación semiótica del concepto de límite de una función, pero no la conversión entre ellos.
4. Predomina el contexto intramatemático en el planteamiento de las tareas[8] del tópico límite de una función.
5. Se favorece un papel activo del estudiante en la construcción de su conocimiento.

[8] En esta investigación “tarea” y “actividad” se utilizan de manera indistinta.

I.5. Planteamiento del problema de investigación

Existe un interés de los expertos del área de la ME, por el estudio del concepto de límite de una función desde diferentes perspectivas, comenzando con el análisis de los errores y las dificultades que presentan los estudiantes hasta el diseño y la validación de propuestas de enseñanza en torno a este tópico. El interés refiere a que el concepto de límite es un tópico fundamental para la introducción de otros conceptos del Cálculo Diferencial e Integral y del Análisis Matemático (Couoh y Cabañas, 2013). Asimismo, existen investigaciones centradas en analizar el conocimiento profesional del profesor. Sin embargo, poco se sabe de trabajos enfocados en estudiar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. De ahí que reconozcamos su importancia y pertinencia de investigar al respecto ya que las decisiones del profesor inciden directamente sobre el proceso de enseñanza. En consecuencia, centrar la atención en sus acciones es fundamental a fin de tener una mayor comprensión de lo que está sucediendo en el aula de clase (Ribeiro, Carrillo y Monteiro, 2012). Por ello, en esta investigación, se plantea como objetivo:

> *"Determinar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del tópico límite al infinito de una función".*

Es decir, el foco de esta investigación es el análisis del conocimiento del profesor, en su carácter multifacético[9], para identificar el perfil de conocimiento puesto de manifiesto. Reconocer estos perfiles es importante porque dota de herramientas para su desarrollo profesional (Caddle y Brizuela, 2014).

La motivación para desarrollar la investigación se encuentra en la propia experiencia docente dado que estamos convencidos del importante papel que desempeñamos como profesores en la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos y en la necesidad de comprender el conocimiento que pone en acción el

[9] Contempla los seis subdominios del MKT.

profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función, ya que determina lo que aprenden los estudiantes.

Desde nuestra perspectiva, esta investigación es relevante y pertinente para y en los programas de formación de profesores de matemáticas y actualización docente, dado que se identifican los conocimientos que moviliza el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza.

Capítulo II.
Marco teórico

CAPÍTULO II. Marco teórico

Los estudios desarrollados sobre el conocimiento profesional del profesor, en nuestra disciplina, se sustentan desde diversos modelos teóricos que consideran, en su mayoría, el trabajo pionero de Shulman (1986). En esta investigación, hemos optado por el modelo teórico denominado "Conocimiento Matemático para la Enseñanza" (MKT[10]) de Ball et al. (2008), el cual se describe en el primer apartado. En el segundo se presentan algunas investigaciones fundamentadas en ese modelo. El conocimiento de matemáticas para la enseñanza puede estudiarse a partir de la resolución de las tareas matemáticas que realizan los profesores, las respuestas que proporcionan a los cuestionarios y/o a las entrevistas, la planificación de determinado tópico, entre otros. En particular, en nuestra investigación se analiza a partir de la planificación para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función, que por una parte proponen los profesores participantes y por otra el investigador. El diseño de estas planificaciones involucra diversos conocimientos que moviliza el profesor para potenciar el aprendizaje de los estudiantes, de allí que, en el tercer apartado, se presente la postura respecto a la planificación. Finalmente, en el cuarto apartado y como consecuencia de este marco teórico se indica la pregunta de investigación.

II.1. El conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

El foco de esta investigación es el análisis del conocimiento de matemáticas para la enseñanza que se moviliza en la planificación, de ahí que se haya fundamentado en el modelo del MKT de Ball et al. (2008). Este modelo hace referencia al conocimiento matemático necesario para llevar a cabo el trabajo de enseñanza de las matemáticas. Algunos investigadores afirman que el MKT ofrece la respuesta más prometedora a la antigua pregunta ¿qué tipo de conocimiento de los contenidos se necesita para enseñar bien las matemáticas? (Morris, Hiebert y Spitzer; 2009).

[10] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, "Mathematical Knowledge for Teaching".

El MKT es un refinamiento de las categorías propuestas por Shulman (1986) y es el resultado de la unión del conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido. Su estudio implica considerar las tareas de la enseñanza, las exigencias matemáticas de estas tareas y una comprensión de los contenidos del currículo escolar.

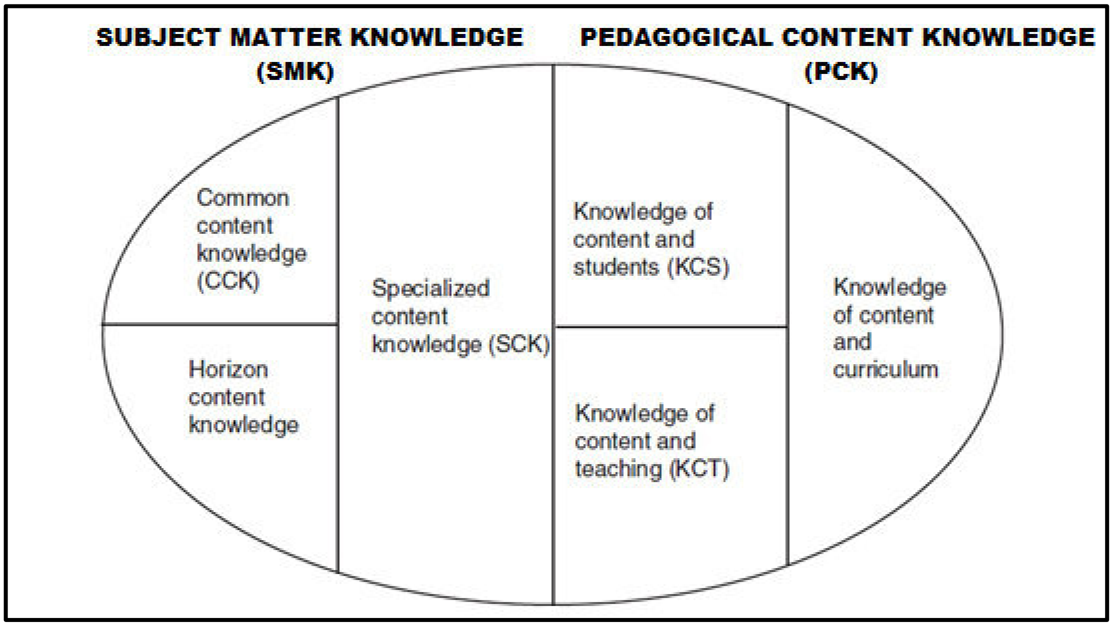


Figura 2.1. Dominios y subdominios del MKT. (Ball et al., 2008)

Este modelo (Figura 2.1.) se compone de dos dominios y de seis subdominios[11] que se consideran como necesarios para la enseñanza de las matemáticas. El dominio conocimiento del contenido involucra los subdominios conocimiento común del contenido (CCK), conocimiento del horizonte matemático (HCK) y conocimiento especializado del contenido (SCK). Por su parte, el dominio conocimiento didáctico del contenido involucra los subdominios: conocimiento de los contenidos y los estudiantes (KCS), conocimiento de los contenidos y la enseñanza (KCT) y conocimiento de los contenidos y el currículum (KCC).

A continuación, siguiendo a Ball et al. (2008), se describen los subdominios involucrados en el MKT:

[11] Se conservan las siglas correspondientes a la expresión inglesa para cada subdominio del MKT.

- *El conocimiento común del contenido (CCK)*. Son los conocimientos matemáticos y las técnicas utilizadas en una amplia variedad de entornos que no es exclusiva de la enseñanza. Refiere al conocimiento de las matemáticas que tienen las personas con cierta formación matemática, es decir, el que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional (Morris et al., 2009).

  El CCK en el tópico límite al infinito de una función hace referencia a la definición del concepto; a contenidos matemáticos relacionados con su tratamiento; al estudio de propiedades y teoremas; y al cálculo del límite en cualquier registro de representación semiótica, ya sea numérico, analítico y/o gráfico, en el sentido de Duval (1993), y que pudiera conocer cualquier usuario de las matemáticas que no necesariamente fuera un profesor.

- *El conocimiento especializado del contenido (SCK)*. Involucra los conocimientos matemáticos y las habilidades únicas para la enseñanza. Tiene que ver con conocimientos matemáticos como teoremas, definiciones, simbología matemática; las aplicaciones del concepto y los conocimientos de cómo enseñarlos. Las actividades del profesor exigen una única comprensión y razonamiento matemático; debe ser capaz de desglosar los conceptos matemáticos en sus partes constituyentes para hacer comprensible determinados aspectos del mismo a los estudiantes y/o para identificar el origen de las dificultades que tienen con los tópicos matemáticos. Ejemplos de las formas en que los profesores trabajan con las matemáticas en su forma descomprimida son: establecer la definición de un concepto haciendo uso de la simbología matemática, la forma de elegir, hacer y usar representaciones matemáticas de manera efectiva, y cómo explicar y justificar las propias ideas matemáticas. Conocer las matemáticas de este modo permite, a su vez, la planificación de la enseñanza del concepto atendiendo adecuadamente a los subconceptos, así como la evaluación de los efectos de la enseñanza en la adquisición del objetivo de aprendizaje por los estudiantes (Morris et al., 2009). Por tanto, las exigencias matemáticas para la enseñanza requieren un conocimiento matemático especializado que es innecesario en otros ámbitos.

En el concepto de límite al infinito de una función, el SCK es revelado por el profesor cuando reconoce las perspectivas dinámica y estática (métrica) de aproximación a la idea de límite, además de los procedimientos involucrados en el cálculo de límites que llevan al estudiante a establecer una respuesta correcta o incorrecta; y justifica la elección de determinados registros de representación semiótica para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función sustentándose en el contenido matemático. En este sentido, debe saber que el concepto de límite de una función se puede definir de tres formas: dinámica, métrica y óptima, desde el punto de vista de rigor de la matemática, elegir una de ellas y sustentarla. También, debe conocer que los procesos infinitos pueden estar asociados o no a una situación límite. Evidencia este conocimiento cuando alude al significado de los elementos que componen la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, tales como "lim", "$x \to \infty$", "$f(x)$" y "$a$".

- *El conocimiento del horizonte matemático (HCK).* Refiere a la relación que guardan los tópicos matemáticos enseñados con otros incluidos en el plan de estudios para establecer el fundamento matemático de lo que vendrá después y en consecuencia, ayudar en la toma de decisiones. Cuestiones relacionadas a este tipo de conocimiento son: ¿Puede tener consecuencias matemáticas conflictivas algo que se ha dicho de manera explícita o implícita? ¿Es esto interesante e importante desde el punto de vista matemático? ¿Hay alguna desviación (limitación) en las ideas matemáticas tratadas? (Pochulu y Rodríguez, 2012). Este conocimiento aporta perspectiva a los profesores para su trabajo, e incluye, por ejemplo, conocimiento de la historia de las matemáticas (Ortiz, Batanero y Contreras, 2012).

En el caso del concepto de límite al infinito de una función, este conocimiento se refleja cuando el profesor conecta los contenidos matemáticos relacionados con el tópico. Algunos conceptos matemáticos previos vinculados al concepto de límite al infinito de una función son los números reales, los intervalos, la función, el infinito, la tendencia de funciones, el límite de una función; y los contenidos posteriores comprenden a la derivada, la integral, el límite de sucesiones, la continuidad, entre otros. Un aspecto contemplado en el HCK del concepto de límite al infinito es la influencia del desarrollo histórico del concepto de límite en las decisiones del profesor para el tratamiento del tópico.

- *El conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS)*. Es el conocimiento que combina el saber acerca de los estudiantes y sobre las matemáticas. Los profesores prevén las respuestas de los estudiantes ante una tarea y las dificultades con ésta. Al elegir un ejemplo, predicen aquello que a los estudiantes les resultará interesante y motivador. Asimismo, deben ser capaces de escuchar e interpretar formas de razonamiento cuando se expresan usando el lenguaje verbal. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y el pensamiento de los estudiantes.

  El KCS se manifiesta en el concepto de límite al infinito de una función, cuando el profesor predice los errores y las dificultades que pueden encarar los estudiantes con las tareas propuestas en las planificaciones, por ejemplo, al resolver una tarea del tópico en el registro numérico. Asimismo, se evidencia cuando predice aspectos procedimentales en la resolución de las tareas planteadas. De igual forma, cuando discute el contexto utilizado en las planificaciones, indicando su pertinencia para el estudio del tópico con base en el interés de los estudiantes, por ejemplo, en la planificación del investigador se analiza la resolución de problemas bajo el contexto de las enfermedades epidémicas que involucran a la función logística. Contempla la manera en la que el profesor evalúa el aprendizaje de los estudiantes.

- *El conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT)*. Es la unión del saber sobre la enseñanza y el conocimiento acerca de las matemáticas. Muchas tareas matemáticas en la enseñanza demandan un conocimiento matemático para su diseño y un conocimiento pedagógico para secuenciarlo. Por ello, los profesores eligen los ejemplos para iniciar la lección y las tareas para profundizar en el contenido. Asimismo, evalúan las ventajas y desventajas de las representaciones que utilizan para enseñar una idea específica e identifican lo que ofrecen para la instrucción los diferentes métodos y procedimientos. Cada una de estas tareas requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y una comprensión de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje de los estudiantes.

En el concepto de límite al infinito de una función, el KCT es revelado por el profesor cuando alude a los apartados de las planificaciones, donde se reconoce el tipo de tareas propuestas para iniciar el estudio del tópico y su desarrollo; los registros de representación semiótica potenciados; las formas de trabajo, ya sea individual, en pequeños grupos, grupal, usando la calculadora o un software matemático; el tiempo destinado para el desarrollo de las tareas considerando el contexto real del aula de clases; y el papel del profesor durante la resolución de las tareas.

- *El conocimiento del contenido y el currículum (KCC)*. Refiere al conocimiento de la amplia gama de programas educativos y temas particulares en un determinado nivel, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con esos programas, y el conjunto de indicaciones y contraindicaciones para la implementación de un currículo o de los materiales del programa.

Respecto del concepto de límite al infinito de una función, el KCC se evidencia cuando los profesores justifican la planificación basándose en los documentos curriculares oficiales en que se enmarca, delimitando el momento escolar en que se estudia el tópico, el lapso sugerido para su análisis, el tiempo dedicado en el aula para su tratamiento, el enfoque propuesto, los libros de texto recomendados y las propuestas de enseñanza planteadas en la ME.

Los subdominios del MKT son fundamentales, en esta investigación, para determinar los conocimientos que moviliza el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

II.2. El MKT como ámbito de investigación

En el campo de la ME, se han desarrollado investigaciones relacionadas con el análisis del conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de un tópico matemático sustentándose en el modelo teórico del MKT. Revisamos algunos de estos estudios por la importancia de este modelo teórico en nuestra investigación, los cuales se describen a continuación:

- ***En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria*** (Mochón y Morales, 2010)

  El objetivo del estudio consistió en 1) diagnosticar los conocimientos pedagógico y matemático que tienen y ponen en acción los profesores de la escuela primaria para la enseñanza de sistema decimal y operaciones, cálculo mental y estimación, fracciones y decimales, y razonamiento proporcional; y 2) proponer un método que propicie su desarrollo. Para tal fin se diseñaron talleres centrados en propiciar la reflexión del profesor sobre su práctica docente para mejorarla. Para recolectar los datos se utilizaron cuestionarios abiertos y cerrados, entrevistas y observaciones de clase.

  Los resultados muestran un MKT de tipo instrumental, basado en procedimientos mecánicos y convicciones personales sobre la enseñanza. Asimismo, se evidencia un MKT de tipo conceptual muy limitado y un conocimiento pedagógico de tipo técnico, originado de los consejos y sugerencias por sus colegas. Con base en ello se diseñaron talleres que propiciaron el desarrollo del MKT de los participantes.

- ***Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo*** (Ortiz, Batanero y Contreras, 2012)

  Esta investigación tenía como propósito indagar sobre el conocimiento que tienen los profesores de educación primaria en España respecto al juego equitativo. Para determinar el CCK, se pidió a los participantes resolver dos problemas abiertos referentes al tópico; para el SCK, se solicitó identificar los conceptos matemáticos inmersos en estas dos tareas; mientras que para el KCS, se requirió reconocer las respuestas correctas e incorrectas a la tarea hecha por alumnos de educación primaria.

  Los resultados de la investigación sugieren reforzar la formación de los profesores de educación primaria en el área de la probabilidad en el SCK, dado que la mayoría fue incapaz de reconocer los contenidos involucrados en la tarea, tales como, la comparación de fracciones, la proporcionalidad, la aleatoriedad, el espacio muestral, la comparación de probabilidades, el juego equitativo, la esperanza matemática y la proporcionalidad inversa. Asimismo, fortalecer el KCS, dado que la habilidad para explicar los errores de los estudiantes fue insuficiente.

- ***Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido*** (Ribeiro, Carrillo y Monteiro, 2012)

  La finalidad del estudio fue indagar sobre las acciones, las cogniciones (creencias, conocimiento matemático para la enseñanza y objetivos) y el tipo de comunicación matemática que promueve una profesora al desarrollar el concepto de milésima en el aula de clase y las relaciones que establece con sus estudiantes. Los datos se obtuvieron mediante grabaciones de audio y video del aula de clase en el momento que el tópico es objeto de estudio.

  Los resultados ponen de manifiesto que la profesora evidencia los subdominios del MKT en su desempeño en el aula de clase, sin embargo, predominan el CCK, cuando define milésima; el HCK, al retomar décimas y centésimas para el estudio de milésima; y el KCT, al presentar un acetato a los estudiantes para estudiar el tópico.

- ***¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?*** (Climent et al., 2013)

  El objetivo de esta investigación fue identificar las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y los componentes KCS y KCT del *conocimiento matemático para la enseñanza* que un grupo de estudiantes para maestro (EPM) ponen en juego cuando observan un vídeo de una clase de tercer curso de Educación Primaria. Para la recolección de los datos, se pidió a los participantes realizar una planificación para la enseñanza del significado de la operación división. Después se les presentó el vídeo de la clase de una maestra que trabajó la división con sus alumnos de 3º de Primaria a partir de la resolución de problemas, esto es el reparto de doce lápices en dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho y nueve montones iguales; y en el que prima la comprensión del concepto frente a la realización de la división como operación.

  Los EPM reconocen la necesidad de incorporar en sus planificaciones a la división con residuo. Los resultados del estudio permiten afirmar que el uso de vídeos para la formación de los EPM es relevante ya que los acerca a la realidad del aula de clases permitiéndoles movilizar el KCS y el KCT y modificar sus creencias.

- ***Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales*** (Rojas et al., 2013)

  El interés de este estudio fue analizar el conocimiento matemático que pone en juego el profesor de primaria al enseñar los números racionales. Los datos se obtuvieron a partir de videograbaciones de clase y notas de campo.

  De la investigación se deriva que el profesor moviliza todos los subdominios del MKT en la enseñanza de las fracciones. No obstante, destacan el SCK y el

KCT; el primero, se observa cuando el profesor enseña la fracción en el contexto de relación parte-todo y cuando emplea los sistemas de representación literal, simbólica y concreta del tópico; y el segundo, cuando introduce el concepto de fracción a través de una situación de reparto equitativo y usa material tangible para facilitar la obtención de trozos o partes de objetos.

Las investigaciones examinadas, en su mayoría, han centrado su atención en el análisis de algún(os) subdominio(s) del MKT a fin de indagar sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Para ello, han utilizado tareas matemáticas, cuestionarios, entrevistas, problemas resueltos por los estudiantes, observaciones de clase y/o análisis de videos. Sin embargo, consideramos que existen otras herramientas que pueden ser empleadas para analizar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la enseñanza de un concepto matemático, como la planificación de un tema o lección.

II.3. La planificación

El profesor de matemáticas moviliza, en el proceso de planificación de secuencias didácticas, diversos aspectos del MKT (Mochón y Morales, 2010). Por ello interesa, en esta investigación, analizar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de un tópico en particular.

La planificación de la enseñanza es una de las competencias fundamentales del profesor de matemáticas que depende en gran medida de una descripción clara de los objetivos de aprendizaje (Morris et al., 2009). El profesor debiera considerar la naturaleza del tópico matemático, las características de los estudiantes, el contexto del aula de clase, las tareas para la construcción del conocimiento matemático y los objetivos curriculares.

En esta investigación, consideramos a la planificación un proceso de diseño y secuenciación de tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje cuyo propósito es generar experiencias en las cuales los escolares construyan su conocimiento gracias a una permanente negociación de significados (Gómez, 2006).

Así visto, en la planificación el profesor explicita una propuesta de enseñanza del tema o lección a desarrollar, en la que se anticipan y prevén sucesos y resultados, a la vez que organiza y orienta la práctica docente en un tiempo y espacio determinado. Por ello, el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas, para la enseñanza de un concepto, puede ser analizado a partir de la planificación.

II.4. Pregunta de investigación

Nuestra investigación se enmarca en la práctica profesional de un profesor de matemáticas, enfocándonos en el estudio de los conocimientos que pone en acción en la planificación de un concepto matemático, el de límite al infinito de una función. La pregunta que orienta el estudio es la siguiente:

> ¿Qué conocimiento pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función?

Esta interrogante se intenta responder a través del MKT, considerando los subdominios involucrados.

Esto implica comprender cómo organiza y orienta su práctica el profesor en un tiempo y espacio determinado, los teoremas, conceptos y definiciones, así como los significados que pone en juego en la enseñanza del tópico en cuestión, las anticipaciones que hace, de los resultados que espera, su conocimiento sobre los estudiantes, entre otros, así como de las justificaciones en ese contexto. Estos argumentos nos permiten aproximarnos a los conocimientos que hace explícito el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

CAPÍTULO III.

Diseño de la investigación

CAPÍTULO III. Diseño de la investigación

Esta investigación tiene por objetivo estudiar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas, en el marco de dos planificaciones sobre la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función: una planificación propia, y la otra, por el investigador. Para tal propósito, en el primer apartado contextualizamos el estudio y describimos a los participantes. Consideramos que nuestra investigación tiene un enfoque cualitativo, su alcance es descriptivo y es un estudio de casos, estos aspectos se describen en el segundo apartado. Mientras que en el tercer apartado, describimos el guión de entrevista utilizado para la recolección de los datos; y explicamos algunos aspectos relacionados con el desarrollo de la entrevista. Finalmente, en el cuarto apartado señalamos y ejemplificamos las fases del análisis de los datos, así como los elementos considerados.

III.1. Contexto y participantes

Con base al objetivo de nuestra investigación, analizamos el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas a través de dos planificaciones sobre el tópico. Esta forma de proceder la justificamos considerando que el profesor de matemáticas moviliza determinados conocimientos en su planificación y los reafirma o manifiesta otros cuando analiza una planificación externa, lo que permite tener una mejor aproximación al conocimiento que se pretende examinar.

Las planificaciones que utilizamos para el estudio del conocimiento profesional del profesor de matemáticas se enmarcan en el programa de enseñanza del Bachillerato de la Comunidad Valenciana, España y Nivel Superior de la UAGro, México. Es a partir de la revisión de programas de enseñanza en matemáticas que se reconoce, qué nivel educativo de cada uno de estos países es en el que se plantea su estudio de forma implícita, tal como se ha descrito en el primer capítulo.

Consideramos fundamental para nuestro estudio, el desarrollo de entrevistas semiestructuradas con cada participante para conocer sus justificaciones de las decisiones y elecciones que realiza en la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función, con base en dos planificaciones. La entrevista permite, a los profesores, una mayor libertad en sus respuestas y tener una mejor aproximación en su forma de pensar (Caddle y Brizuela, 2014). Estas argumentaciones permiten identificar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas.

Los participantes fueron tres profesores de matemáticas voluntarios, dos de secundaria de España y uno del nivel superior de México. De los profesores españoles, uno de ellos en activo y el otro está jubilado. El profesor mexicano se encuentra en activo.

El profesor español en ejercicio docente, que denominamos **PEA** (profesor español A), tiene 59 años de edad, es Licenciado en Ciencias Exactas. Actualmente, desarrolla su tesis doctoral respecto de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite de una función. Cuenta con 36 años de experiencia docente en la escuela secundaria. Ha asistido a varios cursos de actualización docente relacionados con la didáctica de las matemáticas. En el curso escolar actual (2013-2014), imparte las asignaturas de Matemáticas I, II y III, en grupos de refuerzo[12].

El profesor jubilado, que llamamos **PEB** (profesor español B), tiene 62 años de edad, se formó como Maestro de Enseñanza Primaria y como Licenciado en Ciencias Exactas. En la actualidad, desarrolla una tesis para obtener el grado de doctor en el ámbito de un experimento de enseñanza dirigido al estudio del concepto de límite de una función con alumnos del Bachillerato (estudiantes de 16-18 años). Respecto de su experiencia profesional, ha sido maestro de primaria durante veinte años y profesor de secundaria y universidad durante veintidós años. Ha realizado varios cursos de actualización profesional relacionados con la didáctica y enseñanza de las matemáticas.

El profesor mexicano, que nombramos **PMC** (profesor mexicano C), tiene 34 años de edad, es Licenciado en Matemáticas con especialidad en la enseñanza de la matemática

[12] Los grupos de refuerzo están constituidos por estudiantes que presentan más dificultades con los contenidos matemáticos en comparación con sus pares.

y la computación; Maestro y Doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa. Su tesis doctoral versó sobre el planteamiento de una estrategia metodológica para el tratamiento del concepto de límite al infinito de una función en el nivel superior (estudiantes de 18 años en adelante). Respecto de su experiencia profesional, fue profesor rural del Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE[13]) durante dos años, profesor de matemáticas en el Bachillerato de la UAGro por un periodo de 8 meses y actualmente, profesor de matemáticas de tiempo completo en la UAM-UAGro donde lleva 9 años impartiendo asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral y Análisis Matemático.

En síntesis, los participantes cuentan con amplia experiencia como profesores de matemáticas, cuya formación profesional está vinculada al área de la Matemática Educativa. En particular, se vislumbra una preocupación por mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, prueba de ello es el interés por estudiar el concepto de límite de una función en las tesis doctorales.

III.2. Caracterización de la investigación

El enfoque dado a esta investigación es de tipo cualitativo ya que pretendemos comprender un fenómeno social complejo, cuyo foco no está en medir las variables involucradas en dicho fenómeno sino en entenderlo (Hernández, Fernández-Collado y Baptista, 2006). Es decir, interesa analizar el conocimiento que ponen en acción los profesores de matemáticas para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función a partir de una entrevista semiestructurada y con base en las planificaciones.

El alcance del estudio que hemos realizado es descriptivo ya que busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de los tres participantes objeto de análisis (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). Por tanto, tratamos de describir los fenómenos tal cual aparecen en la actualidad (Bisquerra, 1989).

[13] En México, el CONAFE permite a los egresados de educación básica o nivel medio superior desempeñarse como profesores rurales, por al menos un año, con dos objetivos: Cobertura de la educación primaria y secundaria a zonas marginadas; y asignación de una beca al profesor rural para continuar con su formación profesional.

Por el tamaño de la muestra, tres participantes, se trata de un estudio de casos cuyo objetivo es analizar profundamente a los sujetos participantes, mediante entrevistas semiestructuradas y las planificaciones para la enseñanza del concepto de límite de una función, para responder al planteamiento del problema de investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2003).

Los resultados obtenidos son aplicables únicamente a la muestra y se fundamentan en un proceso inductivo cuyos datos aportan un punto de vista fresco, natural y holístico de los fenómenos (Hernández et al., 2003).

III.3. Instrumento de recogida de datos: la entrevista

Los datos de la investigación se obtuvieron mediante una entrevista semiestructurada. Para ello se elaboró un guión previo integrado por distintas preguntas vinculadas a los aspectos siguientes: *los datos personales de los participantes*; *el aula de clases*; *la planificación del profesor sobre el concepto de límite al infinito de una función y del investigador respecto al mismo tópico*. La tabla 3.1 muestra las preguntas primarias por cada apartado y el objetivo.

Tabla 3.1. Preguntas del guión de entrevista y objetivo de éstas por apartado

Apartado	Preguntas	Objetivo
Los datos personales de los participantes.	¿Cómo se llama? ¿Cuál es su formación académica? ¿Cuánto tiempo lleva impartiendo clases? ¿En qué nivel educativo da clases y qué asignaturas imparte? ¿Qué lo motivó a ser profesor de matemáticas?	Contextualizar los participantes del estudio.
El aula de clases: los estudiantes, la planificación y el programa de	¿Qué edad tienen en promedio sus estudiantes? ¿Cómo aprenden matemáticas los estudiantes? ¿Qué significa para usted el término “un buen alumno”? ¿Cuáles son las principales dificultades que presentan los estudiantes? ¿Qué consideraciones hace al planificar, respecto al tipo de estudiantes que tiene en el aula?	Conocer aspectos relacionados con el aula de clases, es decir, los estudiantes y

estudios.	¿Qué materiales utiliza para planificar su clase? ¿Qué aspectos plantea el currículum actual y cómo los incorpora en su planificación? ¿Cómo justifica el hecho de que en el currículum escolar, las matemáticas sean objeto de estudio? ¿Qué tipo de evaluaciones realiza? ¿Podría describirme una clase típica, es decir, su rutina diaria con los estudiantes? ¿Qué aspectos contribuirían al mejoramiento de la enseñanza de la matemática?	el programa oficial; y cómo éstos influyen en su planificación.
La planificación del profesor sobre el concepto de límite al infinito de una función.	¿Qué objetivo plantea el currículum respecto al concepto de límite al infinito? ¿Cuántos apartados tienen su planificación? ¿Qué es para usted el límite al infinito? ¿Qué relación tiene su definición del límite al infinito con su planificación? ¿A qué nivel educativo está dirigida su planificación? ¿Cuáles serían los objetivos principales de su planificación? ¿Cuáles son las actividades que plantea? ¿En cuánto tiempo está pensando desarrollar las actividades? ¿Cuál es el papel que desempeña en el aula durante el desarrollo de la lección y cuál el del estudiante? ¿Qué registros de representación semiótica favorece en la enseñanza de los límites al infinito? ¿Cómo verifica el aprendizaje de los estudiantes?	Conocer las justificaciones del profesor sobre su planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.
La planificación del investigador respecto del concepto de límite al infinito de una función.	¿Qué tan apegado se encuentra el objetivo de la planificación respecto al currículum español/mexicano? Se favorece el trabajo en equipo, un criterio de organización es que al menos un integrante tenga conocimientos consistentes en cálculo, ¿qué opina respecto de este planteamiento? ¿Considera adecuado el contexto presentado sobre enfermedades epidémicas en la planificación? ¿Por qué? ¿Considera importante favorecer los registros de representación gráfico, numérico, verbal y analítico del límite al infinito? ¿Por qué? ¿Qué actividades incluiría o eliminaría de la planificación? ¿Qué modificaciones realizaría en cuanto a formas de implementación de la planificación? ¿La planificación contribuye al aprendizaje del límite al infinito? ¿Por qué?	Conocer las justificaciones que realizan los profesores de matemáticas en el análisis de una planificación externa para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

III.3.1. Desarrollo de la entrevista

Previo a la entrevista los profesores facilitaron al investigador sus planificaciones sobre el concepto de límite al infinito de una función, a fin de comprenderlas y con base en ello elaborar el guión. El investigador por su parte, entregó a los profesores su planificación con el fin de que la analizaran previo a la entrevista (Anexo 1).

Las entrevistas se desarrollaron de manera individual con los profesores participantes, las cuales fueron audio grabadas con un dispositivo móvil. El número de sesiones con cada uno de los participantes fue diferente. Las entrevistas de los profesores españoles se realizaron en el mes de octubre de 2013 y enero de 2014, la del profesor mexicano se realizó en los meses de marzo y mayo de 2014. A continuación, se describen los aspectos tratados en las distintas sesiones en las que fueron entrevistados los tres profesores.

a) **Entrevista al PEA.** Se efectuó en cuatro sesiones. En la primera, se desarrollaron aspectos relacionados con los datos personales; y el aula de clase: los estudiantes, la planificación y el currículum. En la segunda, se trataron cuestiones relativas a la planificación del profesor para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. En la tercera, se plantearon preguntas vinculadas a la planificación proporcionada por el investigador y en la cuarta, se indagó de forma más profunda en las justificaciones del profesor sobre su planificación. El investigador realizó algunas observaciones de clase del PEA.

b) **Entrevista al PEB**. Se realizó en tres sesiones. En la primera, se consideraron cuestiones sobre los datos personales; y los aspectos del aula de clases: los estudiantes, la planificación y el currículum. En la segunda, se plantearon preguntas relacionadas con la planificación del profesor y del investigador para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función; y en la tercera, se profundizó en las argumentaciones del profesor sobre su planificación.

c) **Entrevista al PMC**. Se desarrolló durante tres sesiones. En la primera, se consideraron los datos personales y el aula de clase: los estudiantes, la planificación y el currículum. En la segunda sesión, se trataron cuestiones de la planificación del investigador para la enseñanza del tópico límite al infinito de una función; y en la tercera, se plantearon aspectos relacionados con la planificación del profesor, indagando de forma profunda en sus justificaciones.

Las entrevistas versaron sobre dos aspectos fundamentales: la planificación del profesor para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función y la planificación del investigador sobre el tópico. En esta indagación interesó, principalmente, conocer las justificaciones del profesor sobre las elecciones y decisiones que realiza para la enseñanza del tópico a partir de cada planificación, ya que ello nos permite aproximarnos al conocimiento que pone en acción en la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

III.4. Análisis de los datos

El análisis de los datos tiene como propósito determinar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. Para tal objetivo, identificamos en primer lugar, el conocimiento que pone en acción en su planificación del tópico y en segundo, el que moviliza mientras analiza una planificación externa sobre el mismo tópico. En la transcripción de las entrevistas se utilizaron distintas notaciones para diferenciar:

a) Los interlocutores (**I**: Investigador (Entrevistador), **PEA**: Profesor de matemáticas español A, **PEB**: Profesor de matemáticas español B, **PMC**: Profesor de matemáticas mexicano C);
b) Los distintos momentos de la entrevista (**…**: Pausa (intervalo de tiempo en silencio), **[]**: Texto transcrito sin claridad por ruido, **()**: Aclaración sobre aspectos mencionados por el profesor o el investigador), y;

c) Las planificaciones utilizadas (**PA**: Planificación del PEA, **PB**: Planificación del PEB, **PC**: Planificación del PMC y **PI**: Planificación del investigador) (Figura 3.1).

_I:_ _Como son procesos de aproximación… entonces._
PEB: _[Como hacen por interpolación]._
_I:_ _Yo… esperaría que utilicen algo aquí_ (PI: Actividad 6, ítem 2, inciso b)… _o sea que miren estas cantidades._
PEB: _Usen interpolación._

Figura 3.1. Simbología utilizada en la transcripción de las entrevistas

El análisis tomó en cuenta los materiales de enseñanza contemplados en las planificaciones del concepto de límite al infinito de una función: Tareas, libros de texto, artículos de investigación, programas de estudio, software matemático, equipo de cómputo y pizarrón.

El análisis contempló los conceptos matemáticos asociados a la definición del concepto de límite desde la aproximación dinámica y métrica. La aproximación dinámica involucra: los números reales, el plano cartesiano en R^2, la función, la asíntota horizontal, la tendencia de funciones y los límites laterales. En tanto que la métrica contempla: los números reales, el plano cartesiano en R^2, la función, los símbolos épsilon y delta. Asimismo, se consideraron los teoremas vinculados al estudio del límite, los cuales refieren a: propiedades de los límites, límites de funciones polinómicas y racionales, límite de una función radical, límite de una función compuesta, límite de funciones trigonométricas, funciones que coinciden en todo salvo en un punto, teorema del encaje o del emparedado, dos límites trigonométricos especiales y existencia de un límite.

El análisis de los datos se realizó a nivel descriptivo e involucró tres fases: 1) generación de unidades de análisis; 2) agrupación de las unidades de análisis de un mismo subdominio del MKT y 3) determinación del conocimiento matemático para la enseñanza sobre el concepto de límite al infinito de una función.

III.4.1. Fase 1: Generación de unidades de análisis

Esta fase tiene como propósito reducir el volumen de los datos y hacerlos más manejables. El análisis de esta fase se ha realizado en tres etapas: 1) identificación de las unidades de análisis; 2) preanálisis de los datos y 3) clasificación de las unidades de análisis en relación a los subdominios del MKT.

1. *Identificación de unidades de análisis*. Esta etapa se ha iniciado con la identificación de las justificaciones del profesor en torno a la planificación del concepto de límite al infinito de una función.

2. *Preanálisis de los datos*. Se ha realizado una primera inferencia del significado de la unidad de análisis. El concepto unidad de análisis, es una adaptación de la de Bodí (2006) y se entiende como el conjunto de frases o párrafos que ha usado el profesor a lo largo de la entrevista para trasmitir una idea vinculada a su conocimiento profesional para la enseñanza de un tópico matemático.

3. *Clasificación de las unidades de análisis en relación a los subdominios del MKT*. En esta etapa se realizó una primera aproximación al conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función lo que permitió situar las unidades de análisis, obtenidas en la etapa anterior, en los subdominios del MKT (Ball et al., 2008) descritos en el capítulo II: Conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido, conocimiento del horizonte matemático, conocimiento de los contenidos y los estudiantes, conocimiento de los contenidos y la enseñanza, y conocimiento del contenido y el currículum.

En la tabla 3.2 se muestra un ejemplo de unidad de análisis correspondiente al intercambio entre uno de los profesores y el investigador sobre las justificaciones que arguye de la planificación del investigador. En la primera columna se presenta, remarcada en negrita, la unidad de análisis. En la segunda se muestra la idea asociada a la unidad de análisis y en la tercera se señala el subdominio del MKT correspondiente a esta unidad.

Tabla 3.2. Un ejemplo de la fase 1: Generación de unidades de análisis

Unidad de análisis	Preanálisis	Subdominio
I: *¿Qué tan apegado se encuentra el objetivo de la planeación* (PI) *respecto al currículum español? ¿y por qué? O sea yo le di está planeación, ¿se puede implementar en el currículum español?* **PEA:** *Bueno en un principio sí.* **I:** *¿Por qué?* **PEA:** *se buscan tendencias de funciones y* ***las tendencias de funciones aparecen en el currículum español****... si podría implementarse*.	El PEA manifiesta conocimiento sobre los contenidos planteados en el programa de estudios.	Conocimiento del contenido y el currículum.

III.4.2. Fase 2: Agrupación de las unidades de análisis en cada subdominio del MKT

En esta fase, en primer lugar, se organizaron las unidades de análisis agrupadas a un mismo subdominio del MKT en la fase anterior. En segundo lugar, se examinaron nuevamente las unidades de análisis que habían presentado dificultades de asignación con el objetivo de resolver las diferencias surgidas en las primeras interpretaciones realizadas, por ejemplo, cuando la respuesta del profesor a las preguntas planteadas nos llevó a inferencias diferentes sobre su conocimiento de la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza. Los segmentos que no fue posible agrupar en ninguno de los seis subdominios fueron categorizados en uno hemos denominado “emergente”.

En la tabla 3.3 se muestra un ejemplo de esta fase considerando la planificación del profesor. En la primera columna se presenta el subdominio conocimiento del horizonte matemático. En la segunda se muestran ejemplos de unidades de análisis vinculadas a dicho subdominio. En la tercera se señala el preanálisis correspondiente a cada unidad y en la cuarta una aproximación al conocimiento matemático para la enseñanza que pone en acción el PEB en el subdominio mencionado.

Tabla 3.3. Un ejemplo de la fase 2: Agrupación de las unidades de análisis en los subdominios del MKT

Subdominio del MKT	Unidades de análisis	Preanálisis	Aproximación por subdominio al MKT del profesor
Conocimiento del horizonte matemático	1. ***PEB: He empezado con las funciones porque**... **son muy importantes**... **para el estudio del límite**.* ***I:** Claro... lo que está haciendo allá usted es... recuperar el conocimiento de función.* ***PEB:** Si... **es primordial**.* 2. ***I: ¿Por qué los estudiantes tienen que aprender límites al infinito**?* ***PEB: El concepto de límite es muy importante para**... **todo el cálculo ya Orton dice que uno de los mayores dificultades para la enseñanza de derivada**... **integrales es el concepto de límite que no se tiene un nivel interiorizado**... pero **no cabe la duda que ese concepto ayuda bastante para**... **derivar**... **integrar y todo eso**.* 3. ***I: El objetivo aquí de esta actividad*** (PB: Sesión 2, actividad 13)... *¿**es que miraran continuidad**?* ***PEB: No**... **el objetivo es que vieran unas funciones donde puede haber límite y se dan unos cortes en las funciones**... sin haber llegado a continuidad... **pero si luego hablamos de continuidad**... porque también estaba en el currículo.*	1. **El concepto de función es fundamental para el desarrollo del tópico límite de una función.** 2. **Se debe aprender el concepto de límite al infinito por su conexión con otros contenidos del Cálculo.** 3. **Introduce la noción de continuidad de una función, tópico posterior planteado en el currículum.**	***HCK.** Reconoce la complejidad del tópico límite al infinito de una función, cuya base es el concepto de función, sin embargo, considera la importancia de su tratamiento porque es fundamental para otros contenidos del Cálculo y Análisis Matemático, como continuidad, derivadas e integrales.*

III.4.3. Fase 3: Determinación del conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función

Esta fase se realizó en dos etapas. En la primera de ellas se consideraron conjuntamente los subdominios y las características obtenidas en la fase 2 con el objetivo de determinar el conocimiento que pone en acción cada profesor con relación a su planificación y a la del investigador. En la segunda etapa, tras un análisis conjunto de las características del MKT evidenciado por cada profesor en las planificaciones, se determinó el conocimiento que pone en acción a través de las justificaciones que presenta en la planificación del concepto de límite al infinito de una función y, en consecuencia, se dio respuesta a la pregunta de investigación planteada en el capítulo 2.

La tabla 3.4 presenta un ejemplo de la primera etapa de esta fase enmarcada en la planificación del investigador. La primera columna muestra los subdominios del MKT. La segunda se refiere a una aproximación al conocimiento matemático para la enseñanza que pone en acción el profesor en cada subdominio, mientras que la columna tres presenta una aproximación global del conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función puesto de manifiesto.

Tabla 3.4. Un ejemplo de la fase 3: Determinación del conocimiento matemático para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función

<table>
<tr><th>Subdominio del MKT</th><th>Aproximación al MKT del profesor por subdominio</th><th>El MKT movilizado por el profesor en el análisis de la planificación del investigador sobre el tópico</th></tr>
<tr><td>Conocimiento común del contenido</td><td>No se evidencia</td><td rowspan="4">En el análisis de la planificación del investigador, el PEA:

- CCK, SCK y HCK: No pone en acción éstos conocimientos. Consideramos que las preguntas planteadas en el guión de entrevista poco favorecieron su activación, porque se plantea de forma explícita el estudio del concepto de límite al infinito de una función mediante la aproximación dinámica y se vincula su estudio con la función logística, la asíntota horizontal y los máximos.</td></tr>
<tr><td>Conocimiento especializado del contenido</td><td>No se evidencia</td></tr>
<tr><td>Conocimiento del horizonte matemático</td><td>No se evidencia</td></tr>
<tr><td>Conocimiento de los contenidos y los</td><td>Reconoce limitaciones en la planificación del investigador para que los estudiantes se aproximen al concepto de límite</td></tr>
</table>

estudiantes	*al infinito de una función, las razones que arguye son: 1) La función utilizada plantea el estudio de un fenómeno que tiene un comportamiento similar en todos los casos, convergen rápidamente, lo que constituye un obstáculo de tipo didáctico y 2) el contexto manejado es adecuado, pero interesante sólo para algunos, aquellos cuya inclinación es la medicina. Esto lo lleva a proponer una tarea inicial relacionado con la función logística en su modo algebraico cuyo objetivo es determinar las estrategias utilizadas por los estudiantes para su resolución y partir de esos conocimientos previos para el estudio del tópico, el cual al ser muy amplio demanda tareas sobre distintos tipos de límite y casos donde no exista para desarrollar su comprensión.*	- *KCS: Reconoce limitaciones en la propuesta para que los estudiantes se aproximen al concepto de límite al infinito de una función, las razones que establece son: 1) la función utilizada plantea el estudio de un fenómeno que tiene un comportamiento similar en todos los casos, convergen rápidamente, constituyendo un obstáculo de tipo didáctico el cual provoca una idea errónea del infinito como algo finito y 2) el contexto manejado es adecuado, pero interesante sólo para algunos estudiantes. Esto lo lleva a proponer una tarea inicial relacionado con la función logística en su modo algebraico cuyo objetivo es determinar las estrategias utilizadas por los estudiantes para su resolución y partir de esos conocimientos para el estudio del tópico el cual, al ser muy amplio y complejo, demanda para su comprensión múltiples tareas.*
Conocimiento de los contenidos y la enseñanza	*Identifica desde el punto de vista del diseño, el logro de la construcción del concepto de límite al infinito de una función, las argumentaciones que exhibe son: 1) el uso y la conversión de los registros analítico, gráfico, numérico y verbal, 2) el uso de una función específica, y 3) el estudio gradual y progresivo del tópico. Sin embargo, debido a la naturaleza del concepto, contempla actividades sobre límites negativos y funciones que carecen de límite. Reconoce en su práctica docente una tendencia al uso del registro algebraico para la enseñanza del tópico. Respecto a formas de trabajo tiene en cuenta lo siguiente: equipos constituidos al azar dado que las competencias de cada integrante se complementan, tiempo considerable para la reflexión sobre la tarea y entrega de las actividades en hojas separadas.*	- *KCT: Identifica desde el punto de vista del diseño, el logro de la construcción del concepto de límite al infinito de una función, las argumentaciones que exhibe son: 1) el uso y la conversión de los registros analítico, gráfico, numérico y lenguaje coloquial, 2) el uso de una función específica, y 3) el estudio gradual y progresivo del tópico. No obstante, debido a la naturaleza del concepto, contempla tareas sobre límites negativos y funciones que carecen de límite. Reconoce desde su experiencia docente una tendencia al uso del registro algebraico para la enseñanza del tópico. En cuanto a formas de trabajo considera lo siguiente: equipos constituidos al azar dado que las competencias de cada integrante se complementan en el trabajo colaborativo, tiempo considerable para la reflexión sobre la tarea y entrega de las actividades*

Conocimiento de los contenidos y el currículum	*Sabe que el programa de Bachillerato de la comunidad valenciana de España plantea el estudio de las tendencias de funciones y la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función mediante el registro algebraico, por ello, la planificación del investigador es pertinente en ese nivel. Por su experiencia docente subestima el uso de otros registros de representación como el gráfico, planteados en el programa, para la enseñanza del tópico.*	*en hojas separadas para su análisis y discusión.* - *KCC: Admite su pertinencia en el Bachillerato de la comunidad valenciana de España dado que el programa plantea el estudio de la tendencia de funciones y la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función mediante el registro algebraico. Subestima el uso de los registros de representación gráfico y tabular para la enseñanza del tópico, propuestos en el programa de estudios.*

CAPÍTULO IV. Resultados

CAPÍTULO IV. Resultados

La investigación estudia el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función. Para tal propósito, se analizaron las justificaciones que presenta durante una entrevista, acerca de las elecciones que hace y decisiones que toma para la enseñanza del tópico. Las preguntas de la entrevista se orientan a indagar el conocimiento en cuestión, en el marco de dos planificaciones, una propia y otra planteada por el investigador. Las justificaciones del profesor en torno a estas planificaciones contribuyen en tener una mejor aproximación acerca del conocimiento que moviliza y en consecuencia dar respuesta a la pregunta de investigación, estos resultados se presentan.

IV.1. El conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del tópico límite al infinito de una función

Los resultados del estudio se exponen por casos y cada uno muestra el conocimiento puesto en acción por el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza, en consecuencia, se responde la pregunta de investigación planteada en el capítulo II.

IV.1.1. El conocimiento de matemáticas para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función: El caso del PEA

Las justificaciones del PEA sobre la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza, permitió reconocer la movilización de los siguientes subdominios del MKT: *El conocimiento común del contenido, especializado del contenido, del horizonte matemático, de los contenidos y los estudiantes, de los contenidos y la enseñanza, de los contenidos y el currículum*.

CCK: Conocimiento Común del Contenido

El CCK del MKT modeliza el conocimiento matemático que pone en acción el PEA, un profesor de matemáticas, en determinados momentos de su práctica profesional. Se analiza con base en el conocimiento que evidencia del contenido matemático a enseñar así como de la notación y términos matemáticos, y si reconoce cuándo los estudiantes dan respuestas incorrectas o un libro de texto da una definición imprecisa (e. g. Ball et al., 2008), también, si sabe a qué o hasta dónde llegar en un ejemplo o ejercicio (Sosa, 2011). En este sentido, se indagó el conocimiento que el PEA moviliza acerca de la definición del concepto de límite, del concepto de limite al infinito; de propiedades y teoremas articulados al tópico; y del cálculo del límite en cualquier registro de representación semiótica, ya sea numérico, analítico y/o gráfico, en el sentido de Duval (1993), desde la planificación y durante la entrevista.

Al preguntarle por la definición del concepto de límite al infinito, el PEA presenta un conocimiento de la definición formal planteada por Weierstrass, aunque lo hace a nivel descriptivo, entendemos que es debido a la entrevista. En ese proceso, alude a conceptos asociados al tópico (números naturales, infinito, sucesión), de su relación con estos (ver HCK) y de aspectos procedimentales.

En el marco de la planificación, el conocimiento que el PEA pone en acción sobre el tópico, se inscribe en la definición del concepto de límite al infinito y conceptos asociados (función, sucesión, límite, infinito, continuidad, discontinuidad, sucesión, límite de funciones, límite de una sucesión, límites laterales y límite puntual, entre otros), más que en la formación del concepto y su definición. Por cuanto a las actividades que la constituyen, las enfoca a trabajar con el límite de funciones: polinómicas (constantes, lineales, cuadráticas, etc.) especiales (racionales y radicales) y trascendentales (exponencial, logarítmica y trigonométrica) en el marco del registro gráfico y numérico, privilegiando este último. Este hecho se reconoce porque una mayoría de actividades sitúan a determinar o bien calcular límites (en el marco de conceptos como continuidad, discontinuidad, límite al infinito), a fin de obtener un número.

SCK: Conocimiento especializado de contenido

Se estudia a partir de la aproximación desde la que se plantea la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función y la justificación de dicha elección desde el punto de vista del rigor de la matemática. En ese marco, el PEA sabe que el estudio del tópico desde la aproximación métrica es poco útil para calcular su límite.

> ***PEA:*** ***La definición formal*** *también* ***tiene una dificultad escolar****...* ***puede servir para justificar que un límite es correcto o no****...* ***pero no ayuda mucho en su cálculo****... más* ***el entender una cuestión de intervalos****... de* ***entornos****... de* ***valor absoluto****...* ***es complejo****.*

Por ello en su planificación las actividades están centradas en una definición de este concepto, desde la dinámica, en la que se calculan valores para identificar la tendencia de la función y en consecuencia su límite.

> ***PEA:*** ***Calculamos valores y*** *si nos dan un valor...* ***si se va acercando a un valor finito****... le* ***decimos*** (al estudiante) ***que ese es el límite y si se va acercando a un valor*** *digamos* ***en positivo o en negativo****...* ***cada vez va aumentando****...* ***le damos un valor****...* ***de infinito positivo o negativo dependiendo del signo que tenga****... vamos* ***una cosa es la cuestión formal****...* ***y otra es la cuestión educativa****.*

HCK: Conocimiento del horizonte matemático

El HCK que moviliza el PEA, se estudia con base en las relaciones que evidencia reconocer, entre el tópico con otros conceptos en el mismo tópico; con otros que aparecen anteriores o posteriores a él, o con un contenido con otro más general o más específico, en las distintas etapas de escolarización, y; con otras áreas de conocimiento. El saber cómo se relacionan (Sosa, 2011), está implícito el papel que juega el *conocimiento curricular*, pues a través de éste, puede saber, de los distintos programas.

En este sentido, los datos dan cuenta que mientras el PEA describe el concepto de límite al infinito (durante la entrevista), se remite en primer término, a varios conceptos previos, como el de sucesión, seguidamente indica una de las relaciones que tiene con el tópico, en el marco de los números naturales, así como de formas de proceder.

> ***PEA:*** …el cálculo de ***términos de sucesiones*** y las ***tendencias de sucesiones*** son ***el camino por el que se inicia***… la ***idea del límite en al infinito***... Se calculan valores cada vez más grandes y después se hace un salto cualitativo y se pasa de números naturales al infinito con la "*x*", pero primero se empiezan con "*n*"…

También sabe que el concepto de límite al infinito de una función está relacionado con el concepto de continuidad y que es posterior a él.

> ***PEA:*** ***Eso*** (se refiere a las gráficas de la PA) *también* ***puede servir para continuidad*** *y discontinuidad… porque* ***allí las dos cosas van juntas*** (el límite de una función y la continuidad).

De otra parte, en su planificación, evidencia que en la enseñanza del tópico, articula conceptos previos (función, dominio de una función, rango de una función, sucesión, límite, límite de una función, etc.) a él, y posteriores como el de continuidad. En la entrevista, hace saber que su planificación está condicionada por una exigencia externa, el examen de admisión para acceder a estudios superiores en España. En estos exámenes, se demanda el cálculo de límites relacionados con L' Hôpital y el uso de la calculadora en la universidad.

> ***PEA:*** ***En la selectividad*** (examen de admisión para acceso a estudios superiores en España) ***no aparece ningún problema de límites que no sea por Hôpital****... tú en un momento determinado* ***debes dar unos instrumentos para que resuelvan límites... pero*** *en un momento determinado* ***el que interesa practicar para cumplir esa función es Hôpital****… ellos deben entender determinadas cosas ¿vale?… aprobar su asignatura y… aprobar aquello* (la selectividad)*... si no... se les cierran muchas puertas…* ***pero allí*** (en la selectividad) ***solo piden el Hôpital****... nunca ha aparecido un límite que no fuera Hôpital…* ***te ponen expresamente límite por el Hôpital****.*
>
> ***I:*** ***Potencia el uso de la calculadora****... ¿****verdad****?*
>
> ***PEA:*** ***Sí****...* ***la selectividad*** (se refiere al examen de admisión para acceso a los estudios universitarios en España) ***en España****…* ***ha ido modificándose y****...* ***la universidad acepta hasta calculadoras científicas****.*

En otro momento, el conocimiento que el PEA moviliza en este subdominio, se reconoce cuando alude a las dificultades (sin especificar cuáles) asociadas al desarrollo conceptual del límite, que lo torna complejo para su enseñanza.

> ***PEA:*** *Como profesor también* ***debo tener en cuenta que Arquímedes hizo aproximaciones de área pero nunca entendió el concepto****... que* ***Cauchy da una definición maravillosa de cada valor a medida que x se acerca a un número la función se acerca a otro y él tampoco entendió la idea formal de límite que después formalizó Weierstrass****... es decir...* ***intentar que un profe*** *en diez horas* ***resuelva una dificultad histórica que es compleja****...* ***es grande****.*

De cómo se relaciona el tópico con otras áreas de conocimiento, el PEA lo explicita al momento que se remite al contexto en que el investigador plantea en su planificación la enseñanza del tópico, a través de la función logística. Esto es, un contexto extramatemático.

KCS: Conocimiento del contenido y los estudiantes

El análisis de este subdominio del MKT, toma como base el conocimiento del PEA acerca de los procesos cognitivos de los estudiantes destinatarios de la planificación, ante determinadas tareas o situaciones de enseñanza sobre el tópico. Se caracteriza a partir de cómo el profesor predice que las tareas pueden o no, ser de interés a los estudiantes, por el contexto, de aquello que les será fácil o difícil (por los errores y dificultades que pueden encarar), así como de los posibles obstáculos de tipo didáctico y/o cognitivo que pueden manifestarse. Presentamos este conocimiento en el marco de cuatro aspectos que el PEA considera fundamentales: a) Interés que pueden manifestar los estudiantes para resolver las tareas de la planificación, por el contexto utilizado, b) Errores y dificultades de los estudiantes ante determinadas tareas, c) Su conocimiento sobre los procedimientos que pondrán en juego los estudiantes para resolver determinadas tareas, y; d) los obstáculos didácticos que pueden emerger.

a) *Interés del estudiante por las tareas debido al contexto usado*

El PEA considera que el contexto en que se proponen las tareas es importante, porque es una manera de motivar a los estudiantes a interesarse por resolverlas. A través de su experiencia docente reconoce que manifiestan un interés particular por tareas planteadas en inglés, de ahí que las propone en la enseñanza del concepto del límite al infinito.

> ***PEA:*** ***Eso*** (ejercicios redactados en inglés) ***lo he incorporado en los últimos años****… llevo no mucho dos o tres… es de un artículo de éstos* (véase Elia et al. (2009)) *de lo que he leído yo de límites… hay un grupo de griegos... que ellos tienen… vamos, tenían un artículo sobre límites y* ***ese era una cosa buena****... de hecho…* ***cuando ven*** (se refiere a los estudiantes) ***lo del inglés hasta les gusta****... vamos, que en algún momento determinado…* ***uno hasta****...* ***un día antes incorpora cosas****... eso* (los ejercicios redactados en inglés) *es de un artículo que yo he estado leyendo… para lo que hago de la tesis*.
> ***I:*** *¿Y qué tienen de particular?*
> ***PEA:*** ***Es una hojita que uno incorpora y gráficas****...* ***límites****.*
> ***I:*** ***De relacionar****.*
> ***PEA:*** ***Si****...* ***encima está en inglés****... hombre…* ***aquí se han enamorado*** (del inglés) ***últimamente****.*

Al momento de remitirse al contexto en que se plantean las tareas que componen la planificación del investigador, el PEA lo considera adecuado, aunque reconoce que sólo les resultarán interesantes a algunos estudiantes, pues muchos se inclinan por situaciones de otro tipo. Sin profundizar en el tema, considera que un contexto de interés podría ser el de las redes sociales, como el uso del teléfono.

> ***I:*** *¿****Está cerca de la realidad del estudiante*** *esto que estamos haciendo* (estudio del concepto de límite al infinito de una función usando el contexto enfermedades epidémicas que involucran a la función logística)*?*
> ***PEA:*** ***Si es un estudiante****...* ***que tiene aficiones****... por ejemplo…* ***a medicina sí****...* ***si es un ingeniero a lo mejor no****... sería mejor haber utilizado… el contexto de redes sociales*.

Otro contexto adecuado desde la perspectiva del PEA, es el de los registros de representación semiótica (en el sentido de Duval, 1993), el registro gráfico en particular le parece útil para introducir la idea de límite al infinito. No obstante, en su planificación, el registro que privilegia es el numérico.

PEA: *... como profesor en el aula debo intentar explicar una o introducir la idea de límite en este caso en el infinito… uno puede utilizar tablas, puede utilizar gráficas…* ***cuando introduces la idea de límite… el registro gráfico*** *es cómodo…* ***es útil... es práctico… a la hora de calcular un límite… de calcular el número al que tiende…*** *si hay tendencia… el registro es numérico.*

b) *Errores y dificultades de los estudiantes*

Durante la entrevista, el PEA evidencia que en el diseño de su planificación también tiene presente las dificultades de los estudiantes en torno al concepto de límite y de manera particular, en la demostración de teoremas. Por su experiencia docente, reconoce en primera instancia, que el concepto de límite es complejo de comprender, aunque sabe que son las funciones cuyo límite involucran al número *e* lo que más les *cuesta* entender a los estudiantes y lo atribuye a que se favorece el uso de la calculadora, más que en el uso de métodos procedimentales.

PEA: *Algunos conceptos son complicados…*
I: *¿Cuáles en específico usted considera que son… tienen su grado de complejidad?*
PEA: ***La misma definición de límite… el propio límite…***

…

PEA: ***Cuando uno utiliza la calculadora y no utiliza métodos procedimentales*** (se refiere a métodos algebraicos)… ***los límites que más les cuestan entender son los límites del número e… si en un momento determinado intentan argumentar*** (se refiere a los estudiantes) ***que eso es… están haciendo un salto pedagógico muy fuerte***.

El conocimiento del PEA acerca de las dificultades de los estudiantes sobre determinados procesos de demostración, contribuye a que reconozca que se les presentan al exigirles que justifiquen un resultado. En razón de que los estudiantes en general, no sienten la necesidad de demostrarlos (los teoremas).

PEA: *... también les cuesta muchísimo…* ***cuando tu intentas justificar un resultado… cuando intentas justificar un teorema…*** *ellos muchas veces con un ejemplo concreto tienen bastante… es decir… la necesidad* (se refiere a la necesidad de la demostración).
I: *Ellos no ven la necesidad de demostrar.*
PEA: *No.*

Por cuanto a las dificultades que prevé podrían presentarse en los estudiantes en el marco de las actividades de la planificación del investigador (PI), el PEA alude nuevamente a la complejidad del concepto. Con base en su revisión a esta planificación, opina que los estudiantes sólo podrían aproximarse al concepto de límite al infinito de una función, por el tipo de función sobre la que se ubica el estudio del tópico, la función logística. Considera que existe la posibilidad de generarles la idea (errónea) de que siempre hay límite (de que el límite existe).

> ***I:*** *La planeación dada* (se refiere a la PI)*… ¿**contribuye al aprendizaje del límite al infinito**?*
> ***PEA:*** ***El límite en el infinito**… **es un concepto complejo**… la implementación ayuda a acercarse a una de las partes de ese concepto… pero no es el concepto en sí… **pero si va en la línea… del infinito**… de hecho ya te lo comentaba antes… **es vital que entiendan**… **que hay funciones que no tienen límite**… **no sería conveniente que ellos pensaran que siempre hay límite**.*
> ***I:*** *Que no todas se comportan* (alude a una convergencia rápida y la existencia del límite de una función)*… de esa manera.*

c) *Procedimientos que usan los estudiantes*

Del conocimiento que el PEA tiene sobre determinadas formas de proceder de los estudiantes mientras determinan el límite de una función que involucra radicales, se evidencia al momento en que reconoce que en ese proceso, se apoyarán del conjugado (aunque no lo dice, se refiere a límites indeterminados que involucran radicales en este caso). Lo indica mientras se refiere a la actividad 5 (algunos casos, aunque no lo indicó) del apartado 2 de su planificación (ver anexo 2.1).

> ***I:*** *Luego… ¿**serían estos ejercicios*** (PA: Apartado 2, actividades 4 y 5)*?*
> ***PEA:*** ***Si cualquier tipo de límite**… pero allí... por ejemplo... **hay algunos que**… **en lo de los radicales han hecho**… **han multiplicado por el conjugado**… **o en las fracciones algebraicas**… **hay quien suma**.*

d) *Obstáculos didácticos y/o cognitivos*

Los obstáculos que enfrentan los estudiantes ante determinadas tareas también fueron objeto de análisis en el PCK del MKT que pone en acción el PEA. En la planificación del investigador, considera que un obstáculo es debido a la función logística, por una idea equivocada que puede quedar en los estudiantes sobre el concepto de límite al infinito. Es debido a que con ese ejemplo (así le llama a la función logística), no podría generalizarse el concepto, por ello se remite al concepto de límite en el infinito de funciones logísticas.

> ***I:*** *En las actividades* (de la PI)*… ¿**identificaría usted algún obstáculo en un futuro para el estudiante**?… obstáculo en el sentido de quedarse con una idea equivocada… respecto límite al infinito.*
>
> ***PEA:*** *[Pero]… **cuando tú hablas de límite al infinito en esta implementación debiera ir acompañada de la función logística**… **del ejemplo concreto no puedes generalizar**… si das… un salto cualitativo y me hablas del límite al infinito diré… que a lo mejor le estás dando una imagen no adecuada… pero **si estamos hablando del límite en el infinito de funciones logísticas la imagen es buena**.*

Y aun cuando el PEA no categoriza el tipo de obstáculos que pueden generarse en los estudiantes. Se reconoce que uno de tipo didáctico es cuando sostiene que existe la posibilidad de generarles la idea (errónea) de que siempre hay límite (de que el límite existe), tal como se dijo en el inciso b de este subdominio (el KCS).

KCT: Conocimiento del contenido y la enseñanza

El KCT que moviliza el PEA, se estudia con base en las decisiones que toma y cómo justifica, acerca de la secuenciación de las tareas y el contexto en que se plantean (en su planificación y la del investigador). Del mismo modo, con qué conceptos matemáticos empezar (de los previos), con qué tareas introducir el tópico y cuáles dejar como trabajo independiente a fin de que profundicen en él.

Explicamos este conocimiento en el marco de cuatro aspectos: a) La secuenciación de las tareas; b) Los registros de representación semiótica que se favorecen; y c) La organización del trabajo en el aula de clases.

a) *La secuenciación de las tareas*

Los datos evidencian que las tareas de la planificación del PEA para el estudio del tópico, se plantean en el contexto intramatemático. El orden en que las propone, toma como base la secuenciación establecida en el programa de estudios de la Comunidad Autónoma Valenciana. Por su experiencia docente, afirma que suele hacer algunos ajustes a esta secuenciación, al momento en que las desarrolla en condiciones de enseñanza. Esta clase de decisiones las toma por razones estrictamente ajenas al programa de enseñanza, lo atribuye más bien factores como un mal funcionamiento del proyector, y ello lo obliga a usar otro tipo de recursos didácticos, como el libro que usan como texto para el curso (aunque en la entrevista no lo indica).

> ***I:*** *¿**Esto*** (lectura de ejercicios resueltos del libro de texto) ***lo hace al final**?*
> ***PEA:*** ***Puede ser**... **no es tan secuenciado**... ni **tampoco se hacen todos después**.*
> ***I:*** *No está secuencial... ¿**se podrían tomar secuencial en algún momento**?*
> ***PEA:*** ***Tan secuencial no**... ya **no funciona tan secuencialmente**... **por ejemplo**... cuando hoy he salido de la clase de segundo... **ayer me funcionó mal el proyector** ¿vale?... ayer **tire*** (se refiere al uso) ***del libro**... hicimos algo parecido... **hoy he tirado** un poco digamos... **del proyector**... hoy como no sabía si el proyector servía o no... me puse que iría del libro.*

Sin dejar de lado la secuenciación de las tareas, para el estudio del concepto de límite al infinito de una función refieren a tres tipos:

1) Cálculo de términos de una sucesión para identificar la tendencia de la función;

> ***I:*** ***De manera global**... ¿**cómo organiza el contenido de la enseñanza de los límites al infinito**... cómo está estructurada?*
> ***PEA:*** ***El acceso al infinito empieza con las sucesiones**... es decir... **el cálculo de términos de sucesiones y las tendencias de sucesiones son el camino por el que se inicia la idea del límite al infinito**... primero **se empiezan** con "n" **con números naturales y después** se sigue **con números no naturales**... aunque **muchas veces** la técnica que se emplea **a la hora de calcularlo o de aproximarlo siguen siendo números naturales**.*

2) Lectura y análisis de resoluciones de límite de funciones para desarrollar la comprensión lectora del estudiante, y;

PEA: ***Hay series de ejercicios resueltos**… **siempre leemos alguno**.*
I: *¿Y están aquí* (se refiere al libro de texto)*?*
PEA: *Si… **al final de todos los temas hay una serie de problemas resueltos** y de vez en cuando les… mando **como trabajo de casa léete este léete el otro**… pero **allí selecciono** yo… **a la vista de lo que** yo **he visto**… aquí tampoco es decir léetelos todos… **vamos algo que se parezca a lo que estamos haciendo**.*

3) Desarrollo extraclase de límite de funciones para valorar la comprensión del alumnado.

PEA: ***Yo tengo puesto allí*** (en su planificación) ***TC**… y TC **quiere decir** que si yo estoy haciendo ese* (señala la actividad 10 de su planificación) *y veo un TC… para mañana me haces ese… este es **trabajo de casa**… **y eso lo recojo**… **lo corrijo y se lo devuelvo**.*

En la planificación del investigador, el PEA identificó la construcción del concepto de límite al infinito de una función indicando que las tareas propuestas contemplan un estudio gradual y progresivo del tópico para el tránsito de una noción intuitiva a una formal desde el punto de vista del rigor de la matemática.

PEA: *Y no digo que es equilibrado* (las actividades planteadas por el investigador) *porque para decir que es equilibrado tendría que haberme molestado en haber contestado todas las… preguntas y eso no lo he hecho… vamos **en un principio tocas**… **diferentes registros de representación**… **y tiene**… digamos… **un avance progresivo**… a medida que vas avanzando… vas pidiendo más… **pasas del lenguaje común y empiezas a pedir también expresiones un poco más formales**.*

En esta planificación, reconoce una secuenciación en términos de los registros de representación que usa el investigador.

Reconoce que en la enseñanza se desfavorece el planteamiento de tareas sobre funciones que carecen de límite. Esto lo reafirma en el análisis de la propuesta del investigador argumentando que la riqueza del concepto demanda para su enseñanza ese tipo de tareas y otras que involucren límites negativos (considerado en su planificación).

PEA: ***El concepto del límite en el infinito o en un punto son de una riqueza tal***

> ***que la dificultad que uno tiene en la enseñanza es darles muchas imágenes buenas y adecuadas****... y* ***muchas veces tenemos tendencias que****...* ***a lo mejor ponemos una o****...* ***dos imágenes****...* ***normalmente gráficas de funciones que no tienen límite****... también depende del nivel educativo en el que uno se encuentre.*

b) *Los registros de representación semiótica que se favorecen*

El PEA reconoce la importancia del uso de los registros de representación semiótica para el estudio del tópico. En su planificación, potencia el registro de representación numérico, las razones que establece son:

1) Es útil en el cálculo de distintos tipos de límite, evaluando tres números en el dominio de la función para identificar su tendencia;

> ***I:*** *Usted siempre menciona tablas de valores... ¿****favorece mucho ese registro****?... ¿****el registro numérico con las tablas****?*
>
> ***PEA:*** *Yo* ***lo que intento es****...* ***un registro aplicable****...* ***en muchos sitios****...* ***no me interesa que me dividan de esa manera en un sitio****...* ***que*** *me* ***multipliquen por el conjugado en el otro****...* ***pongan por el exponente****...* ***me lo resten*** *y* ***cosas de esas****... es decir...* ***para cada ejercicio un método no me interesa****... pero si alguien lo conoce... se lo acepto... me parece bien y si me pide uno se lo hago.*

2) Contribuye a determinar el valor del límite cuando las respuestas de los estudiantes difieren, y;

> ***PEA:*** *Imagínate por un momento determinado que* ***uno dice****...* ***me da 21*** (el resultado del límite de una función) ***y el otro dice me da 14****... yo cojo y* ***hago una tabla más exhaustiva de la que hacen ellos****... hasta que les aburro resultados...* ***ellos son hábiles con la calculadora****.*

3) Es fácil de recordar y utilizar a diferencia de las propiedades matemáticas.

> ***PEA:*** *En algún momento de mi vida...* ***he hecho los límites en el infinito****...* ***si la potencia es positiva no sé cuánto****...* ***si la potencia es negativa no sé cuántos****... eso lo he hecho...* ***hay que mirar la máxima potencia****...* ***eso con el tiempo se olvida****.*

c) *La organización del trabajo en el aula de clases*

Por cuanto a la forma de organización de la actividad en el salón de clases, su papel se sitúa en explicar las tareas, orientar su resolución e institucionalizar[14] el conocimiento matemático sobre el tópico. Respecto a los estudiantes plantea el trabajo en dos momentos:

1) Individual, dado que deben usar sus propias herramientas matemáticas para resolver las tareas, y;

> ***I:*** *¿**En cuanto a forma**?... o sea cómo es que yo **planteo esta actividad**... luego esta actividad... **y cómo organizo todo en el aula**... **trabajos en equipos**... **individuales**... **a eso me refiero a forma**.*
> ***PEA:*** ***El primer contacto debe ser individual**... **colectivo no**... **en grupo no**... vamos **ellos en un momento determinado deben tener la capacidad** digamos **de coger una calculadora y calcular términos individualmente**.*
> ***I:*** ***De manera individual**.*
> ***PEA:*** *Sí... **en segunda colectivamente**... **porque si no podría quedarse uno mirando como lo hace el otro y uno no aprende mirando**... desde mi punto de vista **uno aprende manipulando**.*

2) En equipo, ya que la discusión con sus pares permite validar sus resultados aunque los limita en sus respuestas cuando reconocen a los líderes del grupo. En la discusión de la planificación del investigador propone que los equipos sean conformados al azar, pues considera que las competencias de cada integrante se complementan en el trabajo colaborativo.

> ***I:*** *¿**Por qué** usted **considera que el trabajo en equipo es importante**?*
> ***PEA:*** ***El trabajo en grupo** tiene digamos una doble particularidad... **les refuerza en sus resultados individuales**... dejemos la parte de que el resultado sea correcto o incorrecto... pero les refuerza... es decir... en un momento determinado **si alguien es capaz de argumentar que su resultado frente a otro distinto y convencerle**... **es un buen método**.*

Indica que es importante contemplar tiempo suficiente para que los estudiantes reflexionen sobre las tareas, las analicen y las discutan.

[14] Asumimos por institucionalización el establecer las definiciones asociadas al contenido matemático en estudio.

I: *El tiempo para el desarrollo de las actividades es de dos sesiones de cien minutos cada uno… ¿**será adecuado este tiempo**?*

PEA: ***Dos sesiones de 100 minutos**… **son tres horas**… **a dos problemas por hora**… podría ser… pero eso te lo dará la experiencia… en un principio……**irás justo de tiempo**… a no ser que las respuestas sean telegráficas* (con telegráficas se refiere a proporcionar respuestas sin la redacción de los procedimientos)*… pero si explicas... **si pides algún razonamiento** y que te escriban algún razonamiento… **irás corto de tiempo**.*

KCC: Conocimiento del contenido y el currículum

El conocimiento del PEA en este subdominio, se analiza con base en lo que evidencia que sabe, acerca de qué contenidos aparecen en el currículum y de la profundidad con que son abordados, de cómo están organizados en el libro de texto en que se apoyan. Así también, de qué temas se deben ver posteriormente en el curso.

a) *El programa de estudios del Bachillerato de la Comunidad Valenciana*

Su experiencia docente le permite contemplar deficiencias curriculares, señalando que el programa de estudios: 1) no establece la profundidad del tratamiento del concepto de límite al infinito de una función, quienes lo hacen son las editoriales; y 2) desvincula el estudio de las matemáticas del cotidiano del estudiante, es decir, poco se relacionan con la que necesita en la sociedad.

PEA: ***En los programas oficiales**… **dice iniciación al límite**… iniciación **intuitiva**… es decir... **la ley no marca qué tipo de límite tenemos que hacer**… **no dice en ningún momento hazlo de esta manera**... de esta y de la otra… **quien marca las formas de hacerlo son las editoriales**… y tu podrías tener en una localidad como ésta* (alude a Mutxamel, Alicante, España)*... bueno en la comarca donde estamos… la comarca de Alicante… puede haber veinte institutos... tu **podrías tener 5 o 6 líneas de editoriales distintas y** que **alguna pone un ejemplo de la definición formal**... **pero** pone **un ejemplo de la definición formal** pa justificar… **para demostrar que un límite es correcto**… **no para calcularlo**.*

…

*… **yo** en una cosa **discrepo de lo que hace el ministerio**… **en España las matemáticas son** cómo diríamos… **demasiado enciclopédicas**… **hacen un programa que** viene dado desde la administración… **tiene poco contacto con la realidad y quiere que en todos los sitios se enseñen los mismos sin tener en cuenta las personas**.*

El estudio del tópico lo establece desde la aproximación dinámica, lo justifica a partir de su contexto particular, el Bachillerato de la Comunidad Valenciana (España).

> ***I:*** *¿**Menciona la definición formal** (a los estudiantes)?*
> ***PEA:*** ***No**.*
> ***I:*** *¿**Se debe al nivel educativo** más que nada?... o sea... al nivel **en el cual se encuentran los estudiantes**.*
> ***PEA:*** ***Sí.***

Conoce los contenidos planteados en el programa de segundo de Bachillerato, por ello, su planificación sobre el tópico se establece desde el enfoque de funciones en lugar de sucesiones.

> ***I:*** *¿**Qué es lo que les presenta de este apartado** (se refiere al 2 de la PA)?*
> ***PEA:*** ***Límites cuando x tiende a infinito**... cosas de esas* (señala en la PA el apartado 2)*... **es que las sucesiones en segundo del bachiller no se ven**.*

Admite la pertinencia de la planificación del investigador en su contexto particular. Lo justifica en el marco del programa de matemáticas correspondiente, el cual plantea el estudio de la tendencia de funciones y la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función mediante el registro algebraico.

> ***I:*** *¿**Se puede implementar*** (se refiere a la PI) ***en el currículum español**?*
> ***PEA:*** ***Bueno en un principio sí**.*
> ***I:*** *¿**Por qué**?*
> ***PEA:*** ***Se buscan tendencias de funciones y las tendencias de funciones aparecen en el currículum español**.*

Su experiencia docente le lleva indicar que es posible que en la planificación del investigador exista falta de apoyo en el uso de los registros de representación gráfico y numérico para la enseñanza del tópico.

> ***PEA:*** ***En el sistema español trabajamos más desde**... **las funciones algebraicas que desde las gráficas**... muchas veces las gráficas las utilizamos como... apoyo didáctico... y **eso también puede ser**... **por la propia forma**... **en el tiempo que he dado clases**... **de límites**.*

b) *El libro de texto y la literatura científica*

Su experiencia como profesor e investigador le ha permitido conocer diversos instrumentos para la enseñanza del concepto y elegir aquellas con base en su contexto particular. Por ello, las actividades que plantea las retoma de los libros de texto y la literatura científica. La siguiente unidad de análisis evidencia el último aspecto

> ***PEA:*** ***Eso*** (ejercicios en inglés) ***lo he incorporado en los últimos años****… llevo no mucho dos o tres…* ***es de un artículo*** *de éstos* (véase Elia et al. (2009)) *de lo* ***que he leído*** *yo* ***de límites****… hay un grupo de griegos... que ellos tienen… vamos tenían un artículo sobre límites y ese era una cosa buena… de hecho…* ***es una hojita que incorpora gráficas****… y* ***límites****… encima está en inglés… hombre aquí se han enamorado* (del inglés) *últimamente*

c) *El tiempo escolar*

Este profesor reconoce que el tiempo escolar lo limita en el estudio de los contenidos asociados al tópico límite al infinito, tal como el caso de la continuidad de una función.

> ***I:*** *¿**Aborda continuidad en un intervalo**?*
> ***PEA:*** ***No****…* ***no da tiempo****.*
> ***I:*** *¿**Aquí*** (continuidad en un punto) ***finaliza su planificación entonces****?*
> ***PEA:*** ***Sí****… más o menos* ***con continuidad****.*

Los protocolos señalados ponen de manifiesto que el PEA usaba subdominios del MKT, a niveles distintos, en la planificación del concepto de límite al infinito de una función. En el *CCK* manifestó la definición del concepto de límite desde la aproximación métrica, a un nivel descriptivo, involucrando la idea de aproximaciones y sucesiones y la notación épsilon delta. En el marco de la planificación, se evidencia el tratamiento de tópicos asociados al concepto de límite al infinito de una función, en el marco del registro gráfico y numérico. Respecto al *SCK* evidenció que el tópico puede estudiarse desde la aproximación dinámica y métrica, su contexto particular lo lleva a optar por la dinámica e indica que la métrica permite justificar el límite de una función usando la notación matemática correspondiente. En el *HCK* reveló que el tópico es esencial para la introducción de otros contenidos del Cálculo Diferencial e Integral y del Análisis Matemático; justificó el uso de la calculadora y la regla de L'Hôpital con base en las exigencias institucionales posteriores; e indicó que el desarrollo conceptual del límite torna complejo su enseñanza. En el *KCS* señaló el interés que pueden manifestar los estudiantes para resolver las tareas de la planificación, por el contexto utilizado. En este subdominio, indicó algunas dificultades y errores que pueden encarar los estudiantes ante la resolución de las tareas propuestas, posibles actitudes procedimentales y los obstáculos didácticos que pueden emerger. En el *KCT* indicó la secuenciación de las tareas de su planificación a partir del programa de estudios y discutió las actividades planteadas por el investigador, a partir de su contexto particular, mencionando que son adecuadas pero limitadas para el estudio de tópico de forma profunda. Estas tareas se enmarcaron en el contexto extramatemático e intramatemático y se establecieron desde la aproximación dinámica del tópico. Mencionó las ventajas del uso de los registros de representación semiótica para la enseñanza del concepto de límite al infinito, así como las formas de trabajo en el aula de clase y el tiempo escolar. Justificó el uso de la calculadora y propuso contemplar tareas sobre funciones que carecen de límite. Respecto del *KCC* evidenció aspectos que se enmarcaron en el programa de estudios, por ejemplo, los contenidos propuestos y la aproximación desde la que se plantea la enseñanza del tópico. Asimismo, reconoció limitaciones en el programa de estudios y manifestó el uso de libros de texto y la literatura científica para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

Consideramos que el uso de una planificación externa posibilitó tener una mayor aproximación al conocimiento que pone en acción el PEA, ya que reconoció limitaciones en la planificación del investigador con base en su contexto particular, el programa de estudios de la Comunidad Autónoma Valenciana (España), señalando que el tratamiento del concepto de límite al infinito de una función es limitado porque se emplea una función específica cuyo comportamiento es similar en todos los casos. Esto lo llevó a proponer tareas sobre la función logística con diversos comportamientos.

IV.1.2. El conocimiento de matemáticas para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función: El caso del PEB

Las justificaciones del PEB respecto a la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza, permitió identificar la activación de los seis subdominios del MKT: *El conocimiento común del contenido, especializado del contenido, del horizonte matemático, de los contenidos y los estudiantes, de los contenidos y la enseñanza, y los contenidos y el currículum*.

CCK: Conocimiento común del contenido

Este subdominio del MKT se estudia a partir del conocimiento que el PEB revela del contenido matemático a enseñar así como de la notación y términos matemáticos (Ball et al., 2008). En ese sentido, se examinó el conocimiento que el PEB pone en acción acerca de la definición del concepto de límite, del concepto de límite al infinito; de propiedades y teoremas vinculados al tópico; y del cálculo del límite en cualquier registro de representación semiótica, numérico, analítico, gráfico y/o lenguaje coloquial, en el sentido de Duval (1993), desde las planificaciones y la entrevista.

Al indagar sobre su definición del concepto de límite, sin profundizar en su explicación, el PEB revela un conocimiento de la definición formal del tópico planteada por Weierstrass. Al cuestionar sobre su definición del concepto de límite al infinito, se apoya del límite de una función para explicarla, a un nivel descriptivo, mediante un caso particular involucrando la idea de desigualdades en la coordinación de procesos de aproximación en el dominio y el rango de la función (Valls et al., 2011). En ese proceso, alude a conceptos asociados al tópico (épsilon, delta, dominio, rango, aproximaciones).

> ***I:*** *¿**Qué es para usted el límite al infinito**... **cómo lo enunciaría**?*
> ***PEB:*** *Si me pides una definición tengo que acabar haciendo la rigurosa... **es un concepto topológico**... **en el sentido matemático**... **estando en un dominio**... **en un sitio**... **por ejemplo**... **el acercarme**... **a un determinado punto a un determinado sitio**... **qué produciría en el otro**... **ese sería el concepto de límite**... topológico*

En el ámbito de la planificación, las tareas planteadas se enfocan al estudio del tópico en cuestión y contenidos vinculados (función, continuidad, tendencia de funciones, límite de funciones, límites laterales, entre otros), más que en la formación del concepto y su definición. Las actividades están enfocadas a trabajar con el límite de funciones: polinómicas (lineales y cuadráticas), especiales (racionales y radicales) y trascendentales (trigonométrica) en el marco del registro numérico y gráfico, privilegiando la conversión entre ambos. Las tareas sitúan a calcular límites y analizar gráficas de funciones, para obtener un número.

SCK: Conocimiento especializado del contenido

El análisis de este subdominio del MKT contempla la aproximación desde la que se plantea el estudio del concepto de límite al infinito de una función y la justificación de dicha elección desde el punto de vista del rigor de la matemática.

En ese marco, reconocemos que el PEB sabe que el estudio del concepto de límite al infinito de una función puede establecerse desde tres aproximaciones: *dinámica, métrica y óptima*. En su planificación opta por desarrollar la dinámica y la métrica, pero potencia la primera, ya que desde el punto de vista matemático reconoce más fácil su asimilación a través de los límites laterales. Se apoya para ello, de los registros gráfico y numérico.

> ***PEB:*** ***El concepto de límite desde mi punto de vista de Weierstrass tiene una definición muy abstracta***... *pero* ***desde el punto de vista dinámico***... ***es un acercamiento***... ***ver la tendencia por la izquierda***... ***ver la tendencia por la derecha y si hay coincidencia hay límite y si no***... ***no hay límite***... *por eso... ver la tendencia por el otro lado y luego afinar...* ***observar si hay límite o no***... ***si esas tendencias son iguales***.

Durante la entrevista, señala que el estudio del concepto de límite al infinito desde el punto de vista de las sucesiones resulta más complejo para los estudiantes, por ello, opta por un tratamiento del tópico desde el punto de vista de las funciones matemáticas.

> ***PEB:*** *Leyendo a Freudental... vi que y Luis Puig que es un profesor de didáctica de las matemáticas... hablaban de que o se estudiaba límite desde el*

> *punto de vista de sucesiones o desde el punto de vista de funciones y* ***me pareció más interesante desde el punto de vista de funciones porque si nos centrábamos en sucesiones pues era mucho****…* ***más complejo****.*

HCK: Conocimiento del horizonte matemático

Contempla las tareas para conectar la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función con otros contenidos matemáticos planteados en el programa de estudios. Se analiza cómo influye el desarrollo histórico del concepto de límite en la planificación de su enseñanza. Presentamos este conocimiento en el marco de cuartro aspectos: a) Contenidos matemáticos previos y posteriores al estudio del concepto de límite al infinito de una función; b) Los tipos de límite objeto de estudio en la matemática escolar; c) Influencia del desarrollo histórico del límite en las decisiones del profesor; y d) Exploración del tópico en otros conjuntos matemáticos.

a) *Contenidos matemáticos previos y posteriores al estudio del concepto de límite al infinito de una función*

El PEB considera que el concepto de *función* es elemental para el estudio del tópico límite al infinito. Este aspecto se ve reflejado en su planificación al plantear tareas sobre funciones matemáticas que tienen como objetivo establecer los conocimientos previos. En el análisis de la planificación del investigador reconoce al *infinito*, como un tópico previo para el estudio del concepto de límite al infinito de una función.

> ***PEB:*** ***He empezado con las funciones porque*** *consideramos que las funciones* ***son muy importantes****…* ***para el estudio del límite.***
> ***I:*** *Claro… pero lo que está haciendo allá usted es recuperar conocimientos… o sea recuperar el conocimiento de función.*
> ***PEB:*** *Si…* ***es primordial****.*

A pesar de la complejidad del tópico, desde el punto de vista matemático, el PEB señala que su estudio es primordial para la introducción de otros contenidos del Cálculo y Análisis Matemático, como las derivadas y las integrales. Este aspecto se evidencia en su planificación cuando propone una tarea relacionada con la noción de continuidad de una función.

> **I:** *¿**Por qué los estudiantes tienen que aprender límites al infinito**?*
> **PEB:** ***El concepto de límite es muy importante para**... **todo el cálculo ya Orton dice que uno de los mayores dificultades para la enseñanza de derivada**... **integrales es el concepto de límite que no se tiene un nivel interiorizado** y de hecho si ocurre... el concepto de límite a mí me costó muchísimo aprenderlo de joven... y prácticamente lo llegué a entender ya casi estudiando la carrera... pero **no cabe la duda que ese concepto ayuda bastante para**... **derivar**... **integrar y todo eso**.*

b) *Tipos de límite*

Durante la entrevista, este profesor revela un conocimiento sobre la diferencia entre la tendencia de una función y el límite de una función. Asimismo, sabe bajo qué condiciones, determinadas funciones matemáticas tienen límite finito o infinito.

> **I:** *¿**Qué diferencia existe entre tendencias y el límite**?*
> **PEB:** ***Una función**... **puede tender hacia algo por un lado o por otro y no coincidir y no hay límite**... puede haber una tendencia por la izquierda hacia un valor tres y por la derecha un valor menos cuatro... y no va haber límite en el punto hacia el cual se acercan la variable "x"... **ese es el concepto de tendencia**.*
> **I:** *Es la diferencia... con el límite... bien.*
> **PEB:** ***La tendencia es**... **a los valores a los que se aproxima**... **la función**.*

En su planificación, las tareas demandan el análisis de límites laterales para calcular el límite de la función en un punto.

c) *Desarrollo histórico del concepto de límite*

Reconoce dificultades en la enseñanza del tópico, lo atribuye a su evolución conceptual. Sin profundizar en ello, revela que este hecho lo sabe por la revisión a la literatura especializada. Esto justifica el planteamiento de tareas que demandan un estudio a nivel intuitivo del tópico.

> ***I:*** ***Esa elección**... **de plantearlo de esa forma*** (el estudio del concepto de límite al infinito de una función)... ***intuitivo**... y que aterricen en la simbología matemática... ¿**a qué se debe** que presente eso?*
>
> ***PEB:*** ***Pues porque** en la literatura sobre didáctica de las matemáticas... **estuve** observando... **leyendo los problemas epistemológicos que tenía el concepto de límite** y problemas de... aplicación didáctica del concepto de límite en la enseñanza... **leyendo Blázquez y Ortega**... unos profesores didácticas sudamericanos también creo que son... **ellos decían que... el concepto de límite había que hacerlo muy intuitivo... nunca basado en... el formalismo riguroso matemático**... entonces... **seguí un poco eso lo que venía en la literatura matemática sobre el límite**.*

d) *Analizando el tópico en otros conjuntos*

Durante la entrevista, el PEB señala que es importante explorar el tópico límite al infinito en otros conjuntos matemáticos con el objetivo de aumentar su complejidad y favorecer otro tipo de razonamiento. No obstante, el nivel educativo en el que se encuentra inmerso lo imposibilita.

> ***I:*** ***Esa definición*** (se refiere al concepto del límite al infinito de una función) *que menciona... ¿**está relacionado con la planificación que hace**?*
>
> ***PEB:*** *Si... **en cierto modo sí... lo que ocurre es que solamente está hecha... en la recta real... lo interesante a lo mejor sería lo que he hecho en otros dominios*** (el nivel educativo no le permite hacer esta exploración)... *porque **podrían ser conjuntos convexos... bolas... círculos... cualquier otra cosa**.*

KCS: Conocimiento del contenido y los estudiantes

Se analiza a partir del conocimiento que tiene el PEB del proceso cognitivo de los estudiantes ante determinadas tareas o situaciones de enseñanza que se les plantean. Se estudia a partir de cómo el profesor predice que las tareas pueden ser de interés o no a los estudiantes por el contexto, de los errores y las dificultades que pueden encarar a fin de prevenirlas o en su caso que las superen, así como de los posibles obstáculos de tipo didáctico y/o cognitivos que pueden manifestarse. Mostraremos este conocimiento en el marco de cinco aspectos: a) El conocimiento previo de los estudiantes; b) El contexto en que se plantean las tareas; c) Dificultades y obstáculos que pueden manifestar los estudiantes; d) Procedimientos que ponen en acción los estudiantes; y e) La evaluación del aprendizaje

a) *El conocimiento previo de los estudiantes*

A fin de establecer la definición del concepto de límite al infinito de una función, el PEB considera fundamental la comprensión del tópico función. Para tal propósito plantea actividades que demandan el análisis de gráficas de funciones vinculadas a una situación del cotidiano.

> ***I:*** *¿**Esto*** (PB: Sesión 1, parte final de la actividad 5, gráficas) ***se lo presenta a los estudiantes**?... ¿el objetivo es observar?*
>
> ***PEB:*** ***Si**... **a veces son capaces de ellos a la vista de las gráficas ver qué tipo de actividad puede ser eso**... **qué modelo de la vida puede representar esta función matemática** y a lo mejor es una persona que va en una bicicleta y que va aumentando la velocidad cuesta abajo... cosas de esas **que ellos modelicen ese tipo**... **de gráfica**.*

Además, contempla información sobre las características de una función matemática, pues considera que es un concepto muy amplio. Asimismo, plantea tareas para analizar la variación de los parámetros de la función y cómo influye en su gráfica.

> ***PEB:*** ***El concepto de función al ser muy amplio**... también... **les damos a entender de que esto*** (PB: Sesión 1, actividad 5) ***no puede ser una función**... esto tampoco y ésta tampoco porque... **el concepto de función es que**... **para cada variable no existan dos valores o tres**... y entonces... **esto*** (se refiere a la PB: Sesión 1, actividad 5, ¿qué relaciones no son funciones?*) **lo encontré en un libro de texto y me pareció muy adecuado como información para ellos**.*
>
> ...
>
> ***I:*** *¿**Qué pretende cuando hace... esta modificación*** (se refiere a la modificación de los parámetros de la función inicial dada en PB: Sesión 1, actividad 8)*?*
>
> ***PEB:*** ***Que las vayan viendo y como consecuencia**... **cómo cambia esas gráficas dentro**... **del eje de coordenadas "y"** entonces... **que les ayude un poco**... **a familiarizarse con ese tipo de expresiones**… **cómo va variando el que este dentro de la raíz y el que este en un paréntesis y que este sumado una cantidad**... entonces... **y que saquen conclusiones**.*

b) *El contexto en que se plantean las tareas*

En el estudio del concepto de límite al infinito privilegia el uso del contexto intramatemático. No obstante, cuando propone tareas sobre el concepto de función usa ambos contextos (extramatemático e intramatemático), ya que predice la inexistencia de dificultades en el tránsito de variables discretas a continuas.

> ***I:*** ***Esta actividad*** (PB: Sesión 1, actividad 4)... *¿**se puede digamos sustituir por una que este contextualizada y que sea continua**?*
> ***PEB:*** ***Sería mucho mejor**... pero realmente yo lo pasé ya directamente sin buscar una contextualizada solamente para que lo trabajaran... **de todas maneras yo no creo que haya dificultad cognitiva**... **en esa secuenciación del mundo discreto al mundo continuo**... **no vendría mal poner una contextualizada**.*

En el análisis de la planificación del investigador, reconoce que el uso del contexto extramatemático (enfermedades epidémicas) y una función específica (función logística) permiten dotar de sentido al tópico y reconocer su utilidad.

> ***I:*** *Lo que he notado que **rescata mucho de la planeación*** (alude a la PI)... *son **dos cosas**... el hecho de usar solamente una función que es **la función logística y el contexto**... ¿estoy en lo correcto? El contexto **en este caso**... **son las enfermedades epidémicas**.*
> ***PEB:*** ***Si**... **me parece interesante esas dos**... me parece muy interesante **y muy acertadas**.*

Durante la entrevista, señala que las tareas planteadas en el contexto extramatemático son de gran valor porque permiten introducirse al tópico y reconocer sus aplicaciones en otras áreas del conocimiento, mientras que el contexto intramatemático favorece definirlo desde el punto de vista del rigor de la matemática.

c) *Dificultades y obstáculos que pueden manifestar los estudiantes*

El PEB contempla un obstáculo de tipo cognitivo en el estudio del concepto de límite al infinito de una función desde la aproximación métrica. Sin profundizar en ello, señala que los estudiantes comprenden parcialmente la definición del tópico desde esta aproximación.

En su planificación involucra el estudio del dominio y el rango de funciones, ya que contempla errores y dificultades sin mencionar de qué tipo.

> ***I:*** *¿**Esta actividad*** (se refiere a la PB: Sesión 1, actividad 6) ***la desarrollan ellos**?... ¿**El dominio y el rango de la función de cada figura**?*
> ***PEB:*** ***Sí... a los alumnos les cuesta bastante... el concepto de dominio y rango a veces les produce muchos errores*** *pero sí.*

En el análisis de la planificación del investigador identifica un obstáculo de tipo didáctico que refiere al estudio de situaciones no lineales a través de la interpolación lineal (apoyándose de tabla de valores). Para solventarlo, propone el uso de gráficas para estimar la imagen de la función en un punto.

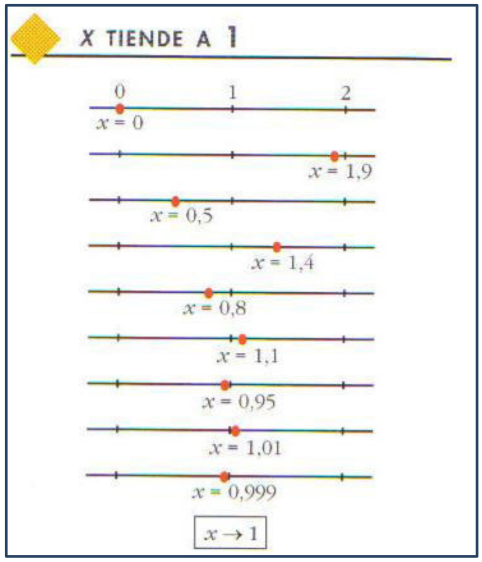
> ***PEB:*** *Yo he visto muchas veces* ***en la enseñanza*** *que* ***los alumnos utilizan a veces interpolaciones lineales... en fenómenos que no son lineales***... *y* ***este*** (se refiere a la función logística) ***claramente no lo es***... *la única observación que yo vería... es* ***que en uno coma cinco*** (PI: Actividad 6, ítem 2, inciso a) ***hicieran ellos su correspondiente gráfica... línea recta hacia arriba... y entonces... a través de aquí*** (de la gráfica construida por los estudiantes) ***intentar un poco pues deducir un valor aproximado***.

d) *Procedimientos que ponen en acción los estudiantes*

Su experiencia docente le permite predecir los procedimientos que ponen en juego los estudiantes en la resolución de las tareas, pero no los señala. Al momento de plantear las tareas para el estudio del tópico tiene en cuenta esos procedimientos.

Durante la entrevista, señala que el uso de tablas verticales y horizontales, gráficas centradas, menos centradas e incompletas demanda al estudiante un análisis detallado de la situación y su resolución. Por ello, la elección de los registros de representación debe contemplar posibles actitudes procedimentales de los estudiantes con el objetivo de potenciar el aprendizaje del tópico.

PEB: *He comprobado con mis alumnos que **las tablas**... **el ponerlas horizontalmente o verticalmente también les influye a veces a ellos en su propia observación y deducción** de aspectos importantes... hay que ponerles tablas horizontales... verticales... también... gráficas completas... gráficas más centradas* (presenta, de su planificación, como ejemplo la gráfica siguiente)



...

*... **hay alumnos que el hecho de que una tabla este horizontal**... **o este vertical les produce ciertas alteraciones en las observaciones y se despistan** y yo muchas veces he buscado hasta esos mínimos detalles... luego... cálculos numéricos... por ejemplo... incluso una aproximación como ésta* (PI: Tabla de valores de la actividad 3, ítem 2).

2. A continuación, se presentan algunos datos en la tabla sobre la propagación de la enfermedad en cierta población.

t (en semanas)	$P(t)$ (en millones)
0	0
1	4.621171573
2	7.61594156
3	9.051482536
5	9.866142982
7	9.981778976
8	9.993292997
10	9.999092043
…	…
23	9.999999998

Las tareas planteadas por el PEB establecen el cálculo de límites a través de límites laterales, ya que prevé un desorden en los procedimientos que realizan los estudiantes cuando calculan límites.

> ***PEB:*** ***Muchos alumnos la aproximación hacia un punto la hacían de forma muy desorganizada**... **no próximas a los valores**... **solo por un lado o por el otro y podían hacerlos alternativamente un poco**... entonces... **en un solo eje tengo un punto*** (PB: Sesión 2, actividad 12) ***al cual me quiero acercar**... **puedo empezar por la derecha**... **luego por la izquierda**... entonces... ir haciendo esos puntos allí no.*

e) *La evaluación del aprendizaje*

Para valorar el aprendizaje de los estudiantes, el PEB considera la resolución de diversas tareas, tales como las de su planificación y las que plantea otro colega. Señala que dos de las tareas, se enfocaron en las justificaciones del estudiante en torno a la existencia del límite de una función.

> ***I:*** ***El aprendizaje de los estudiantes**... ¿**de qué manera evalúa el conocimiento que han adquirido respecto al límite al infinito**?*
>
> ***PEB:*** ***Observando las actividades que les propusimos vamos viendo cómo ellos van avanzando**... **cómo van construyendo el concepto**... luego les pase **un cuestionario que hizo un colega mío**... para ver si ellos habían construido bien el concepto de límite... eso me sirvió a mí de referencia... **las producciones mías que yo puse**... después... de todas las actividades que hicimos **fue proponerles**... **dos límites que tenían que estudiarlos**... de dos funciones **una que tenía límite y otra que no tenía límite**... entonces... de **por qué tenía**... **por qué no tenía y que manejaran todo lo que habían hecho antes**.*

Este profesor considera que la evaluación debe realizarse en distintos momentos a fin de reorientar el estudio del tópico y llegar al objetivo.

KCT: Conocimiento del contenido y la enseñanza

Este subdominio del MKT contempla la secuenciación de las tareas planteadas para el estudio del tópico, los registros de representación semiótica que se favorecen y la forma de organización del trabajo en el aula de clases a fin de promover la comprensión del concepto de límite al infinito de una función. Explicaremos este conocimiento en el marco de tres aspectos: a) La secuenciación de las tareas; b) Los registros de representación semiótica que se favorecen; y c) La forma de organización del trabajo en el aula de clases.

a) *La secuenciación de las tareas*

Su planificación se apoya en una trayectoria hipotética[15] del aprendizaje para el estudio del concepto de límite de una función, la cual involucra tres tipos de tareas: inicial, reflexión y anticipación. En ese sentido, el tratamiento del tópico inicia con el estudio del concepto función; se desarrolla desde la aproximación dinámica y culmina con la métrica. Las actividades que propone se organizan en cuatro sesiones (Anexo 1.2).

> ***I:*** ***¿Cómo pretende lograr esos objetivos de la comprensión del concepto*** (se refiere al concepto de límite de una función)*?*
>
> ***PEB:*** ***Haciendo varias**... **actividades basadas en una trayectoria hipotética del aprendizaje del alumno del concepto de límite** de que pensamos que **en base a los estudios que hay de cómo se aprende el límite**... que esas son las [pautas] que siguen para aprender el concepto... **hemos propuesto unas actividades que pensamos se adecuaban a esa trayectoria**...**hay unas tareas iniciales**... **unas tareas de reflexión y unas tareas de anticipación**... **las iniciales son básicas de información para que ellos vayan entendiendo unos conceptos que luego les puedan servir para un futuro para reflexionar y luego para anticipar para cuando se les plantea una cuestión cómo trabajarlas***

La primera sesión plantea la resolución de tareas sobre el concepto de función, tópico fundamental para el estudio del concepto de límite al infinito de una función. Las actividades demandan el análisis de funciones matemáticas, en un primer momento, desde el contexto extramatemático y usando números naturales; y en otro desde el contexto extramatemático e involucrando los números naturales. El objetivo de la primera sesión es que los estudiantes definan el concepto de función, apoyándose para ello del dominio y el rango.

> ***PEB:*** ***Sigo con**... **funciones naturales*** (se refiere a PB: Sesión 1, actividad 2)... ***luego pasamos a funciones ya de tipo real** donde ya introducimos números reales* (se refiere a PB: Sesión 1, actividad 4)... ***empiezan a dibujarlas y a verlas así también y al final**... **se le da otra vez una información de conocimiento**... **el concepto de función cuando la x se hace continua*** (PB: sesión 1... actividad 5)... ***con una expresión algebraica**... e igual a f de x... **la formalidad de expresarlo**… **ya se les dice una función es una relación entre dos variables numéricas**... **habitualmente las denominamos "x" e "y"**... se les va dando los*

[15] Las trayectorias hipotéticas del aprendizaje permiten al profesor realizar predicciones sobre la manera en que los estudiantes pueden aprender al realizar las tareas (Simón, 1995, citado en Gavilán, García y Llinares, 2007a; p. 6).

> *conocimientos... **a una de ellas le llamaríamos variable dependiente**... pues depende de la otra... etcétera... etcétera.*
>
> …
>
> *... **se define el concepto de función**... **desde un punto de vista ya más abstracto y más matemático**.*

La segunda y tercera sesión, proponen el tratamiento del tópico desde la aproximación dinámica. En un primer momento, demandan el estudio de la tendencia de funciones y en otro el cálculo del límite de una función a partir de los límites laterales.

> ***I:*** *Presenta varias funciones... luego dice... **cómo me acerco a uno en ambas funciones**... **haciendo referencia a estas no*** (PB: Sesión 2, actividad 12)... *¿**qué objetivo tiene al plantear esa pregunta**?*
>
> ***PEB:*** *Pues ya **empezamos con la lateralidad del límite**... lo que es **la aproximación a un punto**... **por la izquierda y por la derecha** y luego **ver**... **lo que le ocurre a la función tanto si aproxima por la izquierda y por la derecha**... lo que planteaba Duval **la coordinación entre la aproximación en el eje x y la aproximación en el eje y**.*

Durante la entrevista, señala que las tareas involucran el análisis de diversas funciones matemáticas (racionales, exponenciales, logarítmicas, definidas por partes). Su objetivo es que los estudiantes identifiquen en qué casos las funciones tienen asociado un valor límite. Se apoya para ello de los registros gráfico y numérico. Su forma de proceder lo justifica desde la literatura científica.

> ***I:*** ***Por qué elige**... **veo que tiene muchos**... **funciones**... **racionales**.*
>
> ***PEB:*** *Si... **porque son muy interesantes**... allí **fui buscando muchas**... **de la gama de ejercicios que hay**... **las que me parecieron más adecuadas**... quise buscar **de todo tipo exponenciales**... no sé alguna **logarítmica** también.*
>
> ***I:*** ***En la actividad cuatro*** (PB: Sesión 2, actividad 14)... ***le llama usted funciones raras**.*
>
> ***PEB:*** ***Si**... **funciones raras**... le puse raras porque... **yo leía a Euler que habían una serie de funciones que no le gustaban desde un punto de vista porque no eran holomorfas**... entonces **no es una función normal**... **o sea que en el punto dos no vale el valor de esa expresión*** (se refiere que la imagen de la función en *x*=2 es diferente al que se obtiene si se evalúa en la expresión analítica proporcionada)... *entonces... **esa función allí no tiene límite en el punto x igual a dos**... y **era un poco que vieran que habían unas funciones raras y diferentes a las que ellos habían trabajado**... **donde el concepto de límite no salía allí**.*

La cuarta sesión plantea un breve tratamiento del tópico desde la aproximación métrica. Las tareas sitúan a los estudiantes a calcular, apoyándose del registro numérico, el valor de delta a partir de épsilon y bajo el supuesto de la existencia del límite. Culmina con la demostración del límite de una función usando la notación épsilon delta.

> ***I:*** *En esta* ***actividad dos*** (PB: Sesión 4, actividad 20)... ***¿qué es lo que realizan?***
>
> ***PEB:*** *Allí hacemos un ejemplo... o sea* ***cogemos una función y suponemos que hay límite****...* ***la función es conocida es esa que el límite cuando x tiende a tres es siete****... entonces... damos un épsilon...* ***fijamos un épsilon que es cero coma seis y entonces****...* ***encontramos un delta que****...* ***tres menos "a" es menor que*** (menor que 0.01)... ***entonces****...* ***"f"*** **(de)*****"a" menos siete hay que buscar eso*** (que f(a)-7<0.06)... *lo hacemos con el ordenador... como consecuencia de allí me sale precisamente el valor que tiene que tener delta...* ***sale delta que es cero coma cero uno****.*

En el análisis de la planificación del investigador, el PEB reconoce que las tareas planteadas son adecuadas. Su justificación se establece en la estructura de la planificación (secuenciación de las actividades) y los registros de representación que se favorecen.

> ***PEB:*** ***Me parecen todas adecuadas*** (se refiere a las tareas de la PI)... ***está muy bien estructuradas****... empiezas muy bien que* ***se vean la gráfica*** *que vean* ***la tabla y****...* ***siempre utilizando la simbología matemática adecuada****... a mí* ***me parecen correctas en ese sentido****.*

El PEB propone estudiar el concepto de límite al infinito de una función iniciando con la aproximación métrica y culminando con la dinámica. Desde su punto de vista, podría ser un método adecuado para que el estudiante comprenda la definición del tópico desde ambas aproximaciones.

> ***PEB:*** ***Veo que la dinámica es la que prevalece y no deja avanzar en las otras*** (se refiere a la concepción métrica)... *entonces...* ***a lo mejor empezar****...* ***a enseñar el****...* ***métrico al principio****... jugando un poco* ***para acabar con el dinámico****.*

b) *Los registros de representación semiótica que se favorecen: gráfico y numérico*

Para este profesor tiene gran valor el uso de los registros de representación semiótica para el estudio del tópico. Su justificación remite a que la conversión entre los distintos registros, en el sentido de Duval (1993), permite interiorizar el concepto de límite al infinito de una función. Indica que mientras más registros sean contemplados en el tratamiento del tópico, mejor será su comprensión.

> ***I:*** *En esta planeación* (se refiere a la PI)... ***incorporamos los registros de representación gráfico**... **numérico**... **verbal y analítico del límite al infinito**... ¿**considera que esto es importante y por qué**?*
>
> ***PEB:*** ***Si**... yo **lo considero muy importante**... **porque la conversión ya lo dice Duval**... **hay que saber eh convertir**... **competencias matemáticas desde un registro numérico a un registro tabular o a un registro gráfico**... entonces... es necesario saber trabajarlas todas e ir pasando de uno a otro... **cuanto más variabilidad haya**... de registros tabulares... gráficos... numéricos y luego pasar al lenguaje formal... **mucho mejor**... me parece que **es importante a la hora de... que el concepto luego se pueda más o menos interiorizar**.*

En su planificación favorece el uso y la conversión de dos registros de representación semiótica: el gráfico y el numérico. Desde su punto de vista, estos dos registros son suficientes para aproximarse al concepto del límite al infinito de una función.

> ***I:*** *¿**Qué registros de representación semiótica del límite al infinito favorece**?*
>
> ***PEB:*** ***Sobre todo gráficos**... y los de aproximación con un zoom a esos gráficos **y luego**... **las tablas**... que... el programa la produce muy bien y... todo **eso hace que se vaya uno aproximando mejor**... **al concepto de límite**... **tabulares**... **numéricas**... **y gráficas todas las que caían en mi mano**... **que fueran susceptibles de poder convertirse**... pasar de unas a otras eran las que les ponía... **cuántas más hayan mejor**... **pero sobre todo gráficas y tabulares**.*

Para este profesor la conversión entre los registros juega un papel muy importante, por ello, las tareas que propone contemplan este aspecto.

c) *La forma de organización del trabajo en el aula de clases*

El PEB establece el trabajo en el aula de clases en grupos de dos estudiantes formados por afinidad, los cuales son reestructurados, en caso necesario, con base en las competencias matemáticas de los integrantes. Piensa que esta forma de trabajo favorece la interacción entre pares y el aprendizaje por cooperación.

> ***I:*** *¿**Cómo pretende desarrollar las actividades**... **individual o por equipos**?*
> ***PEB:*** ***Por equipos**... **mínimo de**... **dos alumnos**.*
> ***I:*** *¿**Por qué de esa manera*** (se refiere a los equipos) ***y no individual**?*
> ***PEB:*** ***Porque interactúan** y al interactuar ellos habrán de comentar las cosas... es doblemente efectivo... **yo siempre he sido creyente del aprendizaje por cooperación**... **el alumno que trabaja solo apenas habla consigo mismo**... si esta con otro compañero puede decir más cosas... aunque yo les indicaba muchas veces... que escribieran todo lo que decían... siempre **hay pues una tendencia generalizada a escribir lo menos posible**... es más fácil que vayan hablando... y **la manera de hablar es que estén por lo menos dos o tres personas en el grupo**.*

Su rol en el aula de clases se establece a nivel de coordinador de las tareas planteadas, cuya labor consiste en la presentación de las actividades y la aclaración de dudas en el proceso de resolución. Otro papel que asume es el de institucionalizar el conocimiento matemático, una vez que los estudiantes han culminado las tareas de cada sesión.

> ***I:*** *¿**Cuál es su papel en el aula durante el desarrollo de la lección*** (se refiere a las actividades de la PB) ***y cuál es el del estudiante**?*
> ***PEB:*** ***El papel mío es presentar las actividades**... **organizar el trabajo**... **atender las dudas** que tengan en... el uso... del ordenador... del software... editor y eso... un poco **encauzar el trabajo que están haciendo**... **coordinar y dirigirlos a ellos** en su logro... **ir revisando los trabajos que hacen**... el objetivo no es dirigirlos completamente... sino coordinarlos... **para que ellos vayan un poco viendo**... **cuál es el proceso límite y desde fuera intentar observar cómo construyen el concepto de límite**.*

La resolución de las tareas se establece en un ambiente virtual, es decir, mediante el uso del software matemático Derive. Las razones que esgrime aluden a que en un estudio intuitivo del tópico los cálculos son más precisos y contribuyen en clarificar significados.

> ***I:*** *¿**Por qué con un software y no manual*** (se refiere al estudio del concepto

de límite al infinito de una función)… ***o que usen nada más calculadora*** *para que ellos vayan estudiando?*

PEB: ***Me da igual****...* ***una calculadora*** *la cual vayan ellos haciendo los cálculos...* ***me parece muy bien****...* ***pero los software****... por ejemplo... Derive...* ***son cada vez más precisos y son mucho más intuitivos bajo mi punto de vista****...* ***yo estoy convencido****...* ***que profundizar en el uso de softwares****...* ***de programas como el Derive****... que es el que más se usa pero podría ser cualquier otro...* ***será muy buenos****...* ***para que los alumnos tengan un concepto más claro del límite****...* ***derivadas****...* ***integrales y demás****... todo lo relacionado con cálculo... me parece muy interesante*.

Respecto al tiempo contemplado para el desarrollo de las tareas, el PEB propone cinco sesiones de 50 minutos cada uno, mientras que el investigador dos sesiones de 100 minutos cada uno. Durante la entrevista, el PEB señala una demanda mayor del tiempo debido a las características de los estudiantes y la disponibilidad de mobiliario y equipo. Cuando analiza la planificación del investigador manifiesta que este tiempo debe ser suficiente para organizar el trabajo en el aula de clases y la reflexión sobre la tarea con el propósito de reconocer errores y aciertos.

I: ***¿Qué modificaciones realizaría en cuánto a formas de implementación*** (de la PI)*... respecto a tiempos... maneras de trabajo... en el aula?*

PEB: ***Las sesiones a lo mejor hay que alargarlas****...* ***porque necesitas un tiempo previo donde ellos puedan ver todo lo que hay que hacer****...* ***cómo se tiene que organizar el trabajo****...* ***una vez que está bien estructurado****...* ***empezar a trabajar****...* ***al terminar la primera sesión****...* ***analizarla un poco individualmente****...* ***para ver donde hay errores de índole importante y en cuyo caso hacer un trabajo de feed-back*** (una retroalimentación por parte del profesor) ***de sentarse otra vez con los alumnos***.

Su experiencia docente le permite reconocer que el tiempo dedicado al tratamiento del tópico puede influir en la motivación de los estudiantes para resolver las tareas.

PEB: ***Los alumnos llega el momento en que se cansan*** *también... necesitan temas nuevos... el cambio en los temas les hace...* ***si ellos están mucho tiempo con un tema****...* ***les acaba aburriendo****...* ***despistando***.

KCC: Conocimiento del contenido y el currículum

Se analiza a partir de los documentos curriculares y los recursos didácticos utilizados por el PEB para diseñar las tareas sobre el tópico. Abarca los contenidos matemáticos relacionados con el concepto de límite al infinito de una función y el enfoque propuesto para su enseñanza. Se estudia cómo influye el tiempo escolar en las decisiones del profesor para el tratamiento del tópico. Explicamos el KCC en el ámbito de tres aspectos: a) El programa de estudios del Bachillerato de la Comunidad Valenciana; b) Los libros de texto utilizados para el planteamiento de las tareas y la literatura científica; y e) El tiempo escolar contemplado para la enseñanza del tópico.

a) *El programa de estudios del Bachillerato de la Comunidad Valenciana*

Para el PEB el programa de estudios de su contexto particular, el Bachillerato de la Comunidad Valenciana (España), es un documento fundamental en el planteamiento de las tareas sobre el concepto de límite al infinito de una función. En el proceso de planificación tiene en cuenta la aproximación desde la que se propone el tratamiento del tópico, los contenidos matemáticos y los registros de representación semiótica.

Su experiencia docente le permite reconocer, desde el programa de estudios, un cambio en el enfoque para establecer la definición del tópico. Por ello, su estudio se enmarca desde la aproximación dinámica con una sucinta introducción a la métrica. Piensa que de esa manera lograría definir el tópico, desde el punto de vista del rigor de la matemática, y estudiar algunas aplicaciones.

> ***I:*** *¿**Qué objetivo plantea el currículum respecto al concepto del límite al infinito**… o sea qué es lo que se tiene que aprender?*
>
> ***PEB:*** ***Lo pide a**… **nivel de saber cuál es el concepto**… **de saberlo definir y expresar**… **explicar y**… luego **aplicarlo al campo de límites y de funciones expresiones algebraicas y** también de **aplicarlo a casos reales como el de la función logística y otros que hay por allí**.*
>
> ***I:*** *No **se pide un estudio formal**… **épsilon delta**… **en bachillerato**.*
>
> ***PEB:*** ***Ahora no**… **antes si**… **se pone de una forma a lo mejor más intuitiva**… **menos formal desde el punto de vista matemático el épsilon delta**… si se suele un poco decir… algo de eso* (se refiere a la aproximación métrica).

Otro aspecto revelado por el PEB es que las tareas planteadas contemplan diversos contenidos matemáticos, tales como el dominio y el rango de funciones. Cuando analiza la planificación del investigador reafirma este aspecto, al considerarla pertinente para el estudio del tópico debido a que las actividades involucran conceptos matemáticos (límite de una función en un punto y límite de una función cuando la variable tiende a más infinito) planteados en el programa de estudios de su contexto particular.

> ***I:*** ***¿Qué tan apegado se encuentra el objetivo de la planeación*** (alude a la PI) ***respecto al currículum español*** *en este caso? Y ¿por qué?*
> ***PEB:*** ***Me parece una buena presentación****…* ***está...*** *prácticamente* ***dentro de los conceptos del currículum en España*** *también…* ***está el límite de una función en un punto y el límite de una función cuando la variable tiende a más infinito****.*

Respecto a los registros de representación semiótica, el PEB indica que el programa de estudios demanda definir el tópico usando un registro de representación formal, desde el punto de vista del rigor de la matemática. Piensa que una de las potencialidades de la planificación del investigador es el uso de estos registros (gráfico, numérico, lenguaje coloquial y analítico) para el estudio del tópico.

> ***I:*** *En esta planeación* (se refiere a la PI)*... incorporamos los registros de representación gráfico… numérico… verbal y analítico del límite al infinito… ¿****considera que esto es importante y por qué****?*
> ***PEB:*** ***Si****... además* ***el propio currículum escolar nos dice de acabar en un registro formal con un lenguaje matemático específico****.*

b) *El libro de texto y la literatura científica*

Este profesor se apoya básicamente de los libros de texto para el planteamiento de las tareas. Su forma de proceder lo justifica desde la exigencia institucional.

> ***PEB:*** ***Se preparan una serie de actividades****…* ***buscadas en la literatura de los libros de texto****…* *prácticamente* ***que más se han usado en los centros educativos****.*

Otro recurso que usa para la selección las tareas es la literatura científica, ya que su planificación se enmarca en una trayectoria hipotética de aprendizaje y utiliza actividades planteadas en la tesis doctoral del PEA.

c) *El tiempo escolar*

El PEB reconoce que el tiempo escolar es un elemento que influye en su práctica docente, ya que desfavorece la enseñanza del tópico usando diversas tareas que involucren el contexto extramatemático. Por ello, las tareas que propone se enmarcan, en su mayoría, en el contexto intramatemático.

> ***I:*** ***Aquí*** (PB: Sesión 1, actividad 4) ***es el último caso que pone discreto y utiliza ya solo una expresión**... **ya no contextualiza tampoco*** (comienza a plantear tareas en el contexto intramatemático).
>
> ***PEB:*** ***Ten en cuenta que no puedo hacer muchas sesiones y no puedo profundizar**... si profundizáramos tanto sería un tema muy extenso… entonces... **dentro del currículum que hay que dar**... **no puedes tampoco**... **profundizar completamente porque hay que dar muchas cosas y el tiempo es**... **un elemento que no siempre corre a favor del profesor.***
>
> ***I:*** *Entonces... **el hecho de que usted proponga unas actividades iniciales contextualizadas y luego cambie a solo matemáticas ¿influye por el tiempo**… **que nos plantea el currículum**?*
>
> ***PEB:*** ***También**.*

También, el factor tiempo influye en su decisión para proponer el tratamiento del tópico límite al infinito desde el punto de vista de las funciones matemáticas en lugar de las sucesiones. De esta forma, el tiempo escolar es un elemento que condiciona la práctica docente del PEB.

Estos protocolos evidencian que el PEB movilizó aspectos del MKT, a niveles diferentes, cuando justificó la planificación del concepto de límite al infinito de una función. En el *CCK* reveló la definición formal del límite desde la aproximación métrica, al explicarla usó la idea de desigualdades en la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y el rango de la función. La planificación que propone plantea el estudio de diversos contenidos matemáticos asociados al tópico, más que en la formación del concepto de límite al infinito de una función. Se apoya de los registros gráfico y numérico, favoreciendo una conversión explícita. En el *SCK* manifestó el estudio del tópico desde tres aproximaciones: dinámica, métrica y óptima. Optó por la dinámica con una breve introducción a la métrica, pues la dinámica favorece una primera aproximación al tópico y la métrica contribuye en definirlo formalmente, desde el punto de vista del rigor de la matemática. Justificó su elección por estudiar el tópico desde el punto de vista de las funciones matemáticas. En el *HCK* afirmó que el tópico es fundamental para el estudio de otros contenidos matemáticos planteados en el programa. Indicó los conocimientos previos para el tratamiento del tópico, tales como la función y el infinito; y los contenidos posteriores (derivada, integral, continuidad de una función). Asimismo, reconoció que las problemáticas asociadas al desarrollo histórico del límite dificultan su aprendizaje. Propuso explorar el concepto de límite al infinito en otros conjuntos. Respecto del *KCS* indicó la importancia de establecer los conocimientos previos para que el estudiante asimile el concepto de límite al infinito de una función. Señaló dificultades con el dominio y el rango de funciones, el estudio del concepto desde la aproximación métrica y la perspectiva de las sucesiones, así como errores en el uso de interpolaciones lineales en situaciones que no lo son. Predijo que los estudiantes no tienen dificultades para transitar de variables discretas a continuas y señaló que el análisis de gráficas y tablas de valores demandan una mayor actividad cognitiva. En el *KCT* reveló las distintas tareas para el estudio del tópico y debatió las del investigador, desde su contexto particular, indicando que son pertinentes pero modificaría las tablas de valores para aumentar su complejidad. Las tareas se enmarcaron en el contexto intramatemático para definir formalmente el tópico y extramatemático (enfermedades epidémicas y relación de la edad y la estatura) para motivar su estudio, dotarlo de sentido y significado. Asimismo, contempló las dos aproximaciones, dinámica para introducirse al estudio del tópico y métrica para potenciar su enseñanza. Considera muy importante establecer los conocimientos previos para el tratamiento del tópico, por ello planteó tareas sobre funciones que cumplen este papel. Reconoció que los registros de representación permiten aproximarse al tópico e interiorizarlo. La forma de organización del trabajo en el aula de clase se establece en equipos y la resolución de las tareas en el uso del software Derive, donde el tiempo destinado para la enseñanza del tópico es variable pero debe permitir la reflexión sobre la tarea para reconocer errores y aciertos.

En el *KCC* evidenció los contenidos planteados en el programa de estudios y la aproximación desde la que se propone la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. Indicó el uso de libros de texto para seleccionar las tareas y mencionó que el tiempo escolar determina la profundidad del tratamiento del tópico límite al infinito.

Pensamos que el uso de una planificación externa favoreció en tener una mayor aproximación al conocimiento que pone en acción el PEB en las decisiones y elecciones para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función, prueba de ello es que cuando analizó la planificación del investigador lo justificó en su contexto particular, el programa de estudios de la Comunidad Autónoma Valenciana (España). Asimismo, contempló como una limitación el uso de interpolaciones lineales en situaciones que no lo son, razón por la cual, propuso solventarlo utilizando el registro gráfico en lugar del numérico. De igual forma, planteó el rediseñó de la planificación del investigador, a través de la incorporación de diversas tareas relacionadas con el uso de gráficas y tablas de valores que demanden una mayor actividad cognitiva del estudiante.

IV.1.3. El conocimiento de matemáticas para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función: El caso del PMC

Las justificaciones presentadas por el PMC sobre la planificación del concepto de límite al infinito de una función posibilitaron determinar el conocimiento que moviliza. Es con base en estas justificaciones que reconocimos la movilización de los seis subdominios del MKT: *El conocimiento común del contenido, especializado del contenido, del horizonte matemático, de los contenidos y los estudiantes, de los contenidos y la enseñanza, de los contenidos y el currículum.*

CCK: Conocimiento común del contenido

El análisis de este subdominio tiene en cuenta el conocimiento que el PMC pone en acción acerca de la definición del concepto de límite, del concepto de límite al infinito; de propiedades y teoremas articulados al tópico; y del cálculo del límite en cualquier registro de representación semiótica, en el sentido de Duval (1993).

Al indagar sobre su definición del concepto de límite, el PMC indica que es un número que tiene ciertas propiedades matemáticas. Al explicarla involucra la idea de *procesos infinitos* asociados a una *situación límite* y alude a contenidos matemáticos vinculados al tópico (número, infinito, cota superior e inferior, inexistencia de límite).

> ***PMC:*** *Para mí el **límite es un numerito**… tiene una propiedad… **si está en mi conjunto numérico bueno es un número específico**… **si esta allá*** (señala el símbolo de más infinito y menos infinito en el eje *y* del plano cartesiano) *es **más infinito menos infinito**… y que este por acá por allí no significa que este símbolo más infinito menos infinito no tenga conectada **una situación límite** también tiene una situación límite pero de esa naturaleza… es decir… el principio de **cosas no acotadas**… siempre **crecientes**… **decrecientes**… o cosas **oscilantes**… **no hay límite allá**.*

Al preguntarle sobre su definición del concepto de límite al infinito de una función, identificamos que el PMC presenta un conocimiento de la definición formal del tópico que se establece desde la *aproximación métrica*. Al describirla, utiliza nuevamente la idea de *procesos infinitos* asociados a una *situación límite*.

> ***I:*** *¿**Qué sería para usted el límite al infinito**?*
> ***PMC:*** *Para mí **límite al infinito**… **es la situación límite de un proceso infinito**… **los procesos infinitos**… **que tienen asociados una situación límite te llevan a la definición del límite al infinito**.*

En el ámbito de la planificación, el conocimiento que el PMC moviliza sobre el tópico se inscribe en la formación del concepto y su definición. Por ello, las tareas que la constituyen están orientadas al estudio del límite al infinito de una función en el conjunto de los números naturales a través del análisis de situaciones geométricas (Anexo 2.3), utilizando el registro numérico, gráfico y analítico sin una conversión entre ellos. Estas tareas demandan la aproximación del perímetro, el área y el volumen de determinadas figuras geométricas, usando el método de exhaución, a fin de obtener un número que representa el límite. Las aproximaciones, por defecto y por exceso, involucran de forma implícita contenidos matemáticos (infinito, función, límite lateral, tendencia de funciones, límite).

SCK: Conocimiento especializado del contenido

Se estudia a partir de la aproximación desde la que se plantea la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función y la justificación de dicha elección desde el punto de vista del rigor de la matemática. Involucra el conocimiento de los procedimientos que llevan a proporcionar una respuesta incorrecta en el cálculo del límite y la justificación de la elección de determinados registros de representación semiótica desde el punto de vista matemático.

Las tareas propuestas por el PMC permitieron reconocer que el estudio del tópico se establece desde la aproximación métrica, la cual está vinculada a diversos conceptos matemáticos que son necesarios para su comprensión pero no los menciona. Al analizar la propuesta del investigador, reconoce que las tareas planteadas se enmarcan desde la aproximación dinámica e indica que esta manera de proceder desfavorece la comprensión del tópico desde la métrica.

> ***PMC:*** ***¿Cómo logramos después que ellos*** (los estudiantes)*...* ***se metan en la cabeza el significado de los épsilon-delta****?...* ***¿el significado de las vecindades o puntos de acumulación o desde la topología con la versión métrica del concepto de límite****?... entonces...* ***yo no estoy diciendo que todo eso se tenga que lograr en una sola*** (planificación)*...* ***algo se tiene que rescatar****.*

Este protocolo revela que para este profesor es fundamental que los estudiantes logren dotar de significado a los elementos involucrados en la definición del tópico desde la aproximación métrica, tales como la notación épsilon-delta y las vecindades o puntos de acumulación.

HCK: Conocimiento del horizonte matemático

El análisis de este subdominio del MKT contempla el conocimiento del PMC sobre la evolución del concepto de límite al infinito de una función a lo largo de las diversas etapas educativas y las similitudes/diferencias que guarda con otros límites, para establecer el fundamento matemático de lo que vendrá después. Involucra las consecuencias matemáticas conflictivas de algo que se ha dicho de manera explícita o implícita. Se analiza a partir de cómo el profesor justifica la importancia del estudio del tópico desde el ámbito curricular (Sosa, 2011) y cómo influye el desarrollo histórico del concepto de límite en sus decisiones al plantear las tareas. Este tipo de conocimiento aporta perspectiva a los profesores en su quehacer profesional (Ortiz et al., 2012). Hemos enmarcado el *HCK* del PMC en tres ámbitos: a) Los contenidos matemáticos (previos y posteriores) asociados al tópico; b) Los distintos tipos de límite que son objeto de estudio en la matemática escolar; y c) El uso inadecuado del lenguaje matemático.

a) *Contenidos matemáticos (previos y posteriores) vinculados al tópico límite al infinito*

Durante la entrevista, señala los contenidos matemáticos previos al tratamiento del concepto de límite al infinito de una función (sucesiones, máximos, mínimos, supremos, ínfimos, sumas infinitas, Teorema de Pitágoras, volúmenes, áreas y perímetros) y en las tareas de su planificación se confirma su uso.

> ***PMC:*** ***Los chavos tienen que saber**… **qué es una sucesión creciente**… **decreciente**… qué significa que la **sucesión** sea **acotada por arriba**… por **abajo** o **superiormente**… **inferiormente**… tiene que tener una definición de elementos de **supremo**… de **máximo**… de **ínfimo y mínimo**… deben de saber que hay **sucesiones que tienen supremo y no tienen máximo**… y hay **sucesiones que su máximo y supremo coinciden**… igual… **el ínfimo con el mínimo**… **cómo se deducen las sumas uno más dos más tres más cuatro más cinco más seis más siete hasta n**… **la fórmula para sumar los primeros n números naturales**… **la suma de los primeros cuadrados naturales**… **los primeros cubos**… **la definición de sucesión geométrica es fundamental y la definición de sucesión aritmética**… digamos **son los elementos mínimos que yo requiero para empezar a meterlos** a la construcción… **de este concepto*** (límite al infinito de una función).

Considera que estos contenidos matemáticos son elementales para el estudio del tópico y en consecuencia establecer la definición matemática correspondiente. Cuando analiza la planificación del investigador, reconoce a la *función inversa* como un tópico previo para la resolución de las tareas.

Por otra parte, el PMC revela un conocimiento sobre los contenidos vinculados al concepto de límite al infinito de una función, cuyo tratamiento es posterior (continuidad, integral definida, propiedades de límites). Se confirma cuando propone, en su planificación, el estudio de las aplicaciones del tópico en el contexto intramatemático (Anexo 2.3).

> ***I:*** *¿**Por qué los estudiantes tienen que aprender límites al infinito**?*
>
> ***PMC:*** ***En todos los conceptos claves del Cálculo Diferencial e Integral está presente el límite al infinito**... va la redundancia **en el mismo tema de límites**... en el tema de **la continuidad**... la **integral definida** es un límite al infinito... o sea **es el límite de una suma de Riemann**... **las propiedades también involucran ese concepto**... entonces **gran parte de la teoría del cálculo... involucra el concepto**.*

Desde nuestra perspectiva, la importancia que tiene la conexión de los contenidos matemáticos, en el proceso de enseñanza, radica en reconocer el sentido que tiene el estudio del tópico y su trascendencia, aspecto que la enseñanza tradicionalista poco favorece.

b) *Los tipos de límite*

El PMC evidencia un conocimiento de los distintos tipos de límite (límite al infinito, límite infinito, límite al infinito en el infinito, límite puntual finito), objeto de estudio en la matemática escolar. Al explicarlas usa la idea de procesos infinitos asociados a una situación límite (resultado finito o infinito).

> ***PMC:*** ***Muchos contenidos de la matemática involucran procesos infinitos... los que tienen asociados una situación límite te llevan a la definición del límite al infinito... los que no tienen asociados una situación límite te puede llevar a la definición de límite infinito**... y hay otro tipo de procesos infinitos... **aquellos** que son **procesos infinitos en el infinito o sea el límite al infinito del infinito... ve como está el esquema... infinito y sus acepciones... procesos infinitos... tópicos de límites infinitos y... límite puntual finito**.*

En particular, las tareas de su planificación se centran en el estudio del concepto de límite al infinito de una función, es decir, de procesos infinitos que tiene como resultado un número finito. Las actividades que plantea involucran el análisis de situaciones geométricas usando el método de exhaución.

c) *El uso inadecuado del lenguaje matemático*

Una limitación que el PMC identifica en la planificación del investigador, desde el punto de vista matemático, es el uso inadecuado del lenguaje para nombrar a los valores numéricos. Sin profundizar en ello, indica que es conveniente clarificar medidas para que los estudiantes comprendan el contexto (enfermedades epidémicas) desde la que se plantean las tareas.

PMC: ***Aquí*** (PI: Actividad 6, ítem 1) ***nada más****...* ***la población en miles de millones****.*
I: *Aja en millones ¿no?*
PMC: ***Allí le puse una marquita****... es que mira...* ***está bien las cantidades son grandes*** *¿no?... pero...* ***es bueno ir clarificando medidas****... este contextos.*

Esto es importante, ya que uno de los objetivos de la instrucción matemática es el uso adecuado del lenguaje matemático para comunicar los resultados y procedimientos en la resolución de las tareas.

Desde un punto de vista matemático, el HCK le permite al PMC tomar decisiones sobre el diseño de las tareas para el aprendizaje del tópico.

KCS: Conocimiento del contenido y los estudiantes

Este subdominio del MKT se estudia a partir del conocimiento que tiene el PMC del proceso cognitivo de los estudiantes ante determinadas tareas o situaciones de enseñanza que se les plantean. Se analiza a partir de cómo el profesor predice que las tareas pueden ser de interés o no a los estudiantes por el contexto, de los errores y las dificultades que pueden encarar a fin de prevenirlas o en su caso que las superen, así como de los posibles obstáculos de tipo didáctico y/o cognitivos que pueden manifestarse. Presentamos este conocimiento en el marco de cuatro aspectos: a) Influencia del contexto en el aprendizaje del estudiante, b) Errores y obstáculos que presentan los estudiantes en el tratamiento del tópico, c) Procedimientos que ponen en juego los estudiantes, y; d) Evaluación del aprendizaje.

a) *La influencia del contexto en el aprendizaje del estudiante*

Las tareas planteadas se enmarcan en dos contextos: *intramatemático* y *extramatemático*. Para el desarrollo del tópico, propone tareas en el contexto *intramatemático* que demanda el análisis de situaciones sobre el cálculo de áreas y perímetros de figuras geométricas usando el método de exhaución. Esta forma de proceder, ayudaría al estudiante comprender los elementos involucrados en la definición formal del tópico, tales como la notación épsilon delta y las desigualdades; y en consecuencia dotarlo de sentido y significado desde la propia matemática.

> ***I:*** *¿**A qué se debe*** (que la PC involucre sucesiones)*?*
> ***PMC:*** ***El modelo clásico*** (la definición del límite al infinito desde la aproximación métrica) *ya **contiene sucesiones**… pero cómo yo aprovecho el hecho de que mis procesos infinitos se conectan con una situación límite… **ya sé el papel que juega el para todo épsilon… ya mis alumnos saben… que ya no importa agarrar un épsilon** punto uno que es el que nos interesa… **los chiquitos mayores que cero… porque nos dicen cómo se precisa de forma rápida la convergencia**… le digo no pues que tome épsilon igual a un millón [o un billón] no pasa nada mientras entiendan que **este valorcito*** (se refiere al épsilon) ***es fundamental**… o sea se logra **que a partir de n grande igual a mil ya son despreciables las diferencias en cuanto al comportamiento del proceso infinito**… yo **al menos ya habré logrado a estas alturas una madurez con los muchachos**.*

Al analizar las tareas de la planificación del investigador, el PMC reconoce que se enmarcan en el contexto *extramatemático*. Señala que son interesantes porque contribuyen a que el estudiante dote de sentido y significado al tópico, en un ámbito diferente a la matemática, ya que involucran explícitamente un modelo matemático (función logística) y un contexto específico (enfermedades epidémicas). Además, motivan la reflexión sobre los procedimientos y la argumentación de las soluciones, lo cual es relevante desde el punto de vista didáctico.

> ***PMC:*** *Aquí* (PC: Actividad 6, inciso c) *te puse*… ***me parecen interesantes algunas actividades que tú propones***… ***está bien eso de estudiar***… ***la curva logística***… ***el control de enfermedades***… *eso* ***está muy atractivo porque muchas veces el concepto de límite no aparece explícitamente en un modelo matemático así como fórmula construida***… ***muchas veces*** *aparece con datos entonces* ***hay que estudiar gráficas***… ***interpretar allí tablas*** *y no significa que no estamos trabajando el límite al infinito… está allí presente… por eso allí le puse* ***las actividades que tú pones me llaman mucho la atención***.

Estos argumentos presentados por el PMC lo llevan a optar por algunas tareas propuestas por el investigador. No obstante, reconoce que el contexto *extramatemático* es limitado para la enseñanza del tópico porque desfavorece definirlo desde la aproximación métrica, provocando una comprensión limitada; es incoherente con la realidad dado que al inicio del registro, la cantidad de personas infectadas debe ser distinta de cero; y el dominio y el rango de la función logística están acotadas al conjunto de los números naturales, pero se emplean los reales.

> ***PMC:*** ***A pesar de que nosotros iniciamos***… ***con situaciones problema el objetivo es elevar y desarrollar la abstracción en el estudiante***… *o sea que* ***él matematice las cosas***… ***en su proceder y en su utilización del concepto***… ***no siempre va estar haciendo gráficas***… ***porque él va desarrollando su conocimiento de eso que va explorando***… *y en ese nuevo contenido pues* ***está allí presente el concepto.***
>
> …
>
> ***PMC:*** ***El tratamiento*** (de la enfermedad epidémica) ***a partir del tiempo cero*** (señala la gráfica de la PI: Actividad 4, ítem 1)... ***no inicia con cero afectados***… ***o sea a lo mejor cuando se empieza a tratar ya había treinta y siete*** (se refiere a los infectados)... ***y después pues se prolonga el tiempo y se ve el número de infectados o la propagación de la enfermedad***.
>
> ***I:*** ***Tendría más sentido un comportamiento de este estilo*** (se refiere a que en el tiempo cero la cantidad de población infectada es diferente de cero).
>
> ***PMC:*** ***Sí***… ***claro***… ***la variable independiente***… ***según tu modelo*** (función logística) ***si tiene sentido para todo t*** (variable independiente de la función logística cuyo dominio es el conjunto de los números reales)… ***pero como***… ***este modelito*** (función logística) ***está asociado a un problema*** (enfermedades epidémicas) ***hay que tener cuidado allí***.

Es decir, las justificaciones presentadas por el PMC revelan que el contexto intramatemático ayuda al estudiante comprender la definición del tópico desde la aproximación métrica, mientras que el extramatemático desde la dinámica. Para este profesor la importancia que tiene el estudio del tópico se establece en la formación matemática del estudiante y las aplicaciones que tiene en su entorno.

> ***I:*** *¿**Por qué los estudiantes tienen que aprender límites al infinito**?*
> ***PMC:*** ***Para que se formen** pero **además por las aplicaciones que puede tener o que tiene**.*

Nuestra postura respecto a estos dos contextos, *intramatemático* y *extramatemático*, es que contribuyen a un estudio significativo del tópico cuando se combinan, favoreciendo la comprensión de la definición formal y el estudio de las aplicaciones en otras áreas del conocimiento.

Estos protocolos ponen de manifiesto la importancia que tiene la selección de los contextos para el estudio del concepto de límite al infinito de una función a fin de que el estudiante reconozca su utilidad.

b) *Los errores y obstáculos que presentan los estudiantes*

Durante la entrevista, el PMC evidencia un conocimiento de los errores y los obstáculos que pueden emerger en la resolución de las tareas sobre el concepto de límite al infinito de una función.

Sin profundizar en ello, considera que los errores cometidos por los estudiantes en el aprendizaje de un tópico matemático deben ser objeto de análisis, a fin de reorientar la enseñanza y motivarlos.

En la resolución de las tareas sobre el tópico límite al infinito, el PMC vislumbra dos tipos de obstáculos: *cognitivo* y *didáctico*. En el aspecto *cognitivo*, señala que la propia definición del concepto de límite al infinito de una función, desde la aproximación métrica y el punto de vista de las sucesiones planteada por Heine-Borel, demanda un razonamiento mayor en el estudiante al involucrar contenidos matemáticos de tipo topológico. Por ello, su planificación plantea el estudio del tópico de forma gradual.

> ***PMC:*** ***Es un poco complicado entender la idea al inicio*** (el sentido que tienen las tareas de la PC)... *pero una vez que se instaura se facilita el proceso*... ***y te voy a decir por qué es complicado... existe una definición de límite al infinito por sucesiones y la establece Heine-Borel***... *pero no la establecemos así... Heine-Borel* ***mete este conceptos topológicos... conjuntos abiertos y todo ese rollo yo no digo que*** *[este* ***mal****]... está perfecto* ***pero*** *bueno* ***hay que primero saber que el chavo ya entiende cuál es la idea del trabajo y cómo se puede llegar y después se le pone la formalización al nivel riguroso que uno quiera***.

Por cuanto a los obstáculos de tipo *didáctico*, el PMC reconoce que la enseñanza tradicionalista ha favorecido el estudio de los procesos infinitos usando la teoría del finito, provocando que los estudiantes tengan interiorizado la idea de finitud y en consecuencia una escasa comprensión del tópico. En el marco de la planificación contempla el análisis de procesos infinitos asociados a una situación límite, es decir, la resolución de tareas que demandan el estudio de situaciones geométricas usando el método de exhaución y que tienen como finalidad establecer la definición del tópico, en un primer momento, en el conjunto de los números naturales y en otro desde los reales.

> ***I:*** ***Hay un cambio de notación***.
> ***PMC:*** ***Es allí*** (PC: Actividad 5, inciso a) ***donde veo el cambio*** (de los números naturales a los reales) ***y ya no se me complica porque ya le di mucho a este*** ($\lim_{n\to\infty} f(n) = l, n \in \mathbb{N}$) *con dos problemas* (PC: Actividad 3, inciso a y b)... *entonces yo creo que* ***es una extensión de dominio***.

Su experiencia docente le permite reconocer que la planificación del investigador puede inducir a obstáculos de tipo didáctico. Las razones que establece son las siguientes: 1) el planteamiento de tareas que demandan el cálculo de valores del dominio de la función logística a partir de su imagen, exige un mayor razonamiento; 2) el uso de cantidades continuas en un contexto (enfermedades epidémicas) que involucra únicamente valores discretos, imposibilita diferenciar el trabajo desde el propio contexto y desde el punto de vista matemático; 3) la elaboración e interpretación de gráficas, en un ambiente de lápiz y papel, cuando la función logística involucra números decimales, es complejo; y 4) la movilización del contexto intramatemático al extramatemático para el análisis del comportamiento de la función logística puede inducir a interpretaciones erróneas.

> ***PMC:*** ***El modelito matemático*** *ese* ***si lo pueden hacer*** *como quiera* ***pero cuando uno regresa a interpretar el problema****...* ***pues hay necesidad también de interpretar el sentido de las variables****… desde mi punto de vista* ***el estudiante al ver estas cosas*** *pues...* ***él dice que su función es matemática****…* ***él razona así y hace cosas así y al final cuando le preguntas qué paso con el problema****...* ***se da el caso de que pueda decir quién sabe pero mi función se comporta así****.*

Estos aspectos llevan al PMC a establecer la necesidad de rediseñar las tareas. Las modificaciones que propone contemplan el estudio de la asíntota horizontal a partir del contexto de las enfermedades epidémicas y el análisis de la función logística involucrando más valores numéricos.

c) *Los procedimientos que ponen en juego los estudiantes*

Con base en su práctica docente, el PMC prevé los procedimientos que ponen en juego los estudiantes en la resolución de las tareas. En el análisis de la planificación del investigador, señala que es probable que los estudiantes: 1) no recuerden el significado de la asíntota horizontal, obstaculizando el desarrollo de las tareas; 2) relacionen las gráficas de la función logística con su expresión analítica, debido al desarrollo de la actividad 1 deduzcan la expresión analítica de la función logística a partir de las tablas de valores (Anexo 2.4); y 4) reconozcan que conforme aumenta el tiempo indefinidamente la propagación de la enfermedad tiende a estabilizarse porque fue temporal o hubo intervención de las autoridades. La siguiente unidad de análisis evidencia este último aspecto.

> ***PMC:*** *Tomando en cuenta los datos* ***qué comportamiento presenta la cantidad de población infectada cuando el tiempo aumenta*** (PI: Actividad 3, ítem 2, inciso b)... ***van a aproximar más o menos de forma análoga como procedieron anteriormente*** (se refiere a las actividades 1 y 2 de la PI)... *que* ***para cierto valor****...* ***antes de cierto tiempo****...* ***la propagación****…* ***se dispara un poco o crece más rápido que a partir de cierto valor en el***

> ***tiempo*** *¿no?...* ***se estabiliza... y las interpretaciones en el contexto del problema*** *pues otra vez...* ***a lo mejor hubo intervención... la enfermedad fue temporal*** *no sé... factores que... se van comentando ¿no?*

Respecto a su planificación, predice que los estudiantes cuestionen si el concepto de límite al infinito de una función puede verse como un teorema.

> ***PMC:*** *Alguien me decía* (se refiere a los estudiantes) *oye y...* ***la definición del límite al infinito ¿no se puede ver como un teorema?... le digo no...*** *cómo se va ver como teorema* ***es imposible...*** *dice pero* ***es que está en términos de épsilon y todos los teoremas casi tienen eso*** *el límite...* ***si pero... este no tiene esa categoría*** *estas son las razones*.

Su práctica docente le permite reconocer que los estudiantes poseen ideas intuitivas sobre el tópico, las cuales deben ser aprovechadas en la enseñanza. Asimismo, prevé un desarrollo de la competencia numérica y se cuestiona cómo fortalecerlo en los registros de representación gráfico, analítico y lenguaje coloquial.

> ***PMC:*** ***Él*** (se refiere al estudiante) ***si puede identificar en cuatro registros... la labor se le facilita más... en el numérico...*** *bueno* ***cómo lo llevo... a que se fortalezca en aquél*** (en otro registro de representación semiótica).

d) *La evaluación del aprendizaje*

Para determinar el alcance del objetivo planteado en el estudio del tópico, el PMC contempla la participación de los estudiantes; la resolución de las tareas; las cuatro fases en las que se organiza su planificación (aproximación, formalización, identificación y aplicación); y la resolución de problemas que demandan la aplicación del tópico en diversos contextos y la justificación del límite usando la notación épsilon-delta. La valoración de estos aspectos facilita la toma de decisiones en el estudio del tópico.

> ***I:*** ***Cómo evalúa el conocimiento ya adquirido del límite al infinito***.
> ***PMC:*** *Suponemos que conduje el proceso...* ***revisé las actividades... valoré las participaciones...*** *todo... hay dos maneras...* ***una de las maneras es*** *[propiamente]* ***poner a trabajar al chavo con el concepto y su aplicación...*** *aquí* (PC) *ya cuando paso por esto* (fase 4 de la PC)... ***puedo proponerles algunos problemas donde mi objetivo... no sea que calculen***

> ***sino que*** *el objetivo es que* ***construyan un modelo matemático que permita estudiar la situación****… hasta allí puedo llegar… o* ***les puedo pedir mira****…* ***este es el valor de este límite****…* ***quiero que me ayudes a justificarlo****.*

Para el PMC la evaluación del aprendizaje debe ser continua y contemplar distintos criterios, a fin de tener una mejor aproximación del aprovechamiento del estudiante.

KCT: Conocimiento del contenido y la enseñanza

Se analiza a partir de cómo el PMC organiza las tareas para el estudio del tópico y justifica la elección de los registros de representación semiótica, desde el punto de vista metodológico, a fin de que los estudiantes comprendan el concepto de límite al infinito de una función. Se estudia a partir de cómo el profesor organiza el trabajo en el aula de clases y su justificación. Desarrollamos este conocimiento en el marco de tres aspectos: a) La secuenciación de las tareas; b) La justificación de la elección de los registros de representación semiótica, desde el punto de vista didáctico; y c) La organización del trabajo en el aula de clases.

a) *La secuenciación de las tareas*

Para el PMC es muy importante la exploración de propuestas de enseñanza porque reconoce que la enseñanza tradicionalista poco contribuye a dotar de sentido al tópico. En ese sentido, su planificación se establece desde una orientación metodológica, cuyo diseño es producto de su tesis doctoral, que involucra cuatro fases: *aproximación*, *formalización*, *identificación* y *aplicación* (Anexo 2.3). Estas fases determinan la secuenciación de las tareas cuyo objetivo es la asimilación del concepto de límite al infinito de una función.

> ***I:*** *¿**Cuál es el objetivo principal de esta planificación*** (PC)*… es decir… qué es lo que usted quiere lograr con esto?*
> ***PMC:*** *El objetivo principal es* ***la asimilación del límite al infinito****…* ***para lograr la asimilación se deben de cumplir cuatro cosas*** (se refiere a las fases de su planificación)*… son las que puse por allí* (en la PC)*… o sea la*

> ***aproximación al concepto**... **formalización** del concepto... **identificación** del concepto **y aplicación** del concepto desde mi posición.*

La primera fase, aproximación, propone el cálculo del límite de funciones con dominio en los naturales y la identificación de los límites al infinito; involucra las tareas 1 y 2. El apartado presenta algunos límites que son objeto de estudio en Cálculo I.

> ***I:*** *¿**Cuáles son las actividades que pertenecen a la primera fase que usted llama aproximación**?*
>
> ***PMC:*** ***La primera fase es** digamos **toda la actividad uno**... que son **cálculos con límites en dominios naturales**... menciono una clasificación... **con más fortaleza es la actividad uno y la actividad dos**.*

La segunda fase, formalización, pretende establecer la definición del tópico desde el punto de vista del rigor de la matemática. Las tareas que incluye son la 3, 4 y 5 inciso a. La tarea 3 propone el análisis de dos problemas de tipo geométrico sobre la aproximación de áreas y perímetros para caracterizar los procesos infinitos que tienen asociado una situación límite. Demanda el estudio de problemas como la Curva de Koch y Aquiles y la Tortuga para analizar los procesos infinitos que no tienen asociado una situación límite y diferenciarlos de los que sí tienen. La tarea 4 plantea la discusión de las características de los procesos infinitos y la situación límite. La tarea 5, inciso a, induce a los estudiantes a establecer la definición del tópico límite al infinito en el conjunto de los números reales. Esta fase adquiere relevancia en el estudio del concepto de límite al infinito de una función porque plantea actividades para su desarrollo.

> ***PMC:*** *¿**Qué es la etapa de formalización**?... **se aprovecha la actividad de tipo un tanto intuitivo que se hace aquí*** (PC: Actividad 3) ***y el objetivo principal llegar a la definición del concepto**... donde el meollo del asunto es **en el caso de dominios naturales**... porque **el otro saltito lo hacemos por extensión de dominios**.*

La tercera fase, identificación, propone caracterizar los procesos infinitos que tienen asociado una situación límite. Involucra la tarea 5, inciso b, que plantea el cálculo de límites al infinito y su justificación.

I: ***La actividad cinco*** (PC: Actividad 5)*…* ***¿a qué fase pertenece****?*
PMC: ***A la fase tres****…* ***identificación****… aquí* (PC: Actividad 5, inciso b)*… analizo los límites… todos* ***los problemas tienen conectado una situación límite los voy metiendo a que ellos digan****…* ***qué los caracteriza****…* ***¿qué diferencia los procesos infinitos que tienen o no situación límite****?*

La cuarta fase, aplicación, presenta la resolución de problemas en el contexto intramatemático y extramatemático y el desarrollo de la teoría asociada al tópico (propiedades de límites), usando la definición clásica épsilon-delta. Contempla la actividad 6 y 7.

I: ***La última fase*** (aplicación)*…* ***¿es la siete*** (PC: Actividad 7)*?*
PMC: ***No****…* ***desde aquí mira*** (PC: Actividad 6)*… aquí* (PC: Actividad 5, inciso b) *acaba digamos todo lo anterior* (fase de identificación).
I: ***¿La actividad seis****?*
PMC: ***Claro los alumnos analizan problemas dentro de la matemática y fuera que involucran el concepto de límite al infinito construyen los modelos matemáticos****…* ***los analizan****…* ***y se dan solución a dichos problemas****.*

Culminadas las cuatro fases de su planificación, el PMC propone el estudio de los teoremas asociados al concepto de límite al infinito de una función pero no los menciona.

I: ***¿En qué momento****…* ***presenta definiciones****…* ***teoremas****?*
PMC: ***Ya que haya formado la definición*** *ya ahora si vienen todos los teoremas.*
I: ***¿Es antes de la aplicación****?*
PMC: ***No****…* ***ya pasó la aplicación****… ya fuera de ello…* ***ahora si ponles teoremas todos los que quieras****…* ***antes no****… porque no acabo…* ***imagínate establezco apenas la definición y el teorema ¿no****?… o sea* ***asimilo el concepto y después analizo todas sus propiedades****…* ***no pasa nada****.*

Con base en estas fases, reconoce que las tareas planteadas por el investigador permiten identificar que se trata del concepto de límite al infinito de una función, es decir, diferenciarlo de otros tipos de límite; por ello, acepta desarrollarlas.

I: ***¿La planificación dada*** (se refiere a la PI) ***contribuye****…* ***al aprendizaje del límite al infinito****?*
PMC: *Desde mi punto de vista…* ***contribuye a favorecer un cierto nivel de desarrollo en el proceso de asimilación del límite al infinito pero no creo que ya****… porque* ***al revisar las actividades****…* ***da bien para un cierto nivel de desarrollo****… es la* ***aproximación al concepto****… al menos* ***el alumno ya***

> ***a estas alturas**… **si se logra que él identifique que** no se trata de un límite infinito… tampoco se trata de un límite finito puntual o puntual finito… no se trata de un límite infinito al infinito… **se trata de este*** (se refiere al concepto de límite al infinito de una función)... ***con estas características***.

No obstante, reconoce que la propuesta del investigador es limitada para un tratamiento profundo del tópico límite al infinito. Las justificaciones que presenta se establecen en dos aspectos: 1) la función logística utilizada tiene un comportamiento parecido en todos los casos, poco varían sus parámetros; y 2) las preguntas planteadas son similares, en consecuencia también las respuestas. Por ello, plantea rediseñar las actividades con base en estos aspectos.

> ***PMC:*** ***Al revisar toda la actividad*** (se refiere a la PI)... *yo entiendo que pues es estudiar esta curva* (función logística)*… la entiendo pero casi en todas las actividades* (de la PI)*... al final… hay dos donde tu preguntas… creo que el modelo no sé… la fórmula algo así…* ***todas son de esa misma clase y nada más varía el numerito*** *este* (se refiere a uno de los parámetros de la función logística).

Este profesor propone estudiar el límite finito a partir del límite al infinito con el propósito de dotarlo de significado, pues reconoce, desde su experiencia docente, que la enseñanza tradicionalista poco favorece la conexión de estos dos tópicos.

> ***PMC:*** ***Los diseños para el tratamiento del concepto de límite a partir del**… **límite al infinito**… se **ganaría mucho**… primero **la gente entendería cuál es el significado y porque estudiar digamos este concepto***.

b) *La justificación de la elección de los registros de representación semiótica: numérico, gráfico y analítico*

Durante la entrevista, el PMC señala que los registros de representación semiótica son muy importantes en el estudio del tópico. Desde su punto de vista, facilitan el acceso al objeto matemático y su comprensión, dado que en el aula de clases se tienen estudiantes con distintas competencias matemáticas. Esto lo sabe por la revisión de la literatura científica.

> ***PMC:*** ***Los registros son fundamentales****...* ***yo sí coincido con Raymond Duval****... dice... que* ***un niño o un adulto o una persona aprende****...* ***cuando él identifica un objeto****...* ***un concepto****...* ***en sus diferentes registros de representación y cuando él es capaz de hacer la transición de un registro a otro sin que pierda digamos la esencia de la idea fundamental acerca de la descripción o comportamiento de ese objeto matemático****...*

Las tareas de su planificación contemplan tres tipos de registros de representación semiótica: *numérico*, *gráfico* y *analítico*. El registro *numérico* se favorece a través de la elaboración de tablas de valores para aproximar el perímetro y el área de los cuadrados inscritos, así como el de la circunferencia y el círculo, respectivamente (Ver anexo 2.3); el registro *gráfico* con la realización de gráficas en el plano cartesiano a partir de las tablas de valores; y el registro *analítico* mediante el uso de la notación matemática correspondiente para establecer la definición formal del concepto de límite al infinito de una función.

> ***I:*** *¿****Cuáles son los registros de representación semiótica del límite al infinito en específico que son los que digamos favorece****?*
>
> ***PMC:*** *Son básicamente...* ***el numérico****...* ***yo aprovecho que estas ideas*** (se refiere al cálculo de áreas de figuras inscritas, ver PC: Actividad 3, inciso a y b) ***las vayan planteando allí en una tablita y vayan viendo los comportamientos****...* ***el gráfico****…* ***hago la comparación de éstas cosas*** (figuras de la PC: Actividad 3, inciso a y b)... ***se ponen allí****...* ***curvas o puntos si son sucesiones*** (realizan gráficas del comportamiento que presentan las figuras de la PC: Actividad 3, inciso a y b)... ***aquí*** (PC: Actividad 3, inciso a)... *van anotando... las interpretaciones... las justificaciones y... yo le* ***voy dando un intento de formalidad*** *a esas interpretaciones...* ***para que se vaya facilitando después en el desarrollo del proceso y en el camino hacia el concepto de límite al infinito****.*

Si bien estos registros juegan un papel relevante en el aprendizaje del tópico, el PMC reconoce que debe prescindirse de ellos porque sirven únicamente para acceder al objeto matemático y no son el foco de las tareas planteadas.

> ***PMC:*** *...* ***si prescindimos de esos registros él entiende el objeto****... él entiende* ***la definición*** *del objeto... si lo logramos ya la hicimos...* ***la idea es****...* ***prescindir de esas cosas****...* ***en un primer momento si tenerlas****...* ***porque nos dan elementos para saber si él va evolucionando en esa comprensión****... por eso creo que son importantes.*

c) *La organización del trabajo en el aula de clases*

La forma de organización del trabajo en el aula de clases se establece de manera *individual* y en *equipo* (dos integrantes). Su justificación remite a la cantidad de estudiantes de su contexto particular, la UAM-UAGro, donde en promedio el número de alumnos por aula de clases es veinte.

> ***I:*** *¿**Cómo desarrollan las actividades** por equipos… individual?*
> ***PMC:*** ***Casi siempre los pongo por parejas**… **para**… **el análisis de los problemas estos de tipo geométrico**… **hay actividades*** (en la PC) ***que ellos hacen solitos pero hay actividades donde son**… **en conjunto**… lo que pasa es que **nuestros grupos son chiquitos aquí en la licenciatura**.*

Respecto a los equipos de trabajo, coincide con el investigador en que éstos deben incluir al menos un integrante que tenga conocimientos consistentes en Cálculo Diferencial y propone incorporar, en cada equipo, un estudiante cuya habilidad matemática este desarrollada en el registro numérico. Esta forma de proceder posibilitaría generar debate entre los estudiantes y en consecuencia fortalecer sus competencias matemáticas.

Su papel en el aula de clases se instaura a nivel de orientador en la resolución de las tareas para que los estudiantes se apropien del contenido matemático. Otra de sus funciones consiste en institucionalizar el conocimiento matemático, es decir, establecer la definición formal del tópico usando la notación matemática correspondiente.

> ***I:*** ***¿Cuál es el papel principal que usted desempeña en el aula durante el desarrollo de esta lección*** (se refiere a la PC) *y cuál es el del estudiante?*
> ***PMC:*** ***Ser un orientador del proceso**… **yo tengo**… **la más grande responsabilidad de que las cosas puedan salir bien o puedan truncarse**… **cuando ya llegamos al contenido matemático**… en particular **la definición**… esa definición **tiene que ser sólida**… tiene que **darnos como generalización** de lo que tú llamas tópico **del límite al infinito**.*

La resolución de las tareas se establece en un ambiente de lápiz y papel y el tiempo destinado para el estudio del tópico es variable. El PMC contempla diez horas, mientras que el investigador tres horas y veinte minutos. En el análisis de la propuesta del investigador, señala que el tiempo considerado es factible si el profesor cuenta con una adecuada formación matemática y los estudiantes poseen los conocimientos previos para el tratamiento del tópico.

> ***I:*** *Para el desarrollo de las actividades* (de la PI) *se está considerando dos sesiones de 100 minutos cada uno… ¿**será adecuado este tiempo y por qué**?*
>
> ***PMC:*** *Yo creo que **sí porque trabajarías cuatro módulos** en… la práctica son cuatro módulos… **es factible pero depende mucho… de dos cosas… primero el profesor tiene que estar formado este desde el punto de vista matemático… sobre el contenido de fondo es importante**… sus **diferentes representaciones cómo se conecta uno de otro**… sus **interpretaciones** y la **asociación con el problema** que está analizando es importante eso es lo primero y… **lo segundo… debe asegurarse como algunos conocimientos básicos**… que **el alumno tenga para poder hacer operativo…. cuatro módulos será adecuado para incluso platicar... exponer… aclarar cosillas hacer otras generalizaciones de las que se puedan desprender**.*

De esta manera, el contexto real del aula de clases (la cantidad de estudiantes y las herramientas didácticas disponibles en la institución) condiciona la manera en la que se enseña el tópico límite al infinito de una función.

KCC: Conocimiento del contenido y el currículum

Este subdominio del MKT se estudia a partir de los documentos curriculares y los materiales de enseñanza que utiliza el profesor para plantear las tareas sobre el concepto de límite al infinito de una función. Se analiza a partir del conocimiento que moviliza el PMC acerca del enfoque propuesto para el tratamiento del tópico y los contenidos matemáticos relacionados; y cómo el tiempo escolar influye en sus decisiones. Presentamos este conocimiento en el marco de dos aspectos principales: a) El programa de estudios de la UAM-UAGro; y b) Los materiales de enseñanza utilizados para plantear las tareas.

a) *El programa de estudios de la UAM-UAGro*

La planificación presentada por el PMC se enmarca en su contexto particular, el programa de estudios de la UAM-UAGro (México) que plantea la enseñanza del concepto de límite de una función. Aún cuando no establece de forma explícita el tratamiento del concepto de límite al infinito de una función, el PMC sabe que su estudio es importante desde el punto de vista matemático, ya que es fundamental para la introducción de otros contenidos del Cálculo Diferencial e Integral y del Análisis Matemático. A partir de este programa opta por una enseñanza del tópico desde la aproximación métrica. En el análisis de la planificación del investigador reconoce que el foco es el estudio del concepto de límite al infinito desde la aproximación dinámica. Por ello, señala que esta propuesta es distinta al que exige el programa de estudios de su contexto.

> ***I:*** *¿**Qué tan apegado se encuentra el objetivo de esta planificación*** (se refiere a la PI) ***respecto al currículum mexicano**?*
>
> ***PMC:*** *Pues mira obviamente* ***esto*** (se refiere a la PI) ***es de entrada*** *pues* ***distinto a****...* ***cómo se propone*** *digamos...* ***el trabajo con el concepto en el currículum****...* ***no tiene****...* ***una correspondencia directa en el sentido de que el punto central del currículum mexicano****… en particular el de la universidad* (UAM-UAGro)*...* ***es centrarse en el estudio del límite puntual****… generalmente* ***el límite al infinito****...* ***no es el meollo del asunto en el tratamiento del concepto de límite****... casi siempre viene propuesto el trabajo de la siguiente manera...* ***una introducción intuitiva o definición intuitiva del límite****.*

Durante la entrevista, pone de manifiesto que el estudio del concepto de límite al infinito de una función está asociado al del límite de una función. Lo considera una deficiencia curricular, pues conlleva a que los profesores tomen decisiones en el tratamiento del tópico, tales como la profundidad de su estudio y el desarrollo de la teoría necesaria para abordarlo.

> ***I:*** *¿**Qué objetivo plantea el currículum respecto al concepto de límite al infinito**?*
>
> ***PMC:*** ***No está explícito****...* ***yo creo que los que hicieron eso*** (el programa de estudios)*...* ***parten del principio de que la gente que ve un programa****...* ***debe entender y desmenuzar la idea****... yo he visto a colegas... incluso a mí me ha pasado...* ***los desarrollos así como están*** (planteados en el programa de estudios)*...* ***llega un momento en el que no tengo el desarrollo de la teoría necesaria para estar en esta parte*** (se refiere a la secuenciación de los contenidos matemáticos)*... me veo en... una etapa de preocupación... y ahora cómo le hago...* ***supuestamente yo trabajo esas cosas*** (contenidos del Cálculo Diferencial)*...* ***pero aquí*** (se refiere a cualquier concepto matemático) ***necesito en particular este principio esta definición o este teorema*** *y* ***claro que no me regreso****...* ***ese es el problema de que no están desglosadas muchas cosas*** (en el programa de estudios)*...* ***están enunciadas de manera general****...* ***el que lo hace*** (los que diseñan los programas de estudios) ***piensa que la gente lo entiende****.*

Otra deficiencia curricular que reconoce es la desvinculación del estudio del concepto de límite finito con el del límite al infinito.

b) *El libro de texto y la literatura científica*

Su experiencia como profesor de matemáticas e investigador en el área de la ME le permite contemplar diversos recursos didácticos para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. Por ello, las tareas que plantea provienen de dos fuentes principales: el libro de texto y la literatura científica.

El PMC admite que los libros de texto son útiles para la selección de las tareas. En el marco de la planificación, reconocemos que las actividades planteadas provienen de libros de texto de Geometría, Cálculo Diferencial e Integral y Análisis Matemático, las cuales son rediseñadas con base en el objetivo planteado.

> ***I:*** *¿**Las actividades**... usted las crea... son de su diseño o... **las retoma de algún lugar**?*
> ***PMC:*** *Ah no para nada yo te puedo asegurar que **ninguna es de mi creación**... por ejemplo **esta actividad*** (PC: Actividad 3, inciso a)... ***no tengo precisión de qué libro la haya retomado**.*
> ***I:*** *¿Ah pero **es de un libro**?*
> ***PMC:*** ***Si... son de libros clásicos que hablan de sucesiones... que hablan de cálculo**.*

Para este profesor es insuficiente el uso del libro de texto, por ello, contempla actividades que provienen desde la literatura científica (Anexo 2.3).

> ***I:*** ***Esta actividad*** (PC: Actividad 3, inciso a)... ***para mí es nueva**.*
> ***PMC:*** *Ah ok... **hay un grupo de investigación que hizo diseños para la Matemática Educativa... está publicado en el artículo de 2005**... es un señor que está en Canadá... **Fernando Hitt y su equipo de trabajo**... y la que graduó en el 2005 es la que... analiza esta figurita* (PC: Actividad 3, inciso a)... ***este grupo de investigadores fue el que hizo... algunos diseños para estudiar el cálculo en general y hablaban de procesos infinitos y de otras cosillas**... hay muchas situaciones por ejemplo están... la espiral y todo eso... **esta idea nace de tomar cuadrados dividir los lados a la mitad y tomar otros cuadrados dividirlos a la mitad y formar otros cuadrados y de allí salen estas variantes**.*

Esta forma de proceder es relevante para y en la formación de los profesores de matemáticas, ya que desde nuestra perspectiva el uso de diversos materiales para la planificación de la enseñanza de un tópico en particular, brinda una perspectiva más amplia sobre su tratamiento.

Los protocolos señalados muestran que el PMC manifestó, a niveles diferentes, aspectos del MKT en la planificación del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza. En el *CCK* presentó la definición formal del tópico desde la aproximación métrica, al explicarla utilizó la idea de procesos infinitos asociados a una situación límite y alude a contenidos matemáticos vinculados al tópico. En su planificación incorpora tareas centradas en establecer la definición del concepto de límite al infinito de una función, utilizando el registro numérico, gráfico y analítico. En el *SCK* manifestó que el concepto de límite al infinito puede estudiarse desde dos aproximaciones: dinámica y métrica En particular, optó por la métrica debido al nivel educativo en el que se encuentra inmerso. En el *HCK* reveló los contenidos matemáticos (previos y posteriores) vinculados al concepto de límite al infinito. Reconoció los distintos tipos de límite que son objeto de estudio en la matemática escolar e identificó un error en el uso del lenguaje matemático. En el *KCS* predijo que los estudiantes se interesarán en la resolución de problemas en el contexto intramatemático y extramatemático. Asimismo, contempló las dificultades siguientes: la identificación del sentido que tienen las tareas, el cálculo de valores del dominio de la función logística a partir de su imagen, la elaboración de gráficas en un ambiente de lápiz y papel cuando involucran números decimales y el estudio de los procesos infinitos usando la teoría del finito. También, mencionó cómo podrían actuar los estudiantes ante las tareas planteadas: tienden a olvidar el significado de la asíntota horizontal, deducen la expresión analítica de la función logística y la relacionan con su gráfica e indican que conforme aumenta el tiempo indefinidamente la propagación de la enfermedad se estabilizó porque fue temporal. Indicó que la evaluación del aprendizaje debe contemplar diversos instrumentos y realizarse en distintos momentos. Respecto del *KCT* indicó que las tareas planteadas se organizaron en cuatro fases para la asimilación del concepto de límite al infinito de una función: aproximación, formalización, identificación y aplicación. Manifestó que los registros de representación semiótica facilitan la interiorización del tópico, pero debe prescindirse de ellos porque sirven únicamente para acceder al objeto matemático. Contempló el trabajo individual y en equipo y estableció la resolución de las tareas en un ambiente de lápiz y papel donde el tiempo destinado debe ser suficiente para la aprehensión del tópico. Propuso estudiar el concepto de límite finito a partir del límite infinito con el objetivo de dotarlo de significado. En el *KCC* indicó los contenidos matemáticos propuestos en el programa y la aproximación desde la que se plantea el estudio del tópico. Reconoció limitaciones del programa, tales como la desvinculación del tratamiento del concepto de límite al infinito con otros contenidos matemáticos y el no establecer la profundidad de su enseñanza. Mencionó que las tareas para el estudio del tópico son seleccionadas de los libros de texto y la literatura científica.

Consideramos que el uso de una planificación externa permitió tener una mayor aproximación al conocimiento que pone en acción el PMC en las decisiones y elecciones que hace para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función, ya que cuando analizó la planificación del investigador lo justificó en su contexto particular, la UAM-UAGro. Prueba de ello es que reconoció limitaciones en la planificación del investigador, tal como el uso de una función específica cuyo comportamiento es similar en todos los casos y el planteamiento de preguntas similares que llevan a respuestas iguales y propuso fortalecerla incorporando tareas que atiendan estos aspectos. Además, identificó potencialidades en las tareas propuestas por el investigador, por ello, las incorporó en un apartado de su planificación.

CAPÍTULO V. Conclusiones

CAPÍTULO V. Conclusiones

Esta investigación determinó el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación del tópico límite al infinito de una función. Para tal objetivo, se realizaron las acciones siguientes: 1) Se diseñó, por el primer autor, una planificación del concepto de límite al infinito de una función sustentada en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1993), 2) Se analizaron las planificaciones, sobre el tópico límite al infinito de una función, que plantearon los profesores, 3) Se diseñó un guión de entrevista que involucró aspectos relacionados con la planificación del profesor y del investigador sobre el tópico límite al infinito de una función, 4) Se analizaron las respuestas de los participantes a las preguntas planteadas en una entrevista semiestructurada, y 5) Se determinó el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función, tomando como base el modelo del MKT propuesto por Ball et al. (2008). La revisión a la literatura científica permitió reconocer los estudios desarrollados en torno a esta línea de investigación, el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

V.1. Los subdominios del MKT movilizados en la planificación del concepto de límite al infinito de una función

La determinación del conocimiento que puso en acción cada profesor de matemáticas se sustentó de las respuestas a una entrevista semiestructurada que versó sobre la planificación del concepto de límite al infinito de una función. Con base en estas respuestas, reconocimos la movilización de los seis subdominios del MKT (Ball et al., 2008). A continuación se describe, en cada subdominio del MKT, el conocimiento movilizado por los profesores en la planificación del tópico:

1. *Conocimiento común del contenido*. Los profesores evidenciaron un conocimiento de la definición formal del concepto de límite desde la

aproximación métrica. Al explicarla, el PEA y el PMC, usaron la notación épsilon delta y la idea de aproximaciones y sucesiones; mientras que el PEB involucró la idea de desigualdades en la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y el rango de la función. En el marco de la planificación, el PMC plantea tareas enfocadas a definir el tópico, mientras que el PEA y el PEB involucran el estudio de otros contenidos matemáticos vinculados al concepto de límite al infinito de una función.

2. *Conocimiento especializado del contenido*. Saben que el concepto de límite al infinito de una función puede estudiarse desde dos aproximaciones, la dinámica y la métrica. No obstante, el contexto particular de cada profesor influyó en la decisión para elegir una de ellas, el PEA por la dinámica, el PEB por la dinámica y una sucinta introducción a la métrica, y el PMC por la métrica. Desde un punto de vista matemático, la aproximación dinámica permite introducirse al concepto de límite al infinito y calcular el límite de la función, pero desfavorece la comprensión del tópico desde la aproximación métrica, la cual involucra la notación épsilon delta. Respecto a esta aproximación, el PEA señala que es útil para justificar el valor límite de una función desde el rigor de la matemática y el PMC que involucra diversos contenidos matemáticos. Otra aproximación desde la que se estudia el concepto de límite al infinito de una función es la óptima, revelado por el PEB quien además justificó su elección de enseñar el tópico desde el punto de vista de las funciones matemáticas.

3. *Conocimiento del horizonte matemático*. Reconocieron que el concepto de límite al infinito de una función es fundamental para la introducción de otros contenidos del Cálculo Diferencial e Integral y del Análisis Matemático. Los profesores consideraron los contenidos matemáticos previos para el estudio del tópico, tales como sucesiones, máximos,

mínimos, supremo, ínfimo, función e infinito. Asimismo, indicaron los contenidos matemáticos posteriores al estudio del tópico, tales como continuidad, derivadas e integrales. El PEA contempló exigencias institucionales como el caso del examen de ingreso a estudios universitarios, razón por la cual favoreció el uso de la calculadora y la regla de L'Hôpital en el cálculo del límite de funciones. El PMC reconoció el uso inadecuado del lenguaje matemático y los distintos tipos de límite que son objeto de estudio en la matemática escolar. Dos profesores indicaron que las problemáticas asociadas al desarrollo histórico del concepto de límite tornan complejo su enseñanza. El PEB propuso explorar el tópico en otros conjuntos matemáticos.

4. *Conocimiento del contenido y los estudiantes*. Indicaron la necesidad de establecer los conocimientos previos del estudiante para el aprendizaje del tópico. Señalaron lo que los estudiantes encontrarán interesante en las tareas propuestas; tales como el uso del inglés, el contexto extramatemático (enfermedades epidémicas) y el contexto intramatemático (problemas geométricos). Asimismo, indicaron las dificultades y los obstáculos que pueden encarar los estudiantes en el estudio del tópico y que los lleva a errar, tales como: demanda cognitiva mayor tanto en el cálculo de límite de funciones que involucran números decimales como el análisis de distintas gráficas y tablas de valores, complejidad para asimilar el dominio y el rango de funciones, idea errónea del infinito como algo finito por el uso de la función logística, complejidad para asimilar el tópico desde la aproximación métrica y la perspectiva de las sucesiones, inducir a un error por el uso de la interpolación lineal en situaciones no lineales, complejidad para identificar el sentido de las tareas, dificultad para la elaboración de gráficas en un ambiente de lápiz y papel porque involucran números decimales, dificultad para transitar de variables discretas a continuas, obstáculo de tipo didáctico tanto en el cálculo de valores del dominio de la función logística a partir de

su imagen como en el estudio de los procesos infinitos usando la teoría del finito, y dificultad de tipo cognitivo por los conceptos matemáticos involucrados en el teorema de Heine-Borel.

Por otra parte, previeron formas de proceder de los estudiantes en el estudio del concepto de límite al infinito, indicaron que éstos: utilizan propiedades matemáticas para el cálculo del límite de la función, organizan mejor sus procedimientos cuando calculan el límite apoyándose de los límites laterales, olvidan el significado de la asíntota horizontal, relacionan las gráficas de la función logística con su expresión analítica, deducen la expresión analítica de la función logística, indican que conforme aumenta el tiempo indefinidamente la propagación de la enfermedad tiende a estabilizarse porque fue temporal, poseen ideas intuitivas sobre el concepto de límite al infinito de una función, dominan el registro numérico y tienden a cuestionar la naturaleza de la definición del tópico. Respecto a la valoración del aprendizaje del concepto de límite al infinito, coincidieron en el uso de diversos instrumentos (tareas, participaciones, resolución de problemas) y su realización en momentos diferentes.

5. *Conocimiento del contenido y la enseñanza*. Indicaron la estructura de las planificaciones del concepto de límite al infinito de una función y discutieron las tareas contempladas en cada una. La secuenciación de las tareas de cada planificación se estableció desde el programa de estudios o la literatura científica y se organizaron por apartados, sesiones o fases. Las tareas se enmarcaron en el contexto intramatemático (problemas geométricos, justificación del límite de una función usando la notación épsilon delta) el cual permite definir formalmente el concepto de límite al infinito desde el punto de vista del rigor de la matemática; y extramatemático (enfermedades epidémicas, crecimiento poblacional, relación entre edades y estaturas) porque es útil para motivar el estudio del tópico, dotarlo de sentido y reconocer su utilidad. Las tareas propuestas para

el estudio del concepto de límite al infinito de una función presentaron las características siguientes: estudio de funciones para establecer los conocimientos previos del estudiante, cálculo de los términos de una sucesión para identificar su tendencia y en consecuencia el límite, análisis de ejercicios resueltos para desarrollar la comprensión lectora del estudiante, definición formal del concepto de límite al infinito, identificación y cálculo de los límites al infinito, resolución de problemas geométricos que involucran aproximación de áreas y perímetros, caracterización de los procesos infinitos que tienen asociado una situación límite, uso de la notación épsilon delta para justificar el valor límite de una función y teoría asociada al tópico. Indicaron la pertinencia de las tareas planteadas por el investigador para la enseñanza del tópico, las justificaciones fueron: contemplan un estudio gradual y progresivo del concepto de límite al infinito y la función logística acota el tratamiento porque presenta un comportamiento similar en todos los casos, permitiendo identificar que se trata del tópico límite al infinito. No obstante, la poca variación de los parámetros de la función logística y las preguntas planteadas inducen a un estudio muy limitado del concepto de límite al infinito de una función. Por ello, propusieron que las tareas de la planificación del investigador sean rediseñadas. Asimismo, plantearon la incorporación de tareas sobre funciones que carecen de límite y cuando la variable independiente tiende a menos infinito para potenciar el estudio del tópico dado su riqueza conceptual, así como la enseñanza del concepto de límite finito a partir del límite infinito para dotarlo de significado.

El estudio del concepto de límite al infinito se estableció desde la aproximación dinámica para introducirse al tópico; y desde la métrica para potenciar su enseñanza y establecer la definición formal desde el punto de vista del rigor de la matemática.

Los profesores reconocieron potencialidades del uso de los registros de representación semiótica para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. En particular, indicaron que los registros numérico, gráfico, verbal y analítico favorecen la interiorización del tópico, pero debe prescindirse de ellos porque sirven únicamente para acceder al objeto matemático. Asimismo, el registro numérico es útil y potente para calcular distintos tipos de límite, el gráfico para el análisis de límites finitos y el analítico predomina en la enseñanza del tópico.

La forma de organización del trabajo en el aula de clases se planteó de forma individual y en equipos. Individual, porque consideraron importante que los estudiantes usen sus propias herramientas matemáticas en la resolución de las tareas; en equipo ya que permite complementar las competencias matemáticas de los estudiantes, interactuar con sus pares y debatir las resoluciones promoviendo de esta manera el aprendizaje por cooperación. La resolución de las tareas se establece en un ambiente de lápiz y papel, porque se demanda el análisis de situaciones concretas (problemas geométricos, enfermedades epidémicas); y el uso de las tecnologías de la información que ayuda a clarificar significados asociados al tópico, potenciar su estudio y calcular cualquier tipo de límite dado que no existe un método general. El tiempo destinado para el estudio del concepto de límite al infinito de una función varía de acuerdo al contexto real del aula de clase y debe ser suficiente para la reflexión sobre la tarea, su análisis y discusión con el objetivo de reconocer errores y aciertos en su aprehensión. Los profesores indicaron que la institucionalización del conocimiento matemático se realiza al finalizar las tareas de cada apartado de la planificación o al culminar todas las tareas.

Reconocieron que los errores de los estudiantes y los teoremas asociados al tópico potencian su estudio. Indicaron que la enseñanza tradicionalista poco favorece dotar de sentido al concepto de límite al infinito y las propiedades matemáticas representan un método limitado para el cálculo del límite.

6. *Conocimiento del contenido y el currículum*. Recurrieron al programa de estudios, en su contexto particular, para justificar la planificación del concepto de límite al infinito de una función, indicando los contenidos matemáticos planteados y la aproximación desde la cual se propone el estudio del tópico. Las limitaciones del programa de estudios que reconocieron, el PEA y el PMC, se enmarcaron en la profundidad del tratamiento del tópico límite al infinito de una función y la desvinculación de su estudio con el cotidiano del estudiante y con otros contenidos del Cálculo Diferencial. Para seleccionar las tareas del tópico utilizaron libros de texto y recurrieron a la literatura científica. Finalmente, el PEA y el PEB, indicaron que el tiempo escolar tiende a determinar la profundidad del tratamiento del concepto de límite al infinito de una función.

A pesar de que se movilizaron los seis subdominios del MKT en la planificación del concepto de límite al infinito de una función, cada uno se manifestó a un nivel diferente. Es decir, el *Conocimiento del contenido y la enseñanza* y el *Conocimiento del contenido y los estudiantes*, subdominios del MKT vinculados al dominio *Conocimiento didáctico del contenido*, fueron los que principalmente se manifestaron en la planificación del concepto de límite al infinito de una función. Pensamos que la movilización a un mayor nivel de los dos subdominios vinculados al *Conocimiento didáctico del contenido* se debe a las características de los profesores que participaron en el estudio, ya que su experiencia docente les ha permitido reflexionar sobre su quehacer profesional y replantear la definición formal del concepto de límite al infinito de una función para su enseñanza considerando los aspectos reales del aula de clases y los estudiantes. Esto confirma la postura de Llinares (1995) quien señala que cuando un profesor de matemáticas enseña un contenido concreto a unos alumnos determinados, luego de muchos años de realizar este trabajo, lleva con él una serie de experiencias que la práctica le ha ido confirmando, por ello, su conocimiento del contenido matemático se torna contextualizado (situado) en su contexto particular.

V.2. Reflexiones finales

La adaptación del modelo del MKT, propuesto por Ball et al. (2008), en los niveles educativos en los que se enmarcó nuestra investigación, Bachillerato y Superior, implicó comprender a profundidad cada uno de los subdominios para identificar el conocimiento puesto de manifiesto por cada profesor. La dificultad que enfrentamos al usar este modelo del MKT radicó en la ambigüedad para discernir entre un subdominio y otro. No obstante, fue de gran ayuda para entender el conocimiento, en su carácter multifacético, que puso en acción el profesor de matemáticas en la planificación del concepto de límite al infinito de una función. Cada profesor movilizó los seis subdominios del MKT, a niveles distintos, en la planificación de la enseñanza del tópico. Los casos analizados evidencian la importancia de contemplar diversos materiales para la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función y predecir posibles obstáculos de su uso. Esto confirma nuestra hipótesis de que los estudios desarrollados sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas dotan de herramientas para la formación del profesorado y su desarrollo profesional, es decir, están enfocadas al diseño de procesos de formación de profesores de matemáticas (Rojas et al., 2013).

El uso de una entrevista semiestructurada y dos planificaciones, una propia y otra diseñada por el investigador, para indagar sobre el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas permitió tener una mejor aproximación al conocimiento que pretendíamos examinar, ya que los profesores movilizaron ciertos conocimientos cuando justificaron su planificación del concepto de límite al infinito de una función y confirmaron y/o manifestaron otros en el análisis de la planificación del investigador. Esto reafirma la importancia del uso de diversas herramientas para examinar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas con el objetivo de tener una mejor aproximación. El contexto institucional ha contribuido parcialmente en la decisión de usar estas herramientas para examinar el conocimiento que pone en acción el profesor en la planificación de la enseñanza de un tópico en particular, ya que el concepto de límite al infinito de una función no era objeto de estudio en el aula de clases al momento de desarrollar la investigación y además el contexto educativo de España exige la solicitud de permisos[16] para videograbar las clases. Por ello, no hemos realizado observaciones en el aula de clases durante el desarrollo de la planificación, aspecto que sería muy interesante para estudios posteriores.

Para finalizar, consideramos pertinente el rediseño de la planificación del investigador con base en las sugerencias de los profesores que participaron en esta investigación, así como su desarrollo cuyo foco sea el análisis de la práctica profesional.

[16] Dado que los estudiantes son menores de edad, en España se incurre en un delito el hecho de videograbarlos, por ello, es necesario solicitar permiso a cada padre de familia el cual puede ser denegado.

Referencias

Referencias

Aquere, S; Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2009). Una propuesta didáctica para la enseñanza de límite. *Revista Premisa, 40,* 14-24.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?. *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389-407.

Bertoia, M. (2006). La interpretación del límite infinito mediante una experiencia con espejos. *Revista Premisa, 30,* 24-27.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de Investigación Educativa*. Barcelona: España.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(2),* 189-209.

Bodí, S. (2006). *Análisis de la comprensión de divisibilidad en el conjunto de los números naturales*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, España.

Cabañas-Sánchez, G. (2011). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de matemática educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Caddle, M. & Brizuela, B. (2014). Using interviews to explore teacher knowledge profiles in the area of permutations. In Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle, S. & Allan, D. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA, 36 (2)*. 225-232. Vancouver, Canada: PME.

Camacho, A. y Aguirre, M. (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(3),* 237-265.

Compagnucci, E., y Cardós, P. (2007). El desarrollo del conocimiento profesional del profesor en psicología. Obtenido de http://www.scielo.org.ar/pdf/orisoc/v7/v7a05.pdf.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 153-166). Dordrecht. Kluwer Academic Publishers.

Couoh, J.R. y Cabañas-Sánchez, G. (2013). Un estudio del límite al infinito en el nivel superior bajo el contexto de la resolución de problemas que involucran a la función logística. En L. Sosa, J. Hernández y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XVI Escuela de Invierno en Matemática Educativa,* 316-323. México: Red de Cimates.

Clausse, M. (2007). Dos experiencias de clase con recursos informáticos. Temas: Límites y aplicaciones de función lineal. *Revista Premisa, 33,* 26-34.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/2742.

Climent, N., Romero-Cortés, J.M., Carrillo, J., Muñóz-Catalán, M.C., y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16(1),* 13-36.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, 5, 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En E. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Engler, A., Gregorini, M., Vrancken, S., Müller, D., Hecklein, M., y Henzenn, N. (2008). El límite infinito: Una situación didáctica. *Revista Premisa, 36,* 11-21.

Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de didáctica de las matemáticas, Universidad de Sevilla, España.

Gavilán, J., García, M., y Llinares, S. (2007a). La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes. *Educación Matemática, 19(2),* 5-39.

Gavilán, J., García, M., y Llinares, S. (2007b). Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las ciencias, 25(2),* 157-170.

Gómez, P. (2006). La planificación: una competencia fundamental del profesor. Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/GomezP06-2799.PDF.

Güçler, B. (2013) Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics, 82(3)*, 439-453.

Generalitat Valenciana, (2007). *Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana. [2007/9717].* [Disponible en internet: http://www.docv.gva.es/datos/2007/07/24/pdf/2007_9717.pdf].

Generalitat Valenciana (2008). *Decreto 102/2008 de 11 de Julio, del Consell, por el que se establece el currículo de Bachillerato en la Comunitat Valenciana. [2008/8761].* Diario Oficial de la Comunitat Valenciana. No. 5806/15.07.2008. [Disponible en internet: http://www.docv.gva.es/datos/ 2008/07/15/ pdf/ 2008_8761.pdf].

Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.

Hernández, R., Fernández-Collado, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.

Llinares, S. (2000). Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas. En J.P. da Ponte & L. Serrazina (coord.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia.* (pp. 109-132). Lisboa, Portugal: Secçao de Educaçao Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciêncas de Educaçao.

Llinares, S. (1995). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. Departamento de Didáctica de las Ciencias (Matemáticas), Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Sevilla, España.

Medina, A. (2000). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. *Red Académica* [en línea]. Recuperado de http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted09_08arti.pdf

Mochón, S., y Morales, M. (2010). En qué consiste el "conocimiento matemático para la enseñanza" de un profesor y cómo fomentar su desarrollo: un estudio en la escuela primaria. *Educación matemática, 22(1),* 87-113.

Morales, A. (2013). *Estrategia metodológica para el tratamiento del concepto de límite al infinito.* Tesis de doctorado no publicada. Unidad académica de matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Morris, A., Hiebert, J., y Spitzer, S. (2009). Mathematical Knowledge for Teaching in Planning and Evaluating Instruction: What Can Preservice Teachers Learn?. *Journal for Research in Mathematics Education, 40(5),* 491-529.

Oliveira, H. (2009). Understanding the teacher's role in supporting student´s generalization when investigating sequences. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n.2 al n. 19, 2009.*

Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, J. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15(1),* 63-91.

Pastrana, F. (2012). *Estrategias desarrolladas por estudiantes de Nivel Medio Superior al resolver problemas matemáticos de la pueba PISA.* Tesis de maestría no publicada. Unidad académica de matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Pinto, J. y González, M. (2008). El conocimiento didáctico del contenido en el profesor de matemáticas: ¿una cuestión ignorada? *Educación matemática, 20(3)*, 83-100.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis de doctorado no publicada. Departamento de didáctica de la matemática y de las ciencias experimentales, Universidad de Salamanca, España.

Pochulu, M., y Rodríguez, M. (2012). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde diferentes enfoques teóricos.* Buenos Aires, Argentina: Eduvim.

Premier, N., y Lazarte, G. (2009). Propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo. En Investigaciones en Facultades de Ingeniería del NOA, *V Jornadas de Ciencia y Tecnología de las Facultades de Ingeniería del NOA, 2(1),* 101-106. Argentina: Universidad Nacional de Salta.

Ribeiro, M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15(1),* 93-121.

Rojas, N.; Flores, P., y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4*, 47-64.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: Un estudio de dos casos*. Tesis doctoral publicada en http://hdl.handle.net/10272/4509.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57 (1).* 1-21.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 12,* 49-63.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las ciencias, 29(3),* 325-338.

UAGro. (2009). *Nuevo plan de estudios de la licenciatura en matemáticas.* Editorial Universidad Autónoma de Guerrero: México.

ANEXOS

Anexo 1. Descripción de las planificaciones

En la descripción de la planificación de cada profesor participante y del investigador sobre el concepto de límite al infinito de una función, se consideraron los aspectos siguientes: el objetivo, el nivel educativo, las secciones o apartados, los registros de representación que se favorecen, las formas de trabajo y la aproximación dinámica o métrica del concepto de límite.

Las planificaciones de los profesores están organizadas por apartados, sesiones o fases. Las que presentaron el PEB y PMC especifican los conceptos matemáticos articulados a la definición del concepto de límite al infinito de una función. En el caso del PEA aun cuando omitió declararlos, es claro que las actividades por apartado están articuladas a conceptos matemáticos que conllevan al tópico de interés.

1.1. La planificación del PEA

El objetivo general de la planificación del PEA es que los estudiantes identifiquen la tendencia de una función y resuelvan problemas en otros contextos que involucran límites. El tiempo considerado es de doce horas. La planificación la estructuró por apartados en los que se describen las actividades y su respectivo propósito (Tabla A.1.).

Tabla A.1. Apartados, actividades y objetivos de la planificación del PEA sobre el concepto de límite de una función en un punto

Apartado	Actividad	Objetivo
Límite de funciones. Continuidad	Actividad 1	Utilizar la calculadora y sustituir algunos valores para determinar el límite de una función.
Límite de una función cuando $x \to +\infty$	Actividad 2	Calcular el límite de polinomios.
	Actividad 3	Determinar el límite de funciones con radical y logarítmicas.
	Actividad 4	Hallar el límite de funciones que involucran operaciones con radicales y logarítmicas.

	Actividad 5	Encontrar el límite de funciones racionales y con radicales.
	Actividad 6	Hallar el límite de funciones que involucran al número e.
	Actividad 7	Determinar el límite de funciones relacionados con el número e.
Análisis de gráficas de funciones para determinar el límite	Actividad 8	Relacionar el límite de una función con su gráfica.
	Actividad 9	Asociar el límite de una función con su gráfica.
Cálculo de límites cuando $x \rightarrow +\infty$: cociente de polinomios y de otras expresiones infinitas	Actividad 10	Calcular el límite de funciones racionales.
	Actividad 11	Determinar el límite de funciones racionales que involucran radicales.
Límite de una función cuando $\mathrm{x} \rightarrow -\infty$	Actividad 12	Hallar el límite de funciones polinómicas.
	Actividad 13	Encontrar el límite de funciones racionales y radicales.
Límite de una función en un punto	Actividad 14	Calcular el límite de una función determinada por partes.
	Actividad 15	Determinar el límite de funciones racionales.
	Actividad 16	Encontrar el límite de funciones racionales que involucran radicales.
Continuidad en un punto	Actividad 17	Definir una función continua en un punto.
Recapitulación	Actividad 18	Explicar el significado de los elementos que constituyen la expresión límite.
	Actividad 19	Calcular el límite de funciones racionales.
	Actividad 20	Analizar la continuidad de una función.
	Actividad 21	Estudiar los tipos de discontinuidades.
	Actividad 22	Analizar la continuidad en un punto.

Las actividades se enmarcan en el segundo curso del Bachillerato de la Comunidad Valenciana de España, cada una demanda el uso de la calculadora para determinar el límite de la función. La forma de organización de la actividad en el salón de clases se plantea en tres momentos: individual, equipo y grupal. El rol del profesor se concibe a nivel de observador y guía. En la planificación se favorecen los registros numérico y gráfico, sin una conversión entre ellos, potenciando el primero. El estudio del concepto se establece desde la aproximación dinámica y las definiciones asociadas se proporcionan al culminar las actividades de la planificación.

1.2. La planificación del PEB

Se sustenta del uso de software Derive y tiene como propósito que los estudiantes aprendan el concepto de límite de una función y lo apliquen en la resolución de problemas. El tiempo destinado para su estudio es de cuatro horas con diez minutos y se plantea en el marco del primer curso del Bachillerato de la Comunidad Valenciana de España. La estructuró por sesiones con sus respectivas actividades y objetivos (ver Tabla A.2.).

Tabla A.2. Sesiones, actividades y objetivos de la planificación del PEB sobre el concepto de límite de una función en un punto

Sesión	Actividad	Objetivo
Función	Actividad 1	Aproximar a la realidad el concepto de función.
	Actividad 2	Familiarizar al estudiante al uso del programa y a la relación establecida entre las funciones visualizándola, con los zoom.
	Actividad 3	Inducir relaciones y ver cómo las construyen, relacionar la función natural con un lenguaje formal.
	Actividad 4	Pasar de funciones naturales a funciones reales.
	Actividad 5	Observar funciones sin procedimiento analítico, e inducir una posible modelización de un fenómeno.
	Actividad 6	Relacionar lenguaje simbólico y gráfico con el verbal.
	Actividad 7	Conocer el lenguaje simbólico y manejar con soltura los comandos del programa para acercar y alejar una gráfica.
	Actividad 8	Inducir cambios gráficos tras las manipulaciones algebraicas.
	Actividad 9	Crear estrategias o hipótesis, para buscar descomposiciones genéticas de la construcción del concepto de función, así como expresar formalmente en intervalos los dominios y rangos.
	Actividad 10	Indagar en la construcción de sus aprendizajes de función, y de los elementos identificativos de la expresión algebraica, dominio y rango.
Tendencias	Actividad 11	Conjeturar el paso a una situación límite, pasando por

		diversos valores muy grandes o pequeños y manejar el zoom del programa conforme a esa adaptación al límite.
	Actividad 12	Construir pautas de comportamiento de unas funciones.
	Actividad 13	Relacionar variables y separar sus respectivas tendencias.
	Actividad 14	Apreciar la diferencia en el rango según las aproximaciones derecha-izquierda.
	Actividad 15	Definir conceptos y aplicarlos con el ordenador, manejando el cursor y pasando al lenguaje simbólico, comprobando los cálculos.
Relación entre dos aproximaciones, cuando $x \to a$, $f(x) \to L$	Actividad 16	Estudiar límites de funciones en puntos, que tienden a +/-∞, por ejemplo por la izquierda, derecha y formalizar en el punto dado.
	Actividad 17	Calcular y explicar el significado de ciertos límites.
	Actividad 18	Definir el concepto de límite como una aproximación previa al concepto métrico, para facilitar el concepto más formal de Spivak.
Definición formal del límite	Actividad 19	Formalizar la definición de límite, dando gráficas que puedan ayudar a visualizar el concepto.
	Actividad 20	Formalizar el lenguaje simbólico con el gráfico, manejando el concepto de valor absoluto.
	Actividad 21	Afianzar la práctica del concepto métrico de límite.
	Actividad 22	Probar matemáticamente el límite de una función usando épsilon-delta.
	Actividad 23	Aplicar lo aprendido en una posible construcción del concepto de límite con lenguajes algebraicos, gráficos y de razonamiento en la prueba.

La forma de organización de la actividad en el salón de clases se plantea en grupos de dos estudiantes. El rol del profesor se establece a nivel de observador y guía. Al final de las actividades de cada sesión plantea la institucionalización del conocimiento matemático. Favorece los registros de representación gráfico, numérico y analítico, y fomenta una conversión explícita entre los dos primeros. El estudio del tópico se establece en un primer momento desde la aproximación dinámica y en otro, desde la métrica, aunque se privilegia la primera.

1.3. La planificación del PMC

La finalidad de la planificación del PMC es que los estudiantes asimilen el concepto de límite al infinito de una función y se plantea en el marco de la unidad de aprendizaje Cálculo I del Plan de Estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la UAM-UAGro. Propone siete actividades agrupadas en las cuatro fases siguientes: Aproximación, formalización, identificación y aplicación (ver Tabla A.3.).

Tabla A.3. Fases, actividades y objetivos de la planificación del PMC sobre el concepto de límite al infinito de una función

Fases	**Actividad**	**Objetivo**
Aproximación	Actividad 1	Calcular el límite al infinito de una función.
	Actividad 2	Identificar el límite al infinito de una función en el dominio de los números naturales.
Formalización	Actividad 3	Construir el concepto de límite al infinito de una función.
	Actividad 4	Discutir la naturaleza de los procesos infinitos y el sentido de la situación límite.
	Actividad 5, inciso a	Establecer la definición del límite al infinito de una función en el conjunto de los números naturales y extenderlo a otros conjuntos.
Identificación	Actividad 5, inciso b	Caracterizar los procesos infinitos que tienen asociado una situación límite.
Aplicación	Actividad 6	Resolver problemas relacionados con el concepto del límite al infinito de una función.
	Actividad 7	Analizar teoremas y propiedades asociados al concepto del límite al infinito de una función.

Las actividades las propone en un ambiente de lápiz y papel. La forma de organización del trabajo en el aula de clases se plantea en grupos de dos estudiantes. El rol del profesor se establece a nivel de observador y guía. El tiempo destinado para el estudio del tópico es de diez horas. Se favorecen los registros numérico, gráfico y analítico, sin una conversión entre ellos. El estudio del tópico se establece desde la aproximación métrica. Se plantea que al final de las actividades de la planificación se definan conceptos matemáticos y se demuestren teoremas asociados al tópico.

1.4. La planificación del investigador

La planificación del investigador se planteó en un ambiente de lápiz y papel y tiene como objetivo que los estudiantes establezcan una definición del concepto de límite al infinito de una función usando la simbología matemática, en particular, $\lim_{t\to\infty} P(t) = a, donde\ a \in \mathbb{R}$. Está dirigida a estudiantes del nivel superior cuyos programas contemplen el estudio del tópico y está previsto para tres horas y veinte minutos. Se diseñó bajo el marco de la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, en la que se privilegió la conversión de los registros de representación numérico, gráfico, lenguaje coloquial y analítico del concepto en cuestión, utilizando el contexto de la resolución de problemas que involucran a la función logística. Las actividades se organizan en tres apartados: Para Aprender, Síntesis y Método. La Tabla A.4 describe el propósito de las actividades por apartado, así como los registros de representación que se movilizan.

Tabla A.4. Secciones que conforman la planificación del investigador, propósito de las actividades y los registros de representación que se movilizan

Apartado	**Actividad**	**Propósito**	**Registros de representación semiótica movilizadas**
Para Aprender	Actividad 1	Analizar los parámetros de la función que modela el comportamiento de una situación.	Analítico, numérico y gráfico.
	Actividad 2	Asociar la expresión analítica de una función con su gráfica.	Analítico y gráfico.
	Actividad 3	Calcular el límite al infinito de una función, que modela un determinado problema contextualizado, a partir de los registros de representación algebraica, numérica y gráfica.	Analítico, numérico y gráfico.
	Actividad 4	Conversión entre los registros de representación gráfico, lenguaje coloquial y analítico del límite al infinito de una función para analizar el comportamiento de cierta situación.	Analítico, gráfico y lenguaje coloquial.
Síntesis	Actividad 5	Escribir una definición del concepto de límite al infinito de una función, utilizando lenguaje común y otra, usando la simbología matemática ($\lim_{t\to\infty} P(t) = a, a \in \mathbb{R}$).	Analítico y lenguaje coloquial.

Método	Actividad 6	Estudiar el comportamiento de otras situaciones modelados por la función logística, conforme aumenta el tiempo, a partir de los registros de representación gráfico y numérico.	Gráfico, numérico, lenguaje coloquial y analítico.

Las actividades 1 y 2 son el puente para el desarrollo de la actividad 3, porque con ellas los estudiantes se familiarizan con los parámetros de la función que modela la situación y con sus registros de representación analítico, gráfico y numérico. A continuación, describimos las actividades que componen la planificación.

1. *Actividad 1*. Se presentan la definición de la función logística, la fórmula matemática correspondiente y su aplicación en el contexto extramatemático. Con base en lo anterior, se muestra la fórmula matemática que modela el contagio de una enfermedad epidémica en una determinada población. Se cuestiona el papel que tienen la variable independiente y la variable dependiente en la fórmula, el valor esperado para la población cuando el tiempo es igual a 0, 5 y 9.5 semanas. Se induce a la reflexión de por qué la fórmula plantea $t \geq 0$, donde t es el tiempo. Finalmente, se pide elaborar una gráfica apoyándose de una tabla de valores elaborada previamente.

2. *Actividad 2*. Se presentan cuatro funciones y cuatro gráficas relativas a la propagación de la enfermedad epidémica en poblaciones diferentes. Se pide al estudiante que relacione las funciones con su respectiva gráfica. Luego, se cuestiona sobre el comportamiento presentado en cada una; el significado, en términos del problema, de la asíntota horizontal en cada caso; y la ecuación de la asíntota horizontal. Finalmente, basados en las fórmulas y las gráficas se pide un análisis del contagio de la enfermedad.

3. *Actividad 3*. Consta de dos secciones. La primera, retoma el trabajo realizado en la actividad 1, pero se cuestiona, con base en la gráfica, sobre el comportamiento que presenta la cantidad de población infectada cuando transcurre considerablemente el tiempo. También se le sitúa a analizar valores máximo de la función a fin de que describa el comportamiento que observa usando lenguaje común y expresión matemática. La segunda,

muestra una tabla de valores de la propagación de la enfermedad en cierta población. Se solicita elaborar una gráfica a partir de los datos de la tabla; así también, identificar el comportamiento que presenta la cantidad de población infectada cuando el tiempo aumenta y expresarla por medio de la simbología matemática.

4. *Actividad 4*. Sintetiza el trabajo realizado por los estudiantes en el apartado *Para Aprender*. Se sitúa a los estudiantes a analizar el comportamiento de la enfermedad en cada población a través de la conversión entre los registros gráfico, lenguaje coloquial y analítico. Por ejemplo, en la primera población se presenta el gráfico que modela el contagio de la enfermedad y se deben completar los registros de representación lenguaje coloquial y analítico.

5. *Actividad 5*. Se plantean tres preguntas basadas en las conclusiones a las que arribaron en las actividades anteriores, que conducirán a los estudiantes a escribir una definición del concepto de límite al infinito de una función, utilizando lenguaje común y una simbología matemática ($\lim_{t\to\infty} P(t) = a, donde\ a \in \mathbb{R}$). Las preguntas son: 1) Cuando el tiempo aumenta considerablemente, ¿qué comportamiento presenta la población contagiada?; 2) De manera general y utilizando lenguaje común, describe el comportamiento anterior; y 3) Ahora, utilizando la simbología adecuada, expresa matemáticamente lo anterior.

6. *Actividad 6*. Consta de dos secciones. La primera, presenta una gráfica que modela el número de habitantes en una población conforme transcurre el tiempo. Se cuestiona sobre la cantidad de la población al comenzar el registro y cuánto aumenta al transcurrir un año. Se pide describir el comportamiento que presenta el número de habitantes cuando los años aumentan considerablemente, usando el lenguaje coloquial y la simbología matemática. La segunda, muestra una tabla de valores del número de usuarios de redes sociales conforme transcurren los meses. Con base en la tabla, se solicita aproximar el valor para el número de usuarios cuando el

tiempo es igual a 1.5 meses y describir el comportamiento que presenta el número de usuarios de redes sociales cuando aumenta el tiempo utilizando lenguaje coloquial y simbología matemática.

En el diseño de la planificación se consideró la propia experiencia docente y la literatura especializada. Nos percatamos que se favorece el registro de representación algebraico en la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función. No obstante, poco se trabaja con los registros gráfico, numérico y lenguaje coloquial, y cuando éstos son considerados, la conversión entre ellos es casi nula, esto representa, más adelante, un posible obstáculo para el aprendizaje del estudiante. Se consideraron problemas contextualizados para motivar a los estudiantes en su resolución y en consecuencia, al estudio del tópico. Se establece desde la aproximación dinámica el estudio del concepto. Cabe señalar que las actividades, han sido resueltas por cuatro profesores de matemáticas en formación en la UAM-UAGro, México, quienes argumentaron que las actividades planteadas contribuyen al logro del objetivo planteado (una mayor explicación puede verse en Couoh y Cabañas, 2013).

Anexo 2. Las planificaciones

Se presentan las actividades que componen cada una de las planificaciones utilizadas para estudiar el conocimiento que pone en acción el profesor de matemáticas en la enseñanza del concepto de límite al infinito de una función.

2.1. Actividades de la planificación del PEA

Apartado 1. Límite de funciones. Continuidad

Actividad 1. Utiliza tu sentido común para dar el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} x^2$, $\lim_{x\to+\infty} x^3$, $\lim_{x\to+\infty}(x^3-3x^2)$

b) $\lim_{x\to-\infty} x^2$, $\lim_{x\to-\infty} x^3$, $\lim_{x\to-\infty}(x^3-x^2)$

c) $\lim_{x\to2} x^2$, $\lim_{x\to2} x^3$, $\lim_{x\to2}(x^3-5x^2+3)$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1}$

e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1}$

f) $\lim_{x\to0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2}$, $\lim_{x\to0} \frac{x}{x^2+1}$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-5x^2}{x^2+1}$

h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2+1}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x+5}$

Con calculadora

Tanteando con la calculadora, da el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x}$

b) $\lim_{x\to 3}(x-3)\cdot \ln(x-3)$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

Apartado 2. Límite de una función cuando $x \to +\infty$

Actividad 2. Halla los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to +\infty}(x^2+3x-x^3)$

b) $\lim_{x\to +\infty}(-5\cdot 2^{2x})$

Actividad 3. Calcula estos límites.

a) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^2+2}$

b) $\lim_{x\to +\infty}(-2log_{10}x)$

Actividad 4. Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\left(x^2-\sqrt[3]{2x+1}\right)$

b) (x^2-2^x)

c) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}$

d) 3^x-2^x

e) $5^x-\sqrt[3]{x^8-2}$

f) $\sqrt{x}-log_5 x^4$

Actividad 5. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3x^3+5}{x+2}-\frac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\frac{x^3}{2x^2+1}-\frac{x}{2}$

c) $\frac{3x+5}{2}-\frac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}$

e) $2x-\sqrt{x^2+x}$

f) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}$

Actividad 6. Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:

a) $\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}$

b) $\left(5+\frac{1}{5x}\right)^{5x}$

c) $\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{5}$

d) $\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$ e) $\left(5+\frac{5}{x}\right)^{5x}$ f) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{5x}$

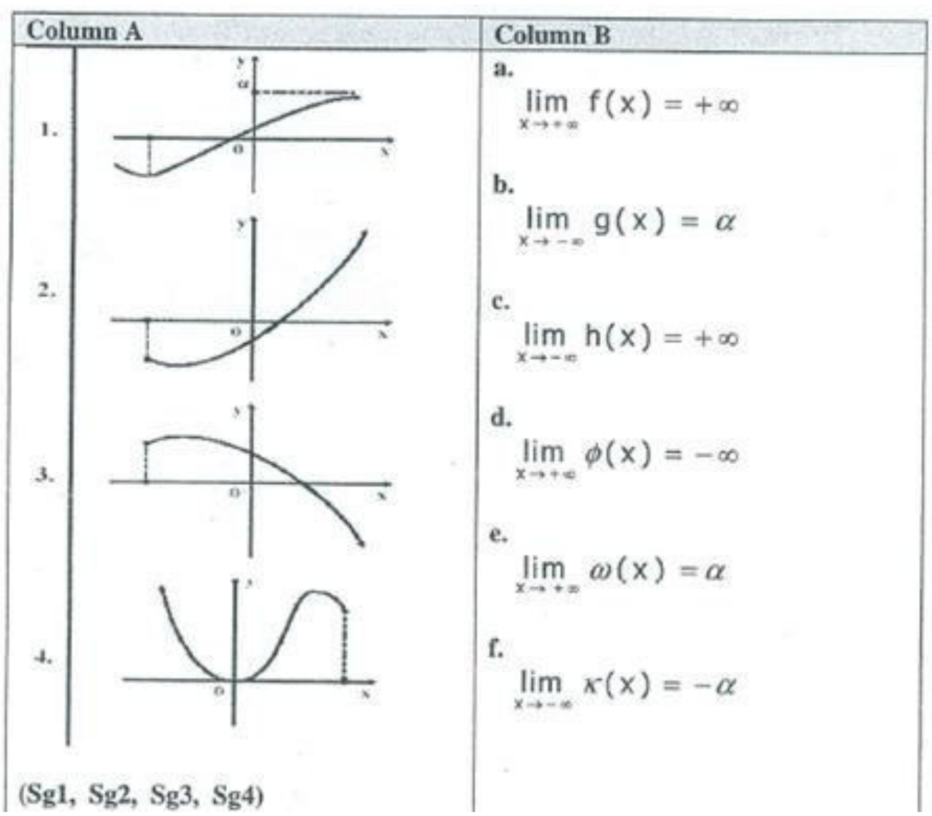
Actividad 7. Calcula estos límites cuando $x \to +\infty$:

a) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-2}$ c) $\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{3x}$ e) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x}$

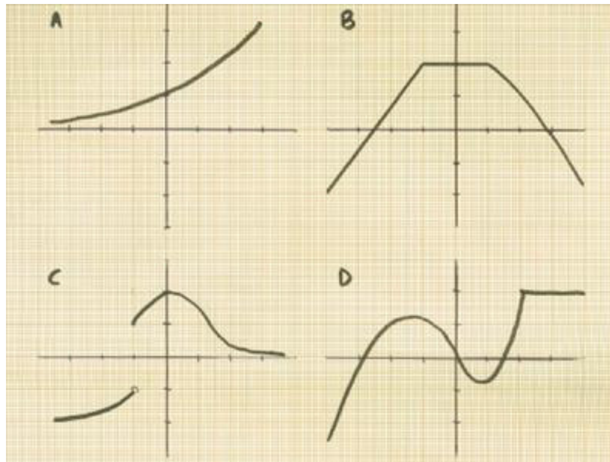
b) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{4x}$ d) $\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{5}$ f) $\left(1+\frac{2}{5x}\right)^{5x}$

Apartado 3. Análisis de gráficas para determinar el límite de la función

Actividad 8. Find the functions of Colum B that correspond to the four graphs of Colum A.



Actividad 9. Asocia cada límite con su gráfica. Intenta explicar por qué haces esas asociaciones.



1 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	A	B	C	D	Ninguna
2 $\lim_{x\to-\infty} p(x) = 0$	A	B	C	D	Ninguna
3 $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -2$	A	B	C	D	Ninguna
4 $\lim_{x\to-\infty} r(x) = -2$	A	B	C	D	Ninguna
5 $\lim_{x\to+\infty} q(x) = +\infty$	A	B	C	D	Ninguna
6 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$	A	B	C	D	Ninguna

Apartado 4. Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$: Cociente de polinomios y de otras expresiones infinitas

Actividad 10. Resuelve usando tabla de valores.

- $\text{lím}_{x\to+\infty} \frac{3x^3+2x-1}{10x^2-7x+3}$
- $\text{lím}_{x\to+\infty} \frac{10x-3}{-5x^2+2}$
- $\text{lím}_{x\to+\infty} \frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2}$
- $\text{lím}_{x\to+\infty} \frac{10x^4+5x}{6(1-x^3)}$

Actividad 11. Calcula los siguientes límites utilizando calculadora.

- $\text{lím}_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2-6x}}$
- $\text{lím}_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x^3-2x}}{2x+5}$

Apartado 5. Límite de una función cuando $x \to -\infty$

Actividad 12. Sin operar, di el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $x^2 - \sqrt[3]{2x+1}$

b) $x^2 + 2^x$

c) $x^2 - 2^x$

d) $x^2 - 2^{-x}$

e) $2^{-x} - 3^{-x}$

f) $\sqrt{x^5 - 1} - 5^x$

g) $2^x - x^2$

h) $x^2 - \sqrt{x^4 - 1}$

i) $\sqrt[3]{x+2} - x^2$

j) $3^{-x} - 2^{-x}$

Actividad 13. Calcula el límite cuando $x \to -\infty$ de las siguientes expresiones:

a) $\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}$

c) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

d) $2x + \sqrt{x^2+x}$

e) $\sqrt{x^2+2x} + x$

f) $\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

g) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{5x+3}$

h) $\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}$

Apartado 6. Límite de una función en un punto

Actividad 14. Calcular, si existe, $\lim_{x\to+1} f(x)$, siendo: $f(x) = \begin{cases} x+1, x<1 \\ -x^2+4x-1, x>1 \end{cases}$.

Actividad 15. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to-1} \frac{x^3-2x^2+2x+5}{x^2-6x-7}$

b) $\lim_{x\to+4} \frac{x^3-5x+1}{x^3+2x^2-3x}$

Actividad 16. Calcula los límites siguientes:

a) $\text{lím}_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$

b) $\text{lím}_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3-x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$

Apartado 7. Continuidad en un punto

Actividad 17. Definición. Se dice que una función ***f es continua en un punto*** de abcisa *c* cuando se cumple que

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Apartado 8. Recapitulación

Actividad 18. ***Definición de límite.*** Explica el significado de estas expresiones:

a) $\lim_{x\to +\infty}(x^3 - 100x^2) = +\infty$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-1}{x} = 2$

c) $\lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

Actividad 19. ***0/0 con radicales.*** Calcula:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$$

Actividad 20. ***Función continua.***

a) Estudia la continuidad de esta función según los valores de a:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+a, x \leq 1 \\ x^2 - ax, x > 1 \end{cases}$$

b) Representa la función en el caso en que es continua.

Actividad 21. ***Tipos de discontinuidades.*** Clasifica las discontinuidades de la función siguiente:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$$

Actividad 22. ***Continuidad en un punto.***

a) Calcula a y b para que sea continua la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, x \leq -1 \\ b, -1 < x < 1 \\ 2x + 4, x \geq 3 \end{cases}$$

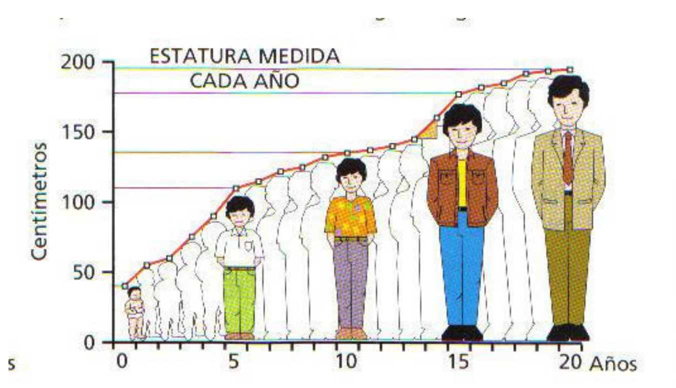
b) Halla: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

2.2. Actividades de la planificación del PEB

Sesión 1: Funciones

Relacionar 2 magnitudes: Mi altura varía con el tiempo: tiempo→altura. ¿Qué magnitud depende de la otra?

Viendo la gráfica siguiente, ¿qué altura tiene la persona a los 5 años? ¿Y a los 15?



Establece pares ordenados en corchetes de las 2 magnitudes en diversos instantes, como recién nacido, a los 10 años y a los 20. [,] [,] [,]

Otro ejemplo, el precio desde 1 a varias barras de pan varía con la cantidad que compres: cantidad de pan→precio.

Actividad 1: Buscar 6 magnitudes que se puedan relacionar por parejas.

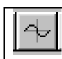
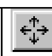
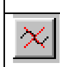
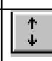
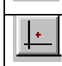
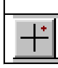
El objetivo es aproximar a la realidad el concepto de función.

Actividad 2: Establecer pares ordenados de números por una relación fijada de antemano con comandos del programa y dibujarlos en coordenadas cartesianas, marcando el dominio de la variable "n" y el recorrido de su relación.

El objetivo es habituarse al uso del programa y a la relación establecida entre ellos, visualizándola, con los zoom.

En nuestro caso escogemos las magnitudes cantidad de pan→precio, y la relación es que cada barra vale 0.75€, por lo que la relación es que a cada "n"(nº de barras de pan) le asociamos su precio que resulta ser de 0.75n.

Los iconos de la barra de herramientas de la ventana de gráficos 2D permiten centrar la gráfica y hacer zoom.

	Dibujar la función activa		Ver mayor intervalo en los ejes = reducir la imagen
	Borrar la última función		Ver mayor intervalo del eje OY = reducir la imagen en vertical
	Centrar la imagen en la posición del cursor-cruz		Volver a la pantalla de álgebra o de expresiones
	Centrar la imagen en el origen de coordenadas		

En la parte inferior izquierda aparecen las coordenadas de la posición del cursor. Sitúa el cursor (aproximadamente) sobre los puntos en que la gráfica corta al eje OX y anota el valor de la abscisa que aparece abajo. Compara las raíces con las abscisas obtenidas.

[n, 0.75·n]

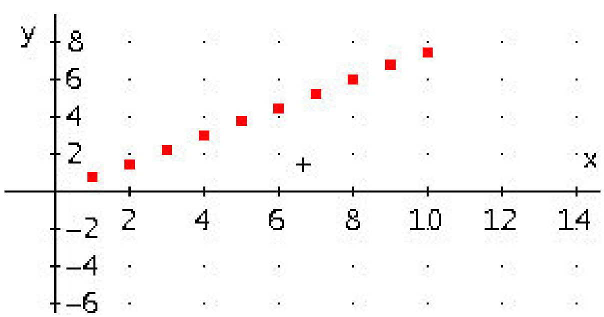
VECTOR ([n, 0.75·n], n, 1, 10, 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \\ 3 & \frac{9}{4} \\ 4 & 3 \\ 5 & \frac{15}{4} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & \frac{9}{2} \\ 7 & \frac{21}{4} \\ 8 & 6 \\ 9 & \frac{27}{4} \\ 10 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

Los valores en fracciones los aproximamos a decimales con el icono de aproximación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 2 & 1.5 \\ 3 & 2.25 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3.75 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 4.5 \\ 7 & 5.25 \\ 8 & 6 \\ 9 & 6.75 \\ 10 & 7.5 \end{bmatrix}$$

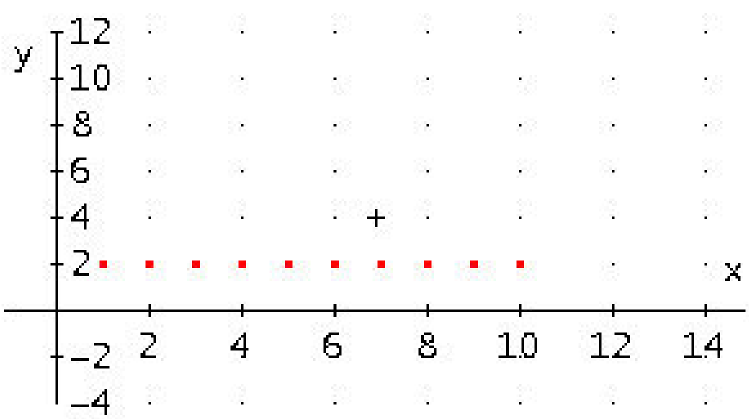
Con los diversos zooms, buscamos la gráfica que veamos más en consonancia con la relación de la que partimos.



Introducimos ahora una relación constante, por ejemplo, durante cada día, el 1º, 2º, etc., se da un bono regalo de 2 € para la compra en un supermercado. Días→bono.

[n, 2]

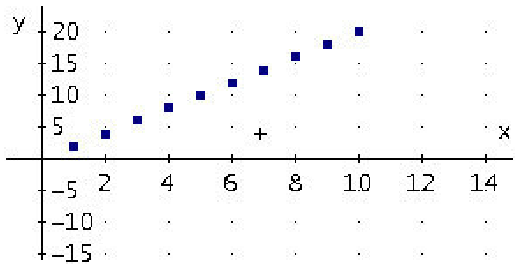
$$\text{VECTOR}([n,\ 2],\ n,\ 1,\ 10,\ 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 2 \\ 7 & 2 \\ 8 & 2 \\ 9 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$



Otra relación, por cada pregunta bien respondida en un concurso se le dobla en € el premio.

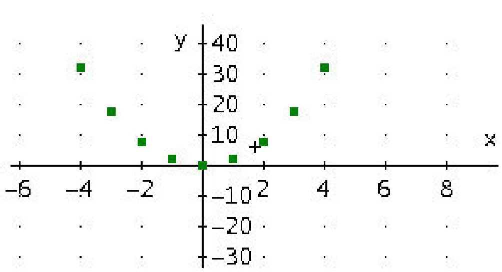
[n, 2n]

$$\text{VECTOR}([n,\ 2\cdot n],\ n,\ 1,\ 10,\ 1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ 5 & 10 \\ 6 & 12 \\ 7 & 14 \\ 8 & 16 \\ 9 & 18 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$$



Buscamos ahora relaciones numéricas de pares, con números negativos y positivos sin que estén plasmadas en la realidad, sino solamente por sacar nuevas relaciones entre números, por ejemplo con 2 veces su cuadrado.

$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[n,\ 2\cdot n^{2}\right],\ n,\ -5,\ 5,\ 1\right) = \begin{bmatrix} -5 & 50 \\ -4 & 32 \\ -3 & 18 \\ -2 & 8 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ 3 & 18 \\ 4 & 32 \\ 5 & 50 \end{bmatrix}$$



Actividad 3: Que los alumnos busquen 2 relaciones numéricas ellos solos, las comenten y las dibujen. Pensar en otras 2 relaciones de aplicación real y que hagan lo mismo.

El objetivo es inducir relaciones y ver cómo las construyen.

Formalizamos la relación al concepto de función con f(n). Por ejemplo, la gráfica de la altura es una función que informa sobre el crecimiento de una persona en el tiempo, la del pan me dice cómo saber lo que cuesta una determinada cantidad, etc.

Con el objetivo de pasar a funciones naturales, formalizamos la función en lenguaje matemático,

- escribiéndola con la terminología habitual, f(n), g(n), h(n), etc.
- asignándole su comando en el programa, f(n):=
- repitiendo el proceso de [n, f(n)].

El objetivo es relacionar función natural con un lenguaje formal.

Actividad 4: Introducir números reales en la función. Con el objetivo de pasar de funciones naturales a funciones reales, sustituyendo la "n" por la "x" pasando de valores discretos a continuos. Empezamos con funciones naturales, el ejemplo de las barras de pan con números naturales.

$f(n) := 0.75 \cdot n$

3

$$f(2) = \frac{3}{2}$$

f(2) = 1.5

f(4) = 3

[n, f(n)]

VECTOR([n, f(n)], n, 1, 10, 1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 2 & 1.5 \\ 3 & 2.25 \\ 4 & 3 \\ 5 & 3.75 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 4.5 \\ 7 & 5.25 \\ 8 & 6 \\ 9 & 6.75 \\ 10 & 7.5 \end{bmatrix}$$

Cambiamos n de natural, por x de real y damos valores con diferencias de 0.5

f(x) ≔ 0.75·x

$$f(1.25) = \frac{15}{16}$$

$$f(1.25) = 0.9375$$

$$f(3.5) = \frac{21}{8}$$

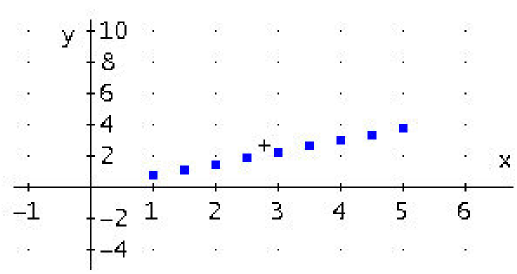
$$f(3.5) = 2.625$$

$$f(4.05) = 3.0375$$

[x, f(x)]

VECTOR ([x, f(x)], x, 1, 5, 0.5)

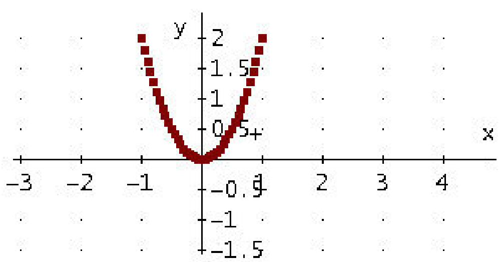
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.75 \\ 1.5 & 1.125 \\ 2 & 1.5 \\ 2.5 & 1.875 \\ 3 & 2.25 \\ 3.5 & 2.625 \\ 4 & 3 \\ 4.5 & 3.375 \\ 5 & 3.75 \end{bmatrix}$$



Pasamos a números reales, cantidades continuas, con nuevas relaciones como 2x^2

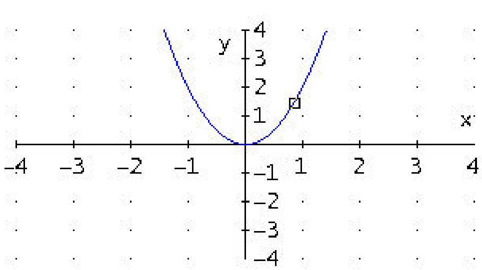
$$f(x) \coloneqq 2x^2$$

$$\mathrm{VECTOR}([x,\ f(x)],\ x,\ -1,\ 1,\ 0.05) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -0.95 & 1.805 \\ -0.9 & 1.62 \\ -0.85 & 1.445 \\ -0.8 & 1.28 \\ -0.75 & 1.125 \\ -0.7 & 0.98 \\ -0.65 & 0.845 \\ -0.6 & 0.72 \\ -0.55 & 0.605 \\ -0.5 & 0.5 \\ -0.45 & 0.405 \\ -0.4 & 0.32 \\ -0.35 & 0.245 \\ -0.3 & 0.18 \\ -0.25 & 0.125 \\ -0.2 & 0.08 \\ -0.15 & 0.045 \\ -0.1 & 0.02 \\ -0.05 & 0.005 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0.05 & 0.005 \\ 0.1 & 0.02 \\ 0.15 & 0.045 \\ 0.2 & 0.08 \\ 0.25 & 0.125 \\ 0.3 & 0.18 \\ 0.35 & 0.245 \\ 0.4 & 0.32 \\ 0.45 & 0.405 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.55 & 0.605 \\ 0.6 & 0.72 \\ 0.65 & 0.845 \\ 0.7 & 0.98 \\ 0.75 & 1.125 \\ 0.8 & 1.28 \\ 0.85 & 1.445 \\ 0.9 & 1.62 \\ 0.95 & 1.805 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



Si aumentamos el número de puntos, la gráfica de la función se hace continua. Dibujamos ahora la gráfica directamente de la expresión algebraica. Introducimos el cursor para ir viendo la variación del punto en ambos ejes en el ángulo inferior izquierdo.

$$f(x) \coloneqq 2x^2$$



Actividad 5: Definir el concepto de función y=f(x) cuando la "x" se hace continua, con una expresión algebraica. Asignar un concepto, de imagen a un valor de x.

- Una **función** es una relación entre dos variables numéricas, habitualmente las denominamos ***x*** e ***y***; a una de ellas la llamamos **variable dependiente** pues depende de los valores de la otra para su valor, suele ser la ***y***; a la otra por tanto se la denomina **variable independiente** y suele ser la ***x***.

- Pero además para que una relación sea función a cada valor de la variable independiente le corresponde uno o ningún valor de la variable dependiente, no le puede corresponder dos o más valores.

¿QUÉ RELACIONES NO SON FUNCIONES?

El concepto de función es muy amplio. Y, de hecho, muchas relaciones son funcionales, pero no todas. Veamos una serie de relaciones que no caen en el marco de las funciones y por qué razón.

No es una función la relación que al número (x) de DNI de cada cliente de un banco le asigne el número (y) de su cuenta corriente, porque hay quien tiene más de una cuenta. Para ser una función tendría que hacer corresponder a cada x un único valor y.

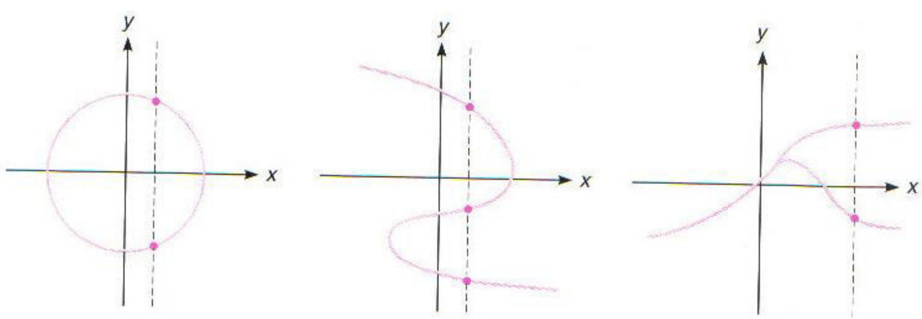
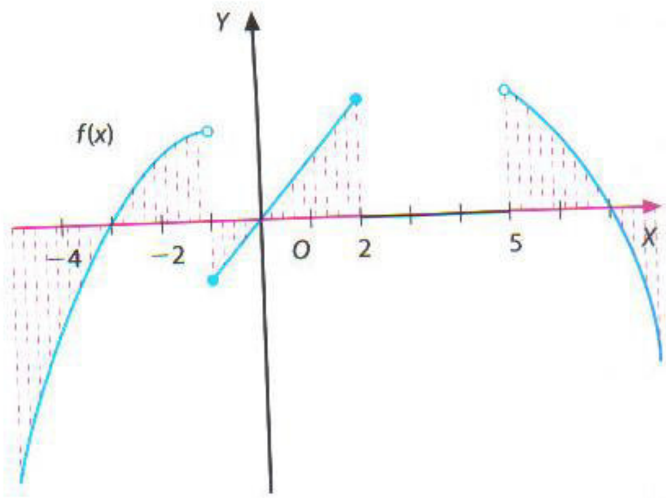


Figura 8.9.

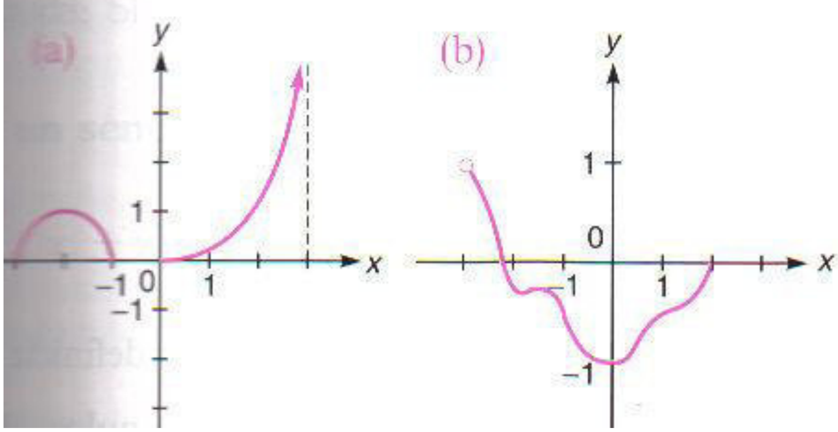
Definir dominio y recorrido ó rango como trozos, intervalos o rectas donde se mueven la "x" y la "y".

Funciones definidas gráficamente

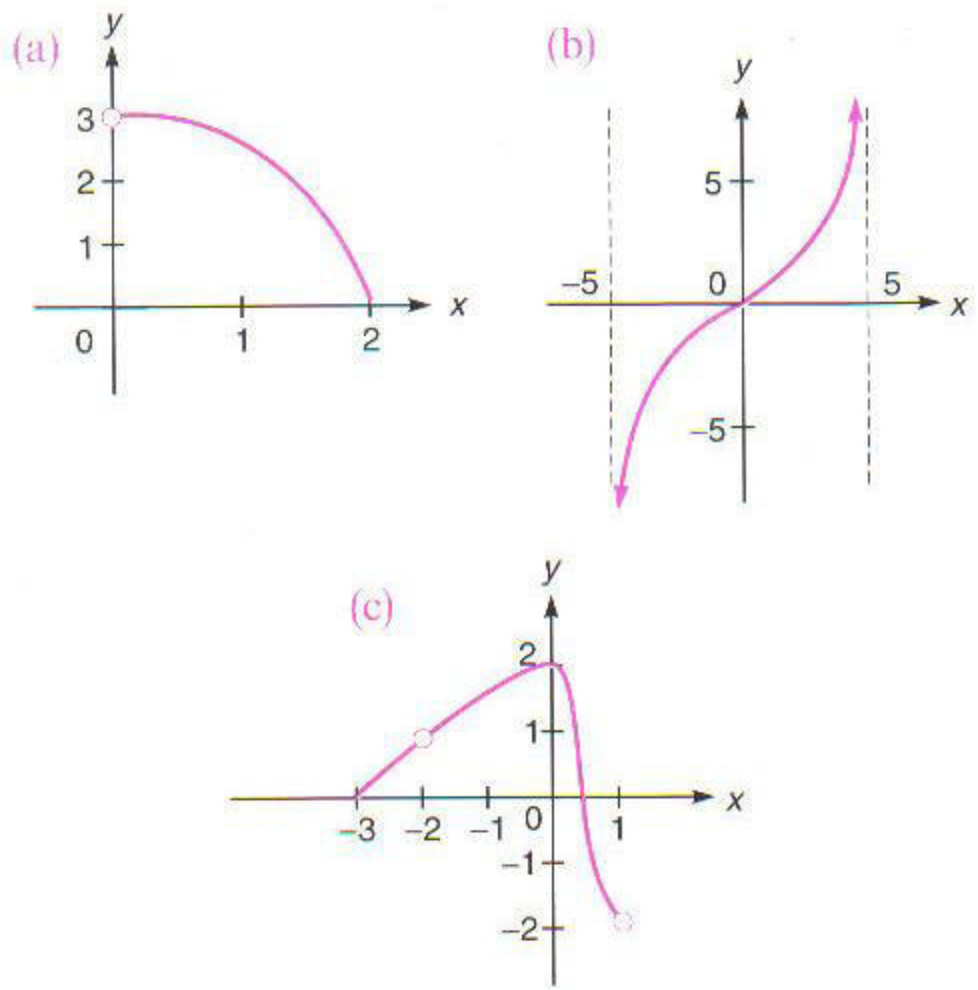
Cuando una función está expresada gráficamente, determinar su do
s observar el conjunto de valores reales del eje de abscisas que tienen in
Un procedimiento visual consiste en proyectar la gráfica sobre el eje de ab
como ves en la figura; en este caso: Dom $f(x) = (-\infty, 2] \cup (5, +\infty)$.



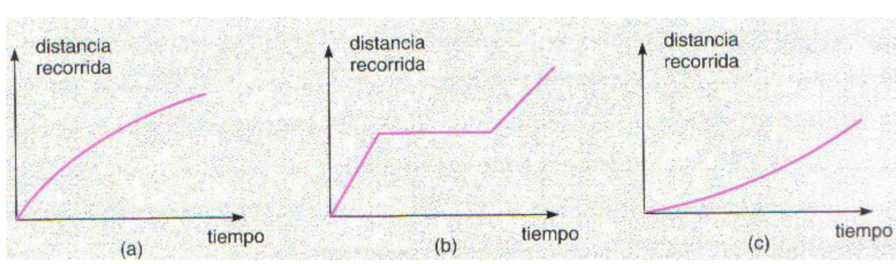
Halla el dominio y el rango de la función de cada figura:



Halla el dominio y el rango de las funciones cuyas gráficas se dan a continuación:



Hay funciones que son de tipo experimental, no tienen expresión algebraica o no la conocemos, como las siguientes. El objetivo es observar funciones sin procedimiento analítico, e inducir una posible modelización de un fenómeno.

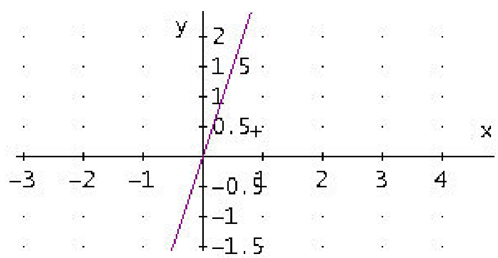


Que los alumnos discutan sobre que pueden indicar dichas gráficas, comentando las magnitudes, cómo se relacionan y qué nos están diciendo sobre algún fenómeno o situación.

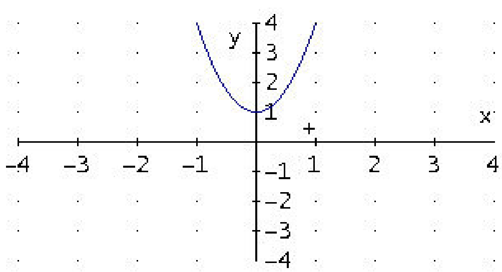
Actividad 6: Dibujar varias funciones por el comando gráfico directamente de su expresión algebraica (Procedimiento analítico) y delimitar su dominio y recorrido, bien de manera informal o como intervalos formales.

El objetivo es relacionar lenguaje simbólico y gráfico con el verbal de los alumnos.

g(x) ≔ 3·x

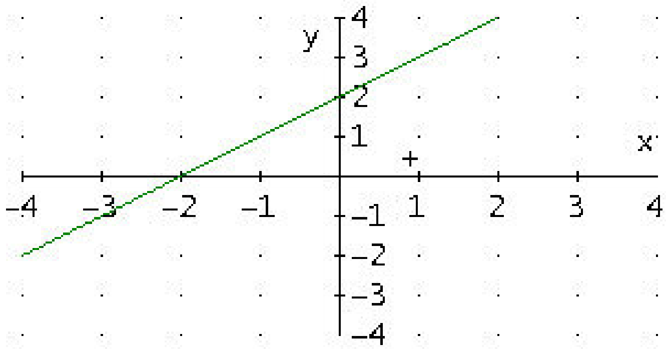


$h(x) = 3x^2 + 1$

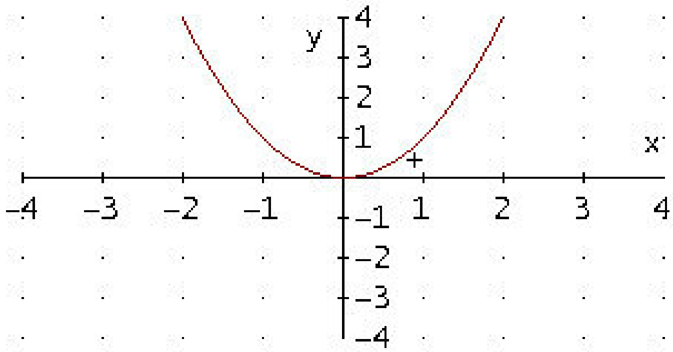


Actividad 7: Hallar dominios y recorridos de varias funciones. Para afianzar los conceptos al observar las gráficas con el zoom. Podemos ahora introducir la expresión y= en vez de f(x)=. El objetivo es conocer el lenguaje simbólico y manejar con soltura los comandos del programa para acercar y alejar una gráfica.

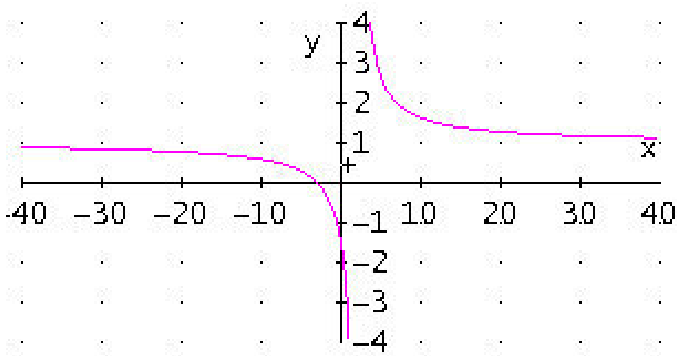
$$y = x + 2$$



$$y = x^2$$

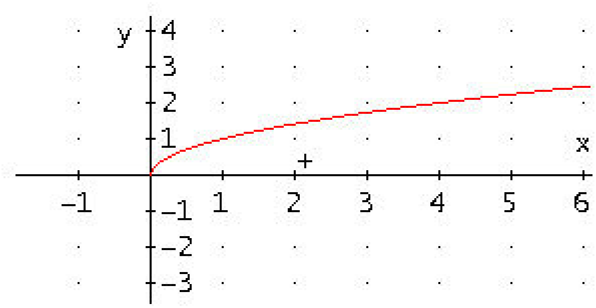


$$y = \frac{x+3}{x-2}$$



Actividad 8: Trabajar sobre una función, después de las vistas anteriormente, observando cómo le afecta a su gráfica el cambio de la expresión algebraica. El objetivo es inducir cambios gráficos tras las manipulaciones algebraicas. Elegimos la siguiente función. Caracterizamos su dominio y recorrido.

$$y = \sqrt{x}$$



Modificamos los números y radicandos, para ver cómo cambian las funciones al variar su expresión algebraica.

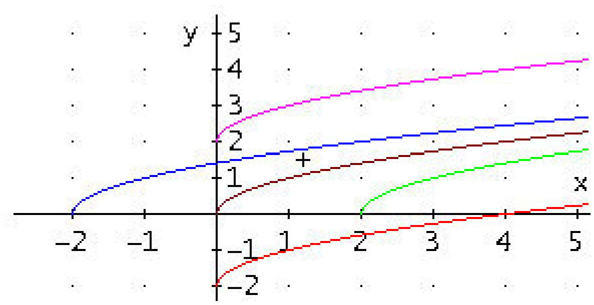
$$\sqrt{x} + 2$$

$$\sqrt{x} - 2$$

$$\sqrt{(x+2)}$$

$$\sqrt{(x-2)}$$

Observamos las gráficas y las tablas



$$\left[\sqrt{x}, \sqrt{x} + 2, \sqrt{x} - 2, \sqrt{(x+2)}, \sqrt{(x-2)}\right]$$

$$x\colon \in \mathbb{R}$$

$$VECTOR\left(\left[\sqrt{x}, \sqrt{x} + 2, \sqrt{x} - 2, \sqrt{(x+2)}, \sqrt{(x-2)}\right], x, 0, 5, 0.5\right)$$

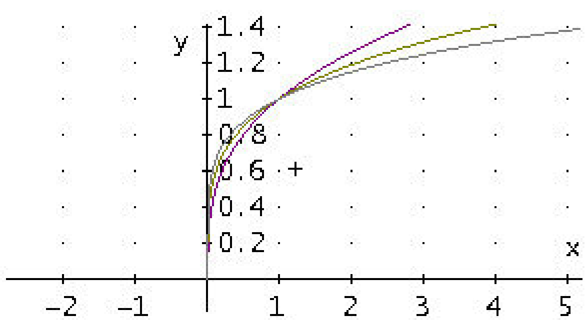
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 1.4142 & 1.4142 \cdot i \\ 0.7071 & 2.7071 & -1.2928 & 1.5811 & 1.2247 \cdot i \\ 1 & 3 & -1 & 1.732 & i \\ 1.2247 & 3.2247 & -0.77525 & 1.8708 & 0.7071 \cdot i \\ 1.4142 & 3.4142 & -0.58578 & 2 & 0 \\ 1.5811 & 3.5811 & -0.41886 & 2.1213 & 0.7071 \\ 1.732 & 3.732 & -0.26794 & 2.236 & 1 \\ 1.8708 & 3.8708 & -0.12917 & 2.3452 & 1.2247 \\ 2 & 4 & 0 & 2.4494 & 1.4142 \\ 2.1213 & 4.1213 & 0.12132 & 2.5495 & 1.5811 \\ 2.236 & 4.236 & 0.23606 & 2.6457 & 1.732 \end{bmatrix}$$

Sacar conclusiones en cada una de las 4 variaciones. ¿Qué pasa con las primeras imágenes dela última función? ¿Y si modificamos el índice?

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$x^{\frac{1}{4}}$$

$$x^{\frac{1}{5}}$$



Sacar las tablas de cada una, y escribir conclusiones.

Actividad 9: Los alumnos analizan 3 funciones, las dibujan y van conjeturando cómo sale el dominio y rango.

Hallan los dominios y recorridos de las funciones dadas en expresión analítica. Primero intentan responder verbalmente y luego confirman o no con la gráfica. El objetivo es crear estrategias o hipótesis, para buscar descomposiciones genéticas de la construcción del concepto de función, así como expresar formalmente en intervalos los dominios y rangos.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 4}$$

$$y = \frac{4x - 1}{x^2 + 7x}$$

$$y = \sqrt{(x + 1)}$$

Actividad 10: Que inventen varias funciones (unas 3 ó 4) a partir de su expresión algebraica, las dibujen, calculen diferentes pares de valores con tablas, identificando sus dominios y recorridos. El objetivo es indagar en la construcción de sus aprendizajes de función, y de los elementos identificativos de la expresión algebraica, dominio y rango.

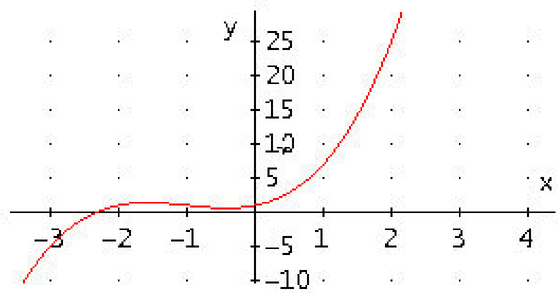
Sesión 2: Tendencias

Actividad 11: Tendencias de las funciones. El objetivo es empezar a conjeturar el paso a una situación límite, pasando por diversos valores muy grandes o pequeños y manejar el zoom del programa conforme a esa adaptación al límite.

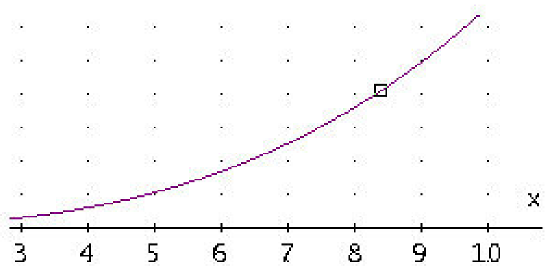
> **TENDENCIAS DE UNA FUNCIÓN** En ocasiones nos interesa saber cómo se comporta la función cuando la variable independiente aumenta mucho o disminuye mucho o cuando se acerca a una valor concreto. A los valores a los que se aproxima es lo que llamamos tendencia de la función.

Dibujar las siguientes funciones y ver con el zoom que le ocurre cuando aumenta mucho la "x"

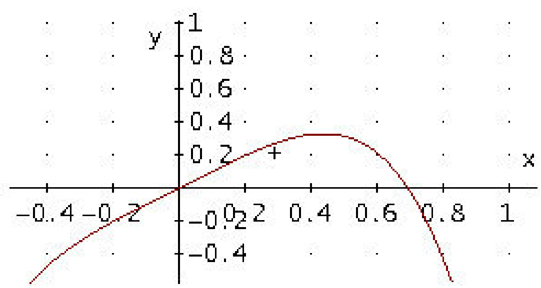
$$y = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

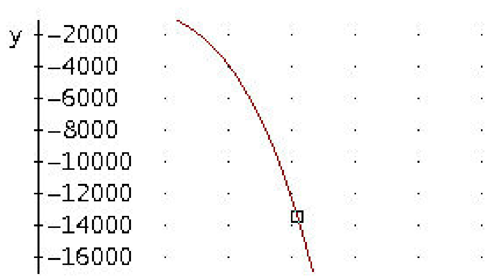


Ir viéndolo con el cursor y con el zoom



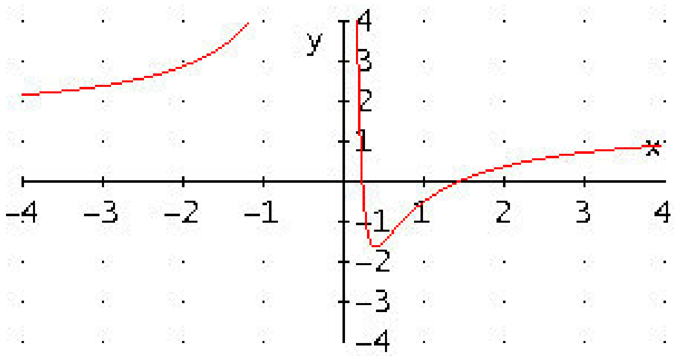
$$y = x - 3x^4$$



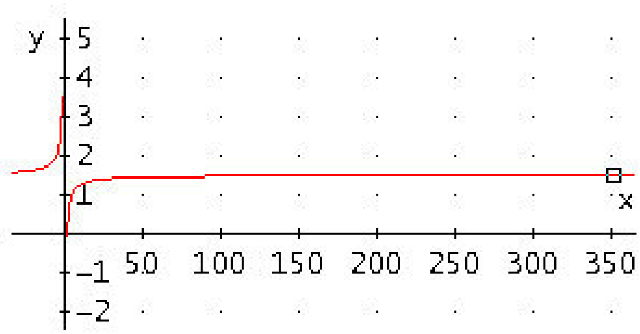


Que vayan creando algunas funciones y buscando la tendencia al aumentar mucho la "x". Después estudiar las tendencias de las siguientes.

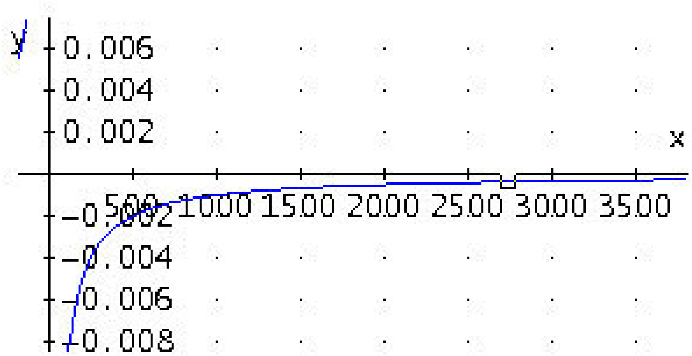
$$y = \frac{3x^2 - 5x + 1}{2x^2}$$



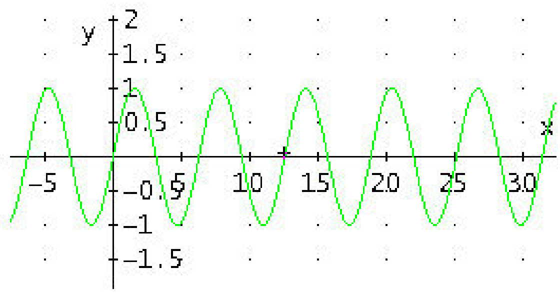
¿Hacia dónde se acerca la función cuando x aumenta mucho, es decir tiene una valor muy grande? Observarlo con el cursor.

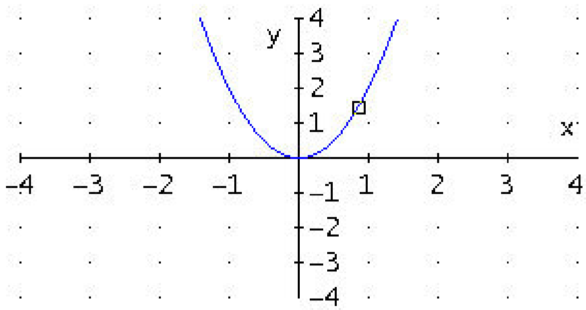


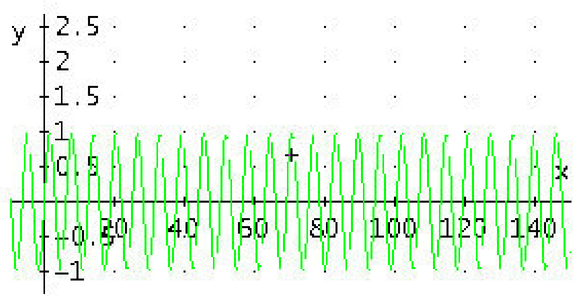
$$y = \frac{x^2 + 3}{-x^3}$$



$$y = SIN\ (x)$$

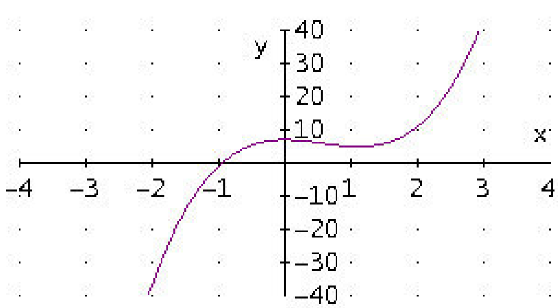




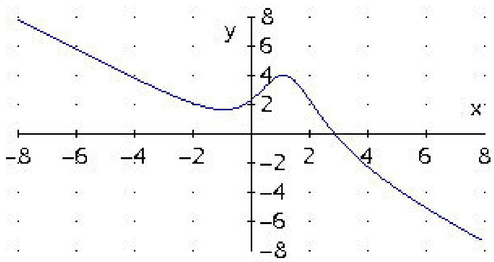


Actividad 12: Hacer lo mismo cuando x disminuye mucho, e indagar en diferentes funciones esas tendencias. El objetivo es ir construyendo pautas de comportamiento de unas funciones.

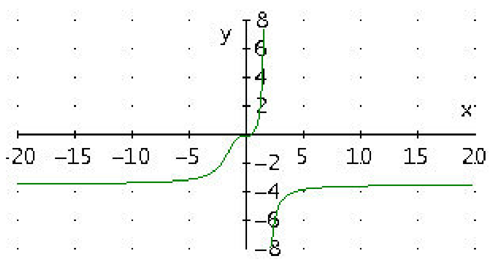
$$y = 3x^3 - 5x^2 + 7$$



$$y = \frac{-x^3 + 2x^2 + 7}{x^2 - 2x + 3}$$

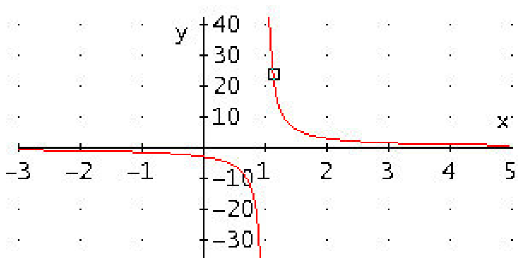


$$y = \frac{7x^3 + 2x^2 - 1}{-2x^3 + 11}$$

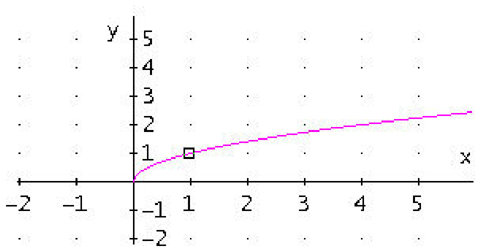


Tendencia cuando x se acerca a un valor, por ejemplo a 1 en

$$y = \frac{3}{x - 1}$$



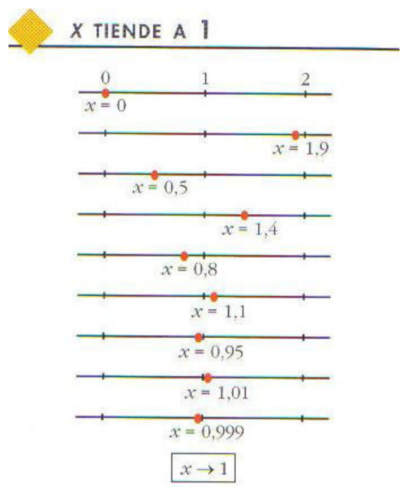
$$y = \sqrt{x}$$



Por cierto, ¿cómo me acerco a 1 en ambas funciones? El objetivo es discernir entre una aproximación en torno a un punto, y la aproximación de su imagen.

Visualizar una tendencia cuando x se aproximan a un valor.

Para diferenciarla de la tendencia de x a +/- ∞.Vemos el ejemplo de x→1.Se empieza a diferenciar la aproximación por la izquierda y por la derecha.

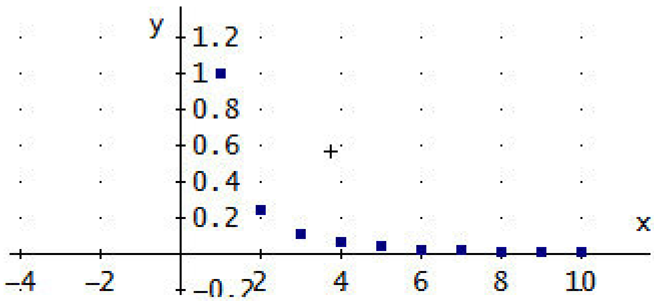


Actividad 13: Visualizar gráficamente mediante tablas y dibujo, una tendencia cuando aumenta mucho n ó x. El objetivo es relacionar variables y separar sus respectivas tendencias.

$$\left[n, \frac{1}{n^2}\right]$$

$$VECTOR\left(\left[n, \frac{1}{n^2}\right], n, 1, 10, 1\right)$$

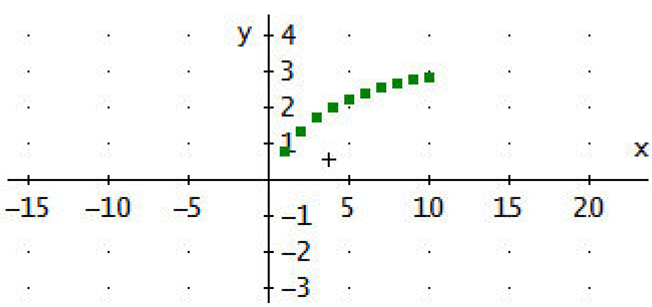
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.25 \\ 3 & 0.1111111111 \\ 4 & 0.0625 \\ 5 & 0.04 \\ 6 & 0.02777777777 \\ 7 & 0.02040816326 \\ 8 & 0.015625 \\ 9 & 0.01234567901 \\ 10 & 0.01 \end{bmatrix}$$



Formalizar esa visualización. Relacionarlo con lenguaje simbólico y riguroso.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

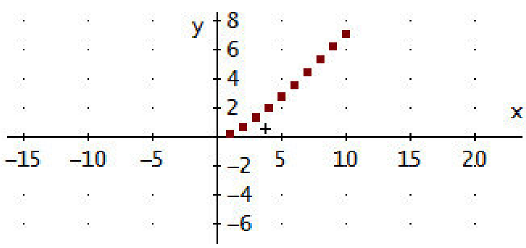
$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[n,\ \frac{4\cdot n}{n+4}\right],\ n,\ 1,\ 10,\ 1\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 2 & 1.333333333 \\ 3 & 1.714285714 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2.222222222 \\ 6 & 2.4 \\ 7 & 2.545454545 \\ 8 & 2.666666666 \\ 9 & 2.769230769 \\ 10 & 2.857142857 \end{bmatrix}$$



$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+4}=4$$

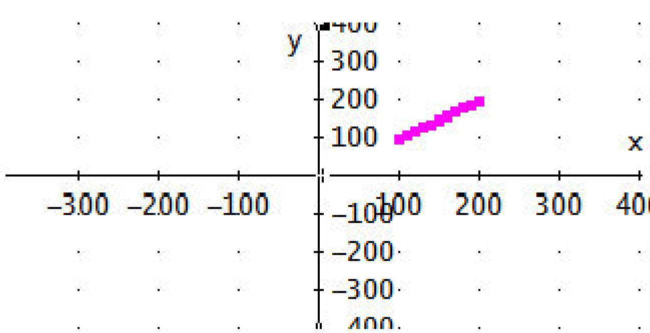
Probamos con la siguiente relación

$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[n, \frac{n^2}{n+4}\right], n, 1, 10, 1\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 2 & 0.6666666666 \\ 3 & 1.285714285 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2.777777777 \\ 6 & 3.6 \\ 7 & 4.454545454 \\ 8 & 5.333333333 \\ 9 & 6.23076923 \\ 10 & 7.142857142 \end{bmatrix}$$



Se pueden dar valores grandes para intuir su tendencia

$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[n, \frac{n^2}{n+4}\right], n, 100, 200, 10\right) = \begin{bmatrix} 100 & 96.15384615 \\ 110 & 106.1403508 \\ 120 & 116.1290322 \\ 130 & 126.1194029 \\ 140 & 136.1111111 \\ 150 & 146.1038961 \\ 160 & 156.0975609 \\ 170 & 166.091954 \\ 180 & 176.0869565 \\ 190 & 186.0824742 \\ 200 & 196.0784313 \end{bmatrix}$$



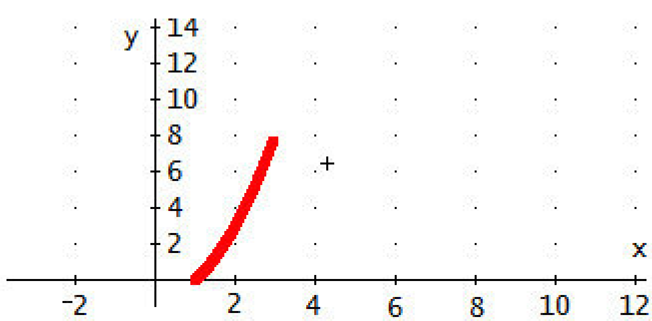
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+4}=\infty$$

Ahora cuando x se acerca a un valor, por ejemplo a 3 por la izquierda, en la siguiente función.

$$f(x) \coloneqq x^2 - 1$$

VECTOR([x, f(x)], x, 1, 2.99, 0.05) =

1	0
1.05	0.1025
1.1	0.21
1.15	0.3225
1.2	0.44
1.25	0.5625
1.3	0.69
1.35	0.8225
1.4	0.96
1.45	1.1025
1.5	1.25
1.55	1.4025
1.6	1.56
1.65	1.7225
1.7	1.89
1.75	2.0625
1.8	2.24
1.85	2.4225
1.9	2.61
1.95	2.8025
2	3
2.05	3.2025
2.1	3.41
2.15	3.6225
2.2	3.84
2.25	4.0625
2.3	4.29
2.35	4.5225
2.4	4.76
2.45	5.0025
2.5	5.25
2.55	5.5025
2.6	5.76
2.65	6.0225
2.7	6.29
2.75	6.5625
2.8	6.84
2.85	7.1225
2.9	7.41
2.95	7.7025

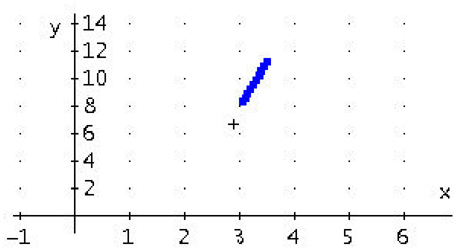


Formalizar

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 8$$

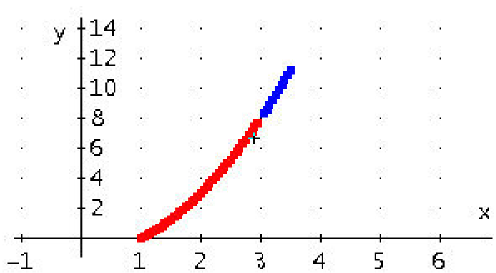
Ahora me acerco la x a 3 por la derecha.

$$\text{VECTOR}([x,\ f(x)],\ x,\ 3.5,\ 3.05,\ -0.05) = \begin{bmatrix} 3.5 & 11.25 \\ 3.45 & 10.9025 \\ 3.4 & 10.56 \\ 3.35 & 10.2225 \\ 3.3 & 9.89 \\ 3.25 & 9.5625 \\ 3.2 & 9.24 \\ 3.15 & 8.9225 \\ 3.1 & 8.61 \\ 3.05 & 8.3025 \end{bmatrix}$$



$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 8$$

Observar las 2 aproximaciones conjuntamente.

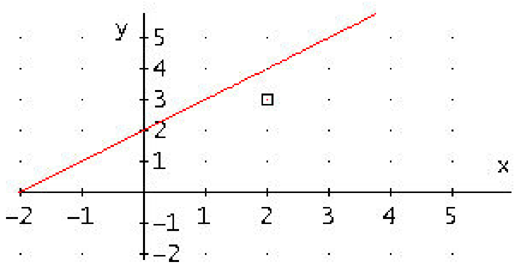


$$\lim_{x \to 3} f(x) = 8$$

Actividad 14: Introducimos funciones "raras", como cortadas, y con el cursor vamos viendo las aproximaciones laterales. El objetivo es apreciar la diferencia en el rango según las aproximaciones derecha-izquierda. También introducimos el manejo de funciones condicionadas en el programa.

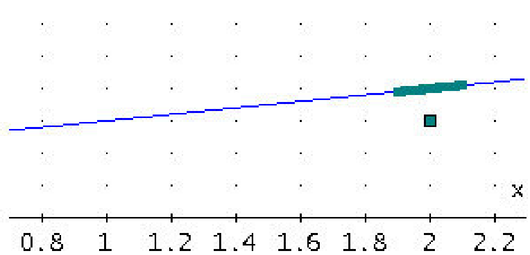
$$f(x) :=$$

$$If\left(x \neq 2, \frac{x^2-4}{x-2}, 3\right)$$



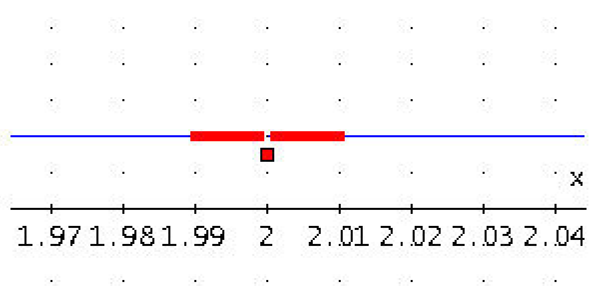
VECTOR([x, f(x)], x, 1.9, 2.1, 0.01) =

1.9	3.9
1.91	3.91
1.92	3.92
1.93	3.93
1.94	3.94
1.95	3.95
1.96	3.96
1.97	3.97
1.98	3.98
1.99	3.99
2	3
2.01	4.01
2.02	4.02
2.03	4.03
2.04	4.04
2.05	4.05
2.06	4.06
2.07	4.07
2.08	4.08
2.09	4.09
2.1	4.1



Lo hacemos con aproximaciones más finas, y conjeturamos sobre la tendencia

$$\text{VECTOR([x, f(x)], x, 1.99, 2.01, 0.001)} = \begin{bmatrix} 1.99 & 3.99 \\ 1.991 & 3.991 \\ 1.992 & 3.992 \\ 1.993 & 3.993 \\ 1.994 & 3.994 \\ 1.995 & 3.995 \\ 1.996 & 3.996 \\ 1.997 & 3.997 \\ 1.998 & 3.998 \\ 1.999 & 3.999 \\ 2 & 3 \\ 2.001 & 4.001 \\ 2.002 & 4.002 \\ 2.003 & 4.003 \\ 2.004 & 4.004 \\ 2.005 & 4.005 \\ 2.006 & 4.006 \\ 2.007 & 4.007 \\ 2.008 & 4.008 \\ 2.009 & 4.009 \\ 2.01 & 4.01 \end{bmatrix}$$



¿Cuál es la tendencia de la función cuando hacemos aproximaciones laterales?

¿Cuál es el valor de la función en x=2?

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

$$f(2) = 3$$

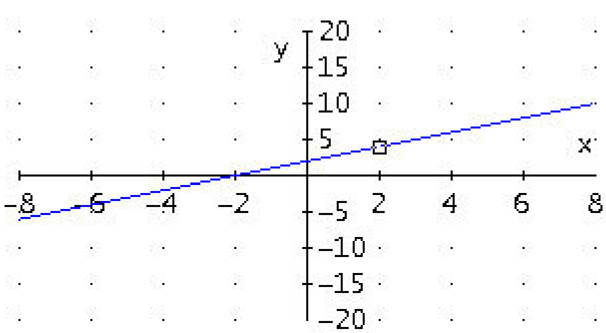
¿Existe límite de la función? ¿Se alcanza?

Veamos la siguiente función

$$f(x) :=$$

$$If\left(x \neq 2, \frac{x^2 - 4}{x - 2}\right)$$

$$\text{VECTOR([x, f(x)], x, 1.99, 2.01, 0.001)} = \begin{bmatrix} 1.99 & 3.99 \\ 1.991 & 3.991 \\ 1.992 & 3.992 \\ 1.993 & 3.993 \\ 1.994 & 3.994 \\ 1.995 & 3.995 \\ 1.996 & 3.996 \\ 1.997 & 3.997 \\ 1.998 & 3.998 \\ 1.999 & 3.999 \\ 2 & ? \\ 2.001 & 4.001 \\ 2.002 & 4.002 \\ 2.003 & 4.003 \\ 2.004 & 4.004 \\ 2.005 & 4.005 \\ 2.006 & 4.006 \\ 2.007 & 4.007 \\ 2.008 & 4.008 \\ 2.009 & 4.009 \\ 2.01 & 4.01 \end{bmatrix}$$



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

$$f(2) = ?$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = ?$$

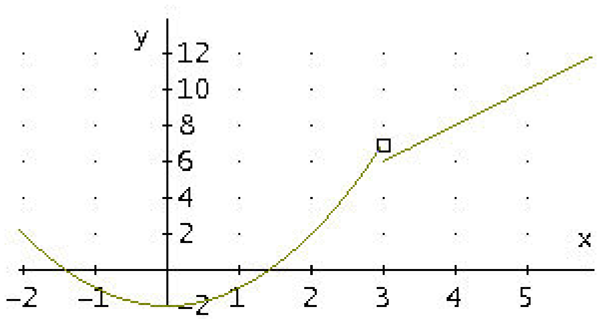
¿Existe límite de la función? ¿Se alcanza?

Nos hacemos las mismas preguntas que antes.

Veamos ahora la siguiente función y hacemos lo mismo. Primero con el cursor, nos acercamos lateralmente, y luego nos hacemos una tabla.

$$f(x) :=$$

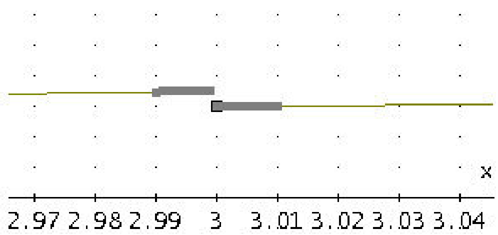
$$If\ (x < 3, x^2 - 2, 2x)$$



VECTOR([x, f(x)], x, 2.99, 3.01, 0.001) =

2.99	6.9401
2.991	6.946081
2.992	6.952064
2.993	6.958049
2.994	6.964036
2.995	6.970025
2.996	6.976016
2.997	6.982009
2.998	6.988004
2.999	6.994001
3	6

3.001	6.002
3.002	6.004
3.003	6.006
3.004	6.008
3.005	6.01
3.006	6.012
3.007	6.014
3.008	6.016
3.009	6.018
3.01	6.02



Conjeturamos, ¿Existe límite en x = 3?

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

$$f(3) = 6$$

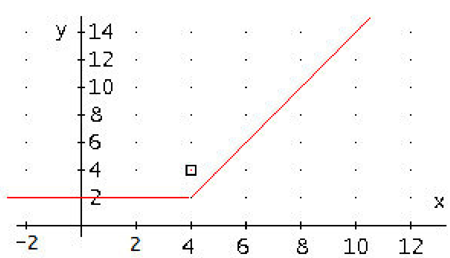
Actividad 15: Si existen los 2 límites laterales de una función en un punto "a" del dominio, son finitos y coinciden, entonces existe también el límite de la función cuando x→a. Si no es así, la función no tiene límite en x = a.

El objetivo es definir conceptos y aplicarlos con el ordenador, manejando el cursor y pasando al lenguaje simbólico, comprobando los cálculos.

Trabaja los siguientes límites:

$$f(x) :=$$

$$If\ (x < 4, 2, If(x = 4, 4, 2x - 6\,))$$



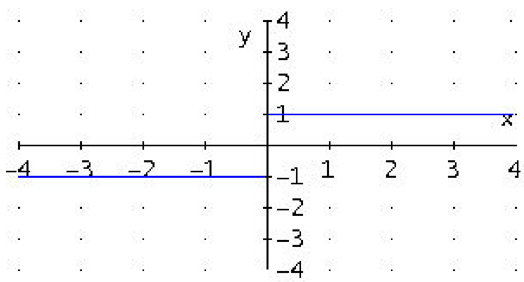
$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 2$$

¿Hay límite? ¿Se alcanza?

$$\lim_{x \to 4} f(x) =$$

$$f(x) := \frac{|x|}{x}$$



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

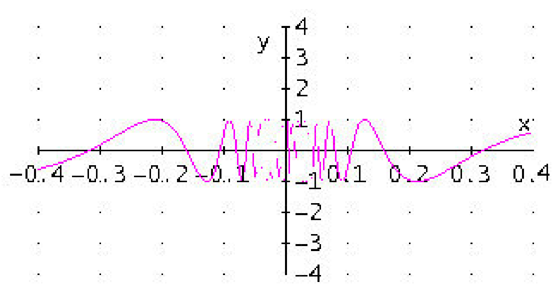
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \pm 1$$

¿Qué le pasa al ordenador? ¿Cómo ve el límite?, ¿Qué piensas tú?

¿Existe límite de la función? ¿Se alcanza?

$$f(x) := SIN\left(\frac{1}{x}\right)$$

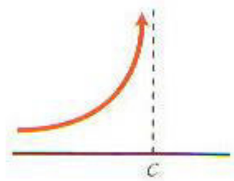


¿Qué puedes decir del límite cuando x→0?, ¿Hay límite?, Razona tu respuesta

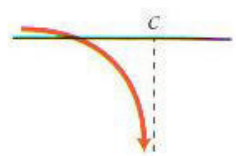
Sesión 3: Relación entre 2 aproximaciones, cuando x→a, f(x)→l

Actividad 16: El objetivo es estudiar límites de funciones en puntos, que tienden a +/-∞, por ejemplo por la izquierda, derecha y formalizar en el punto dado, aunque podríamos aceptar un lenguaje cualitativo de las tendencias, como por ejemplo: cuando x se acerca a un punto, la función se hace muy grande, rápidamente.

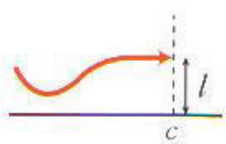
$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty}$$



$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty}$$

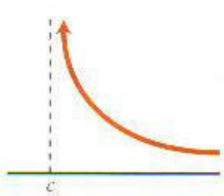


$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = l}$$

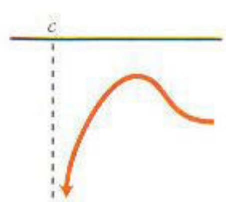


Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c^+$

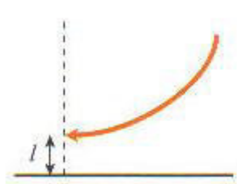
El significado de $\lim_{x \to c^+} f(x)$ (*límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *por la derecha*) es similar al del $\lim_{x \to c^-} f(x)$. Veamos gráficamente los tres comportamientos que pueden darse, idénticos a los vistos para $x \to c^-$.



$\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$



$\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$



$\lim_{x \to c^+} f(x) = l$

Los límites cuando $x \to c^-$ y $x \to c^+$ se llaman **límites laterales**.

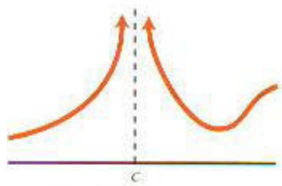
Significado de $\lim f(x)$ cuando $x \to c$

$\lim\limits_{x \to c} f(x)$ (*límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c es el comportamiento de la función cuando x se aproxima a c, sin importar si es por la derecha o por la izquierda.

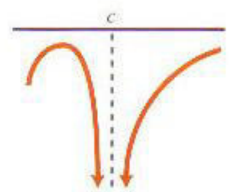
Si $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = l$, decimos que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$.

Análogamente, cuando los dos límites laterales son $+\infty$ o $-\infty$.

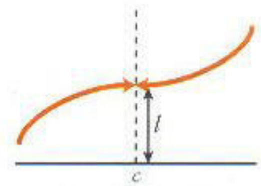
Si los dos límites laterales no toman el mismo valor, se dice que **no existe** el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$.



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to c} f(x) = l$

Límites de las siguientes funciones

$$f(x) := \frac{x+1}{x-1}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x-1}$$

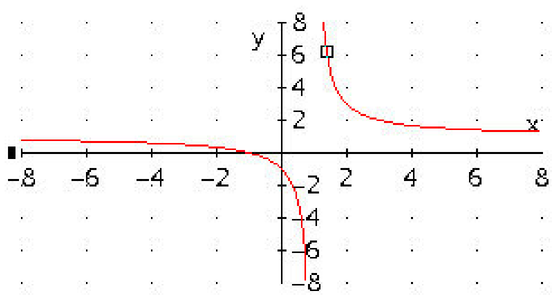
$$\text{VECTOR([x, f(x)], x, 0.9, 0.99, 0.01)} = \begin{bmatrix} 0.9 & -19 \\ 0.91 & -21.222 \\ 0.92 & -24 \\ 0.93 & -27.571 \\ 0.94 & -32.333 \\ 0.95 & -39 \\ 0.96 & -49 \\ 0.97 & -65.666 \\ 0.98 & -99 \\ 0.99 & -199 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x-1}$$

$$VECTOR([x, f(x)], x, 1.1, 1.01, -0.01)$$

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 21 \\ 1.09 & 23.222 \\ 1.08 & 26 \\ 1.07 & 29.571 \\ 1.06 & 34.333 \\ 1.05 & 41 \\ 1.04 & 51 \\ 1.03 & 67.666 \\ 1.02 & 101 \\ 1.01 & 201 \end{bmatrix}$$

Seguirlo con el cursor desde la izquierda y derecha de 1. Hacer conjeturas.



$$\lim_{x \to 1-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$$

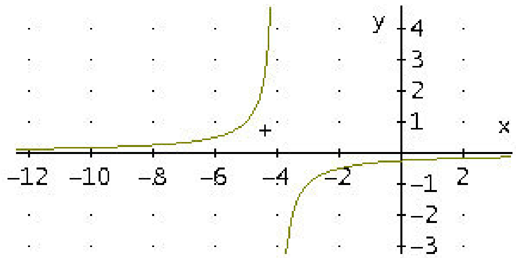
$$\lim_{x \to 1+} \frac{x+1}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x-1} = \pm\infty$$

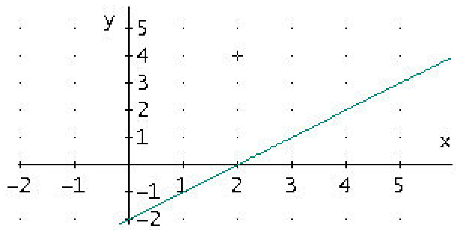
Explica el resultado que da el ordenador.

Actividad 17: Calcula los siguientes límites y explícalos razonadamente antes de dibujarlos. Compruébalos con el ordenador con una tabla y su gráfica.

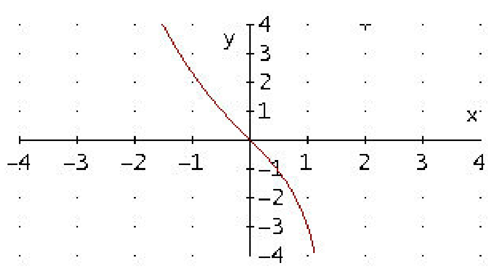
$$\lim_{x \to -4} \frac{-1}{x+4}$$



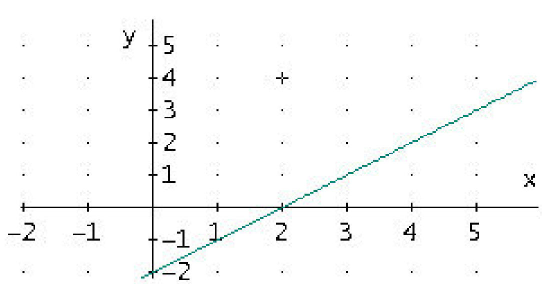
$$\lim_{x \to 2} \frac{x + x - 6}{x+3}$$



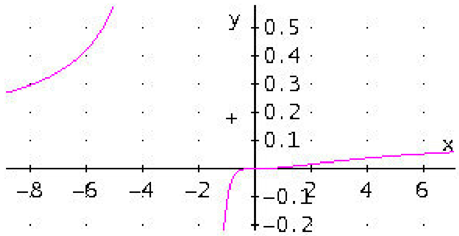
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x-2}$$



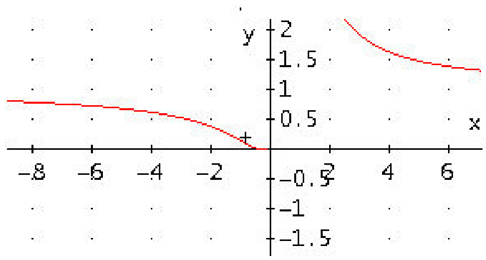
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x - 6}{x+3}$$



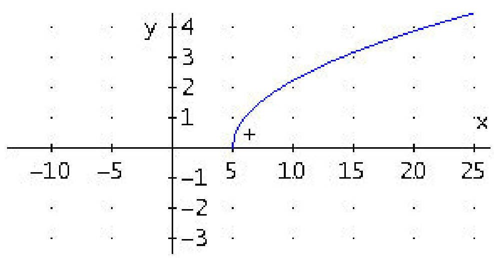
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{(4+2x)^3}$$



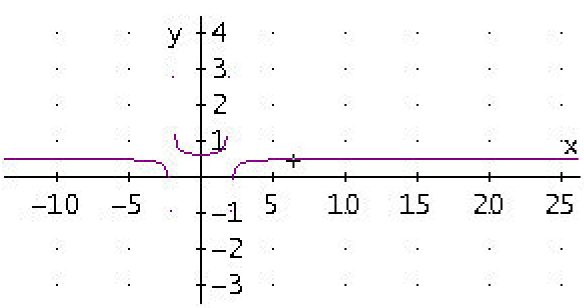
$$\lim_{x \to +\infty} 7^{1/x}$$



$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{(x-5)}$$



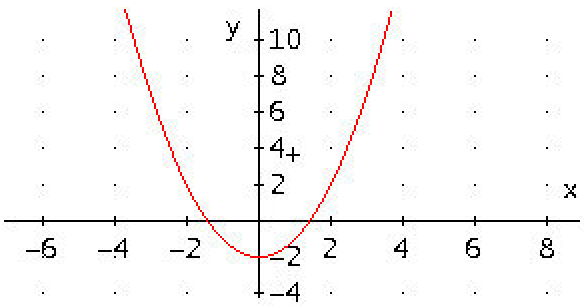
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-5}{2x^2-8}$$



Actividad 18: Un n° real “L” FINITO es límite de una función f(x) en un punto “a”, si al tomar valores de x cada vez más próximos al “a”, sus imágenes correspondientes, están más próximas a L. Si $|x-a| \to 0$, entonces $|f(x)-L| \to 0$. El límite es único en ese punto.

Definimos límite como una aproximación previa al concepto métrico, pensando que puede facilitar el concepto más formal de Spivak, manejando distancias.

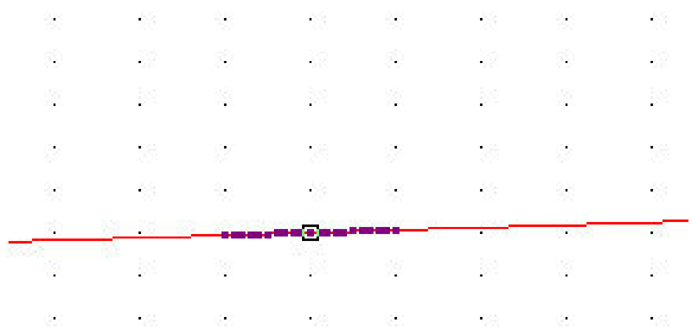
$f(x) := x^2 - 2$



Hacemos una tabla de $|x-a|$ y $|f(x)-L|$ para ver sus tendencias, en x=3, por lo que buscamos “a” próximo a 3.

En primer lugar los pares [a,f(a)]

$$\text{VECTOR([a, f(a)], a, 2.99, 3.01, 0.001)} = \begin{bmatrix} 2.99 & 6.9401 \\ 2.991 & 6.946081 \\ 2.992 & 6.952064 \\ 2.993 & 6.958049 \\ 2.994 & 6.964036 \\ 2.995 & 6.970025 \\ 2.996 & 6.976016 \\ 2.997 & 6.982009 \\ 2.998 & 6.988004 \\ 2.999 & 6.994001 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.001 & 7.006001 \\ 3.002 & 7.012004 \\ 3.003 & 7.018009 \\ 3.004 & 7.024016 \\ 3.005 & 7.030025 \\ 3.006 & 7.036036 \\ 3.007 & 7.042049 \\ 3.008 & 7.048064 \\ 3.009 & 7.054080999 \\ 3.01 & 7.0601 \end{bmatrix}$$



Nos acercamos al 3 por la izquierda, y vemos la diferencia con 3, [a,a-3]

$$\mathrm{VECTOR}([a,\ a-3],\ a,\ 2.99,\ 3,\ 0.001) = \begin{bmatrix} 2.99 & -0.01 \\ 2.991 & -0.009 \\ 2.992 & -0.008 \\ 2.993 & -0.007 \\ 2.994 & -0.006 \\ 2.995 & -0.005 \\ 2.996 & -0.004 \\ 2.997 & -0.003 \\ 2.998 & -0.002 \\ 2.999 & -0.001 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo hacemos ahora por la derecha, y observamos las diferencias con 3, [a,a-3]

$$\mathrm{VECTOR}([a,\ a-3],\ a,\ 3.01,\ 3,\ -0.001) = \begin{bmatrix} 3.01 & 0.01 \\ 3.009 & 0.009 \\ 3.008 & 0.008 \\ 3.007 & 0.007 \\ 3.006 & 0.006 \\ 3.005 & 0.005 \\ 3.004 & 0.004 \\ 3.003 & 0.003 \\ 3.002 & 0.002 \\ 3.001 & 0.001 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ponemos en valor absoluto esas diferencias, y sólo contamos ya distancias positivas.

$|3 - a|$

$$\text{VECTOR}([a,\ |3 - a|],\ a,\ 2.99,\ 3.01,\ 0.001) = \begin{bmatrix} 2.99 & 0.01 \\ 2.991 & 0.009 \\ 2.992 & 0.008 \\ 2.993 & 0.007 \\ 2.994 & 0.006 \\ 2.995 & 0.005 \\ 2.996 & 0.004 \\ 2.997 & 0.003 \\ 2.998 & 0.002 \\ 2.999 & 0.001 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3.001 & 0.001 \\ 3.002 & 0.002 \\ 3.003 & 0.003 \\ 3.004 & 0.004 \\ 3.005 & 0.005 \\ 3.006 & 0.006 \\ 3.007 & 0.007 \\ 3.008 & 0.008 \\ 3.009 & 0.009 \\ 3.01 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Lo hacemos ahora con f(a) y sus diferencias con 7, $|f(a) - 7|$

$VECTOR\ ([f(a), |f(a) - 7|], a, 2.99, 3.01, 0.001)$

$$\begin{bmatrix} 6.94 & 0.0599 \\ 6.946 & 0.053919 \\ 6.952 & 0.047936 \\ 6.958 & 0.041951 \\ 6.964 & 0.035963 \\ 6.97 & 0.029975 \\ 6.976 & 0.023984 \\ 6.982 & 0.017991 \\ 6.988 & 0.011996 \\ 6.994 & 0.005999 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 7.006 & 0.006001 \\ 7.012 & 0.012004 \\ 7.018 & 0.018008 \\ 7.024 & 0.024016 \\ 7.03 & 0.030025 \\ 7.036 & 0.036036 \\ 7.042 & 0.042049 \\ 7.048 & 0.048064 \\ 7.054 & 0.054081 \\ 7.0601 & 0.0601 \end{bmatrix}$$

Las podemos juntar para observarlo mejor que si $|3 - a| \to 0$, entonces $|f(a) - 7| \to 0$

$VECTOR\ ([a, |3 - a|, f(a), |f(a) - 7|], a, 2.99, 3.01, 0.001)$

$$\begin{bmatrix} 2.99 & 0.01 & 6.94 & 0.0599 \\ 2.991 & 0.009 & 6.946 & 0.053919 \\ 2.992 & 0.008 & 6.952 & 0.047936 \\ 2.993 & 0.007 & 6.958 & 0.041951 \\ 2.994 & 0.006 & 6.964 & 0.035963 \\ 2.995 & 0.005 & 6.97 & 0.029975 \\ 2.996 & 0.004 & 6.976 & 0.023984 \\ 2.997 & 0.003 & 6.982 & 0.017991 \\ 2.998 & 0.002 & 6.988 & 0.011996 \\ 2.999 & 0.001 & 6.994 & 0.005999 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 3.001 & 0.001 & 7.006 & 0.006001 \\ 3.002 & 0.002 & 7.012 & 0.012004 \\ 3.003 & 0.003 & 7.018 & 0.018008 \\ 3.004 & 0.004 & 7.024 & 0.024016 \\ 3.005 & 0.005 & 7.03 & 0.030025 \\ 3.006 & 0.006 & 7.036 & 0.036036 \\ 3.007 & 0.007 & 7.042 & 0.042049 \\ 3.008 & 0.008 & 7.048 & 0.048064 \\ 3.009 & 0.009 & 7.054 & 0.054081 \\ 3.01 & 0.01 & 7.0601 & 0.0601 \end{bmatrix}$$

Lo que implica que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7$$

Sesión 4: Definición formal de límite

Actividad 19: Formalizamos la definición de límite, dando gráficas que puedan ayudar a visualizar el concepto.

Definición rigurosa

Informalmente, se dice que **el límite de la función f(*x*) es *L* cuando *x* tiende a *p***, y se escribe

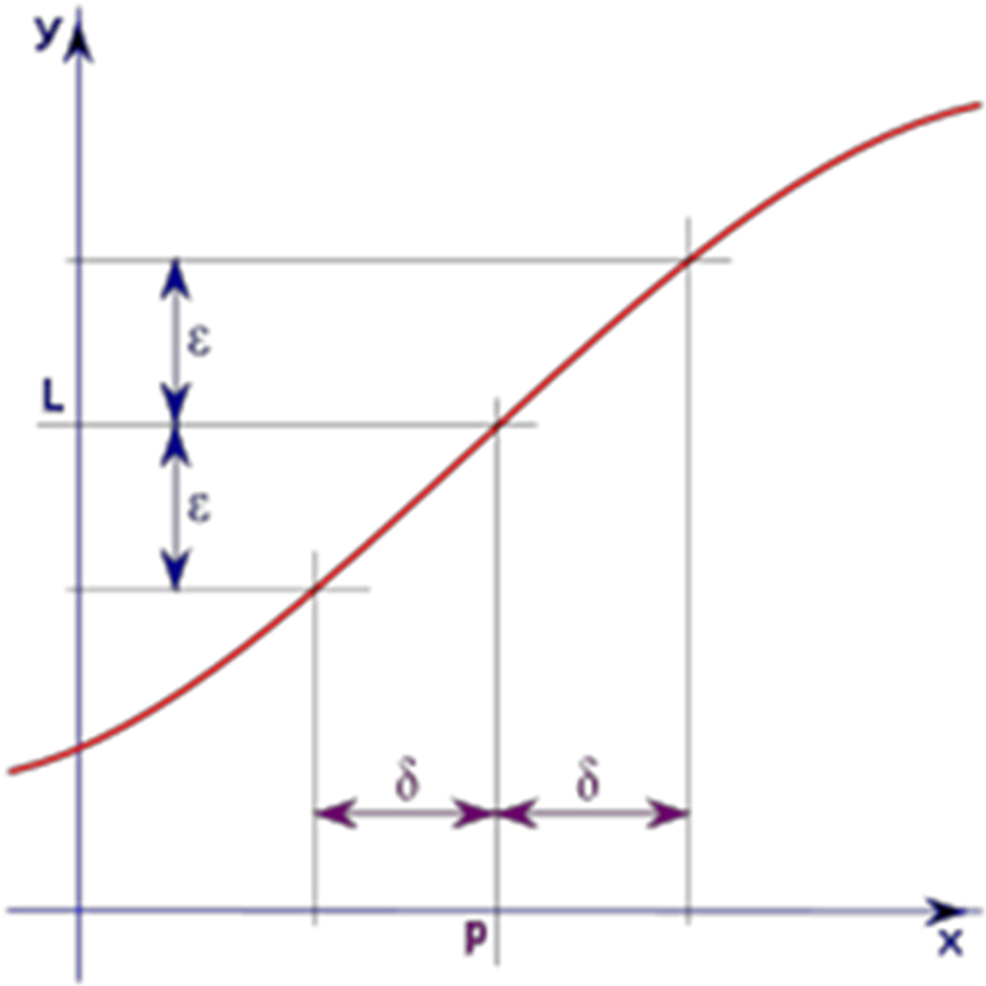
$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

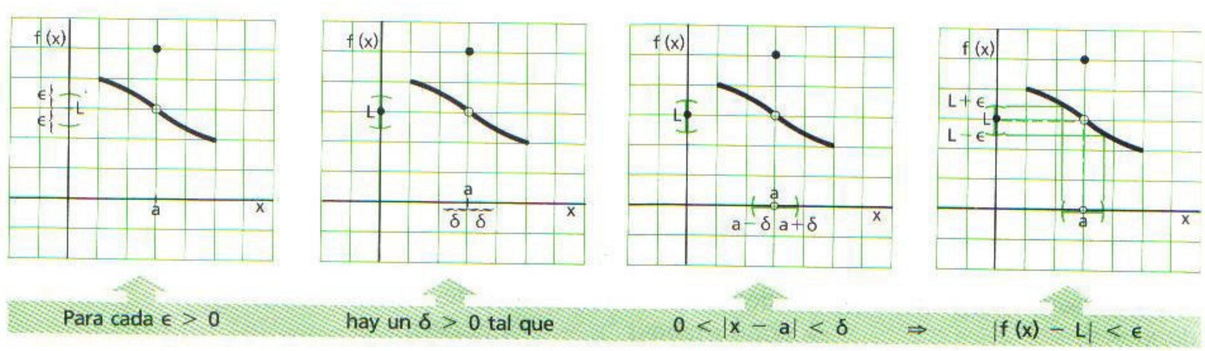
si se puede encontrar para cada ocasión un *x* suficientemente cerca de *p* tal que el valor de f(*x*) sea tan próximo a L como se desee. Formalmente:

$$\left[\lim_{x \to p} f(x) = L\right] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall x (0 < |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Esta definición se denomina frecuentemente **definición épsilon-delta** de límite, y se lee como:

“para cada real *ε* mayor que cero existe un real *δ* mayor que cero tal que, para todo *x*, si la distancia entre *x* y *p* (*x* no es igual a *p*) es menor que *δ*, entonces la distancia entre la imagen de *x* y *L* es menor que *ε* unidades”.





Actividad 20: Relacionamos la definición con el ejemplo practicado. El objetivo es formalizar el lenguaje simbólico con el gráfico que ya vimos, manejando bien el concepto de valor absoluto que ya conocían, y cotejándolo con el ordenador en el comando Resolver>>Expresión.

En nuestro ejemplo, dado un ε>0/ε=0.06, encontramos un δ>0/δ=0.01/ si|3-a|<0.01 entonces $|f(a) - 7| < 0.06$. Lo hacemos con el ordenador y lo formalizamos matemáticamente.

$$|f(a) - 7| < 0.06$$

$$-0.06 < f(a) - 7 < 0.06$$

$$7 - 0.06 < f(a) < 7 + 0.06$$

$$6.94 < f(a) < 7.06$$

$$|(x^2 - 2) - 7| < 0.06$$

$$-0.06 < (x^2 - 2) - 7 < 0.06$$

$$7 - 0.06 < x^2 - 2 < 7 + 0.06$$

$$6.94 < x^2 - 2 < 7.06$$

$$6.94 + 2 < x^2 < 7.06 + 2$$

$$8.94 < x^2 < 9.06$$

$$x < \sqrt{9.06} = 3.009983388$$

$$SOLVE(|f(a) - 7| < 0.06, a, Real)$$

$$2.989983277 < a < 3.009983388 \ \vee \ -3.009983388 < a < -2.989983277$$

$$3.009983388 - 3 = 0.009983387999$$

$$|3.009983388 - 3| = 0.009983387999$$

$$2.989983277 - 3 = -0.010016723$$

$$|2.989983277 - 3| = 0.010016723$$

$$|a - 3| < 0.01$$

$$-0.01 < a - 3 < 0.01$$

$$3 - 0.01 < a < 3 + 0.01$$

$$2.99 < a < 3.01$$

Actividad 21. Ahora buscamos nosotros el δ, dando de antemano el ε. Por ejemplo, sea $\varepsilon = 0.0001 > 0$ en la misma función. El objetivo es afianzar la práctica del concepto métrico de límite.

$$SOLVE(|f(a) - 7| < 0.0001, a, Real)$$

$$2.999983333 < a < 3.000016666 \ \vee \ -3.000016666 < a < -2.999983333$$

$$|2.999983333 - 3| = 1.666699999 \times 10^{-5}$$

$$|3.000016666 - 3| = 1.6666 \times 10^{-5}$$

$$\delta = 1.6666 \times 10^{-5}$$

Busquemos en el entorno de 3, valores de a/ |a-3|<δ

$VECTOR\ ([a, |a-3|], a, 2.9999, 3, 1.6666 \times 10^{-6})$

2.9999	0.0001
2.9999	$9.8333 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$9.6666 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$9.5 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$9.3333 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$9.1666 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$9 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$8.8333 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$8.6667 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$8.5 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$8.3333 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$8.1667 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$8 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$7.8334 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$7.6667 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$7.5 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$7.3334 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$7.1667 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$7.0001 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$6.8334 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$6.6668 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$6.5001 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$6.3334 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$6.1668 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$6.0001 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$5.8334 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$5.6668 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$5.5001 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$5.3335 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$5.1668 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$5.0002 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$4.8335 \cdot 10^{-5}$
2.9999	$4.6668 \cdot 10^{-5}$

3	$4.5002 \cdot 10^{-5}$
3	$4.3335 \cdot 10^{-5}$
3	$4.1669 \cdot 10^{-5}$
3	$4.0002 \cdot 10^{-5}$
3	$3.8335 \cdot 10^{-5}$
3	$3.6669 \cdot 10^{-5}$
3	$3.5002 \cdot 10^{-5}$
3	$3.3336 \cdot 10^{-5}$
3	$3.1669 \cdot 10^{-5}$
3	$3.0002 \cdot 10^{-5}$
3	$2.8336 \cdot 10^{-5}$
3	$2.6669 \cdot 10^{-5}$
3	$2.5003 \cdot 10^{-5}$
3	$2.3336 \cdot 10^{-5}$
3	$2.1669 \cdot 10^{-5}$
3	$2.0003 \cdot 10^{-5}$
3	$1.8336 \cdot 10^{-5}$
3	$1.667 \cdot 10^{-5}$
3	$1.5003 \cdot 10^{-5}$
3	$1.3336 \cdot 10^{-5}$
3	$1.167 \cdot 10^{-5}$
3	$1.0003 \cdot 10^{-5}$
3	$8.337 \cdot 10^{-6}$
3	$6.6703 \cdot 10^{-6}$
3	$5.0037 \cdot 10^{-6}$
3	$3.3372 \cdot 10^{-6}$
3	$1.6705 \cdot 10^{-6}$
3	$4 \cdot 10^{-9}$

Y veamos como |f(a)-7|<0.0001

$VECTOR\ ([f(a), |f(a)-7|], a, 2.9999, 3, 1.6666 \times 10^{-6})$

6.9993	0.00059999
6.9994	0.00058999
6.9994	0.00057999
6.9994	0.00056999
6.9994	0.00055999
6.9994	0.00054999
6.9994	0.00053999
6.9994	0.00052999
6.9994	0.00051999
6.9994	0.00050999
6.9995	0.00049999
6.9995	0.00048999
6.9995	0.00047999
6.9995	0.00046999
6.9995	0.00045999
6.9995	0.00045
6.9995	0.00044
6.9995	0.00043
6.9995	0.00042
6.9995	0.00041
6.9995	0.0004
6.9996	0.00039
6.9996	0.00038
6.9996	0.00037
6.9996	0.00036
6.9996	0.00035
6.9996	0.00034
6.9996	0.00033
6.9996	0.00032
6.9996	0.00031
6.9996	0.0003
6.9997	0.00029001
6.9997	0.00028001
6.9997	0.00027001
6.9997	0.00026001
6.9997	0.00025001
6.9997	0.00024001
6.9997	0.00023001
6.9997	0.00022001
6.9997	0.00021001
6.9997	0.00020001
6.9998	0.00019001
6.9998	0.00018001
6.9998	0.00017001
6.9998	0.00016001
6.9998	0.00015001
6.9998	0.00014001
6.9998	0.00013001
6.9998	0.00012001
6.9998	0.00011001
7	0.00010001
7	$9.002 \cdot 10^{-5}$
7	$8.002 \cdot 10^{-5}$
7	$7.0021 \cdot 10^{-5}$
7	$6.0021 \cdot 10^{-5}$
7	$5.0021 \cdot 10^{-5}$
7	$4.0022 \cdot 10^{-5}$
7	$3.0022 \cdot 10^{-5}$
7	$2.0023 \cdot 10^{-5}$
7	$1.0023 \cdot 10^{-5}$
7	$2.4 \cdot 10^{-8}$

Actividad 22: Vamos a usar la definición ε-δ de límite para probar que en la función f(x)=3x-2, tiene límite, con el objetivo de hacer la prueba matemática de un concepto.

$$\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$$

Para cada ε>0, existe un δ>0/ |(3x-2)-4|<ε, siempre que |x-2|<δ

$$|3x - 2 - 4| = 3|x - 2|$$

$$|3x - 2 - 4| = 3|x - 2| < \varepsilon$$

$SOLVE(3|x - 2| < \varepsilon, x, Real)$

$$2 - \frac{\varepsilon}{3} < x < \frac{\varepsilon}{3} + 2$$

Hacemos que $\delta = {}^{\varepsilon}/_{3}$. Por lo tanto si quiero que $\varepsilon = 0.01, \delta = 0.003333$ ...

$f(x) \coloneqq 3x - 2$

$$\text{VECTOR}([a, |a - 2|], a, 1.993, 2.01, 0.0034) = \begin{bmatrix} 1.993 & 0.007 \\ 1.9964 & 0.0036 \\ 1.9998 & 0.0002 \\ 2.0032 & 0.0032 \\ 2.0066 & 0.0066 \\ 2.01 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$\text{VECTOR}([f(a), |f(a) - 4|], a, 1.9, 2.11, 0.01) = \begin{bmatrix} 3.7 & 0.3 \\ 3.73 & 0.27 \\ 3.76 & 0.24 \\ 3.79 & 0.21 \\ 3.82 & 0.18 \\ 3.85 & 0.15 \\ 3.88 & 0.12 \\ 3.91 & 0.09 \\ 3.94 & 0.06 \\ 3.97 & 0.03 \\ 4 & 0 \\ 4.03 & 0.03 \\ 4.06 & 0.06 \\ 4.09 & 0.09 \\ 4.12 & 0.12 \\ 4.15 & 0.15 \\ 4.18 & 0.18 \\ 4.21 & 0.21 \\ 4.24 & 0.24 \\ 4.27 & 0.27 \\ 4.3 & 0.3 \\ 4.33 & 0.33 \end{bmatrix}$$

Actividad 23: Calcular el límite de la siguiente función algebraica y gráficamente y demostrarlo con la definición de límite. El objetivo es buscar una secuencia de aplicación de lo aprendido para ver una posible construcción del concepto de límite con lenguajes algebraicos, gráficos y de razonamiento en la prueba.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5}{2x^2-8}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-5}{2x^2-8}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1}$$

2.3. Actividades de la planificación del PMC

Tratamiento del concepto de límite al infinito

Nivel: Licenciatura.

El tratamiento del concepto se realiza en 6 sesiones, cada sesión contempla dos módulos de 50 minutos.

La planeación de actividades responde a 4 fases que he llamado: aproximación, formalización, identificación y aplicación del concepto del límite al infinito. Desde un punto de vista particular, estas fases son fundamentales para favorecer el proceso de asimilación del concepto en cuestión.

Actividad 1. Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{n\to 2}(n^2+1)$ b) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ c) $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)$

d) $\lim_{n\to\infty}(n^2)$ e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ f) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

Actividad 2. Los casos anteriores ejemplifican casos particulares de tipos de límite, los casos generales de tales tipos son los siguientes:

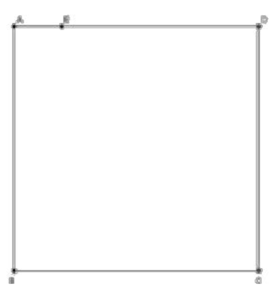
$\lim_{n\to a} f(n) = l$, $\lim_{n\to\infty} f(n) = l$, $\lim_{n\to a} f(n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$; donde *n*, a son números naturales y *l* un número real.

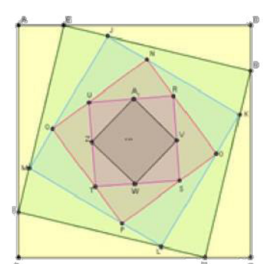
- De los límites tratados en la Actividad 1, enlistar aquellos que sean casos del tipo: $\lim_{n\to\infty} f(n) = l$.
- ¿Qué interpretación analítica o geométrica le das a la expresión $\lim_{n\to\infty} f(n) = l$.
- El profesor y los alumnos reflexionan sobre la posibilidad de existencia de problemas dentro y fuera de la matemática que involucran el concepto de límite al infinito, en particular analizan la posibilidad de construcción de modelos matemáticos del concepto. Ejemplifican algunos casos.

Actividad 3. Los alumnos analizan situaciones de tipo geométrico que involucran el concepto de límite al infinito y establecen algunas conjeturas sobre su comportamiento.

a) Se tiene un cuadrado *ABCD* de lado *a* unidades.

Sobre el lado *AD* se traza el subsegmento *AE* de longitud 1, es decir, $\overline{AE} = 1$, de manera análoga sobre los lados *DC*, *CB* y *BA* se trazan segmentos de longitud unitaria, empezando por *D*, *C* y *B*. Al unir los puntos finales de cada subsegmento trazado se construye un cuadrado. Si se continúa el proceso anterior se construye una sucesión de cuadrados, como se muestra en la siguiente figura:

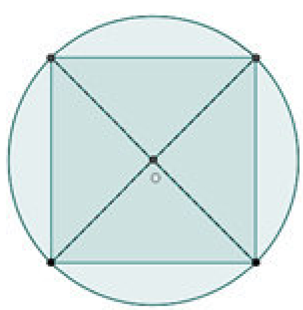


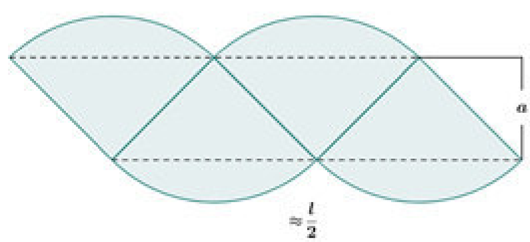


- ¿Si se sigue la construcción de la sucesión de cuadrados, el proceso es finito, es decir, se sabe o se conoce del último cuadrado a construir?
- Inducir a una fórmula analítica del comportamiento de las áreas y de los perímetros de la sucesión de cuadrados.
- Si en cada etapa del proceso se determina el área del cuadrado construido, ¿cuál es el comportamiento de la sucesión?
- ¿El número de cuadrados a construir es finito o ilimitado? Argumenten sus respuestas.
- De los tipos de límite dados, cuál de ellos se relaciona con estas situaciones. Argumente.

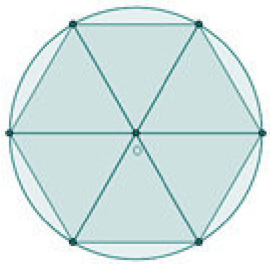
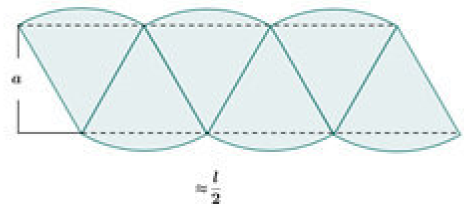
b) Sea *C* un círculo dado de radio *r*, en tal círculo se han inscrito polígonos regulares de 4, 6, 8 y 10 lados, como se describe a continuación.

- Si se inscribe un cuadrado de lado *l'* en el círculo *C* y *l* indica la medida de la circunferencia del círculo, entonces el área del cuadrado es una aproximación al área del círculo. La suma de los lados del cuadrado, es decir, *4l'* es una aproximación a la longitud *l* de la circunferencia, como se observa en la figura:

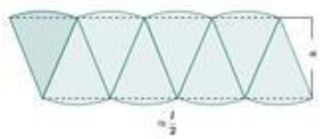
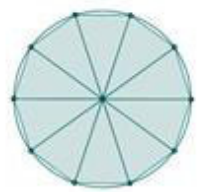
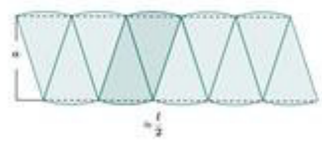




- Si se inscribe un hexágono de lado *l'* en el círculo y *l* indica la medida de la circunferencia. Entonces el área del hexágono es una aproximación al área del círculo. La suma de los lados del hexágono, es decir, *6l'* es una aproximación a la longitud *l* de la circunferencia, como se observa en la figura:

- Si se inscriben polígonos de 8 y 10 lados en el círculo y en cada proceso *l'* indica el lado de cada polígono inscrito, *8l'* es una aproximación a la longitud *l* de la circunferencia del círculo y *10l'* también lo es, como se observa en las figuras:

- Determinar la medida de las áreas de los polígonos de 4, 6, 8 y 10 lados y analizar el comportamiento. Posteriormente induzca el comportamiento geométrico de la sucesión de áreas.

- Establecer una conjetura sobre cómo determinar la medida del área del círculo a partir del análisis de las áreas de los polígonos regulares inscritos.

- Siguiendo el proceso anterior, ¿en cuántas etapas más llegaremos a cubrir el área del círculo?

- ¿Es posible determinar el número exacto de polígonos a inscribir en el círculo para determinar exactamente su medida de área? En otras palabras, ¿el proceso es finito?

- ¿Qué regularidad presentan los términos *4l'*,*6l'*,*8l'* y *10l'*?

- ¿A qué tienden la sucesión de áreas y perímetros de los polígonos inscritos?

Como actividad adicional se propone estudiar el comportamiento de la curva de Von Koch, en particular, sobre el comportamiento de su longitud y el caso de área que se presenta.

Actividad 4.

a) El profesor junto con los alumnos establecen la definición del concepto de proceso infinito y situación límite. Reflexionan sobre los tipos de límite y su relación con los procesos infinitos.

b) El profesor y los alumnos estudian la situación del área y la circunferencia de un círculo, dado en los casos anteriores. En particular se centran en la inducción del modelo matemático para determinar dichas medidas. Para el caso del área de n-ésimo polígono regular inscrito establecen la siguiente fórmula $A[P_n] = r^2 nsen(\pi/n)\cos(\pi/n)$ y para el caso del perímetro, inducen $P[P_n] = 2rnsen(\pi/n)$. Posteriormente los alumnos construyen una tabla y determinar algunos valores para las áreas y los perímetros. Luego, argumentan sobre las siguientes cuestiones:

   i. ¿Cuál es el comportamiento de las áreas y los perímetros?

   ii. Investigar los siguientes límites: $\lim_{n\to\infty} r^2 nsen(\pi/n)\cos(\pi/n)$ y $\lim_{n\to\infty} 2rnsen(\pi/n)$.

c) El profesor y los alumnos analizan la siguiente cuestión: ¿Todos los procesos infinitos tienen asociada una situación límite? ¿Qué es lo que caracteriza aquellos procesos infinitos que tienen asociada una situación límite?

   El profesor introduce el principio de exhaución y/o la propiedad arquimediana, como condiciones que cumplen los procesos infinitos asociados a una situación límite y se inicia la formalización matemática de la relación de los procesos infinitos y la situación límite.

d) Luego de establecerse que los límites de las sucesiones de las áreas y perímetros de los polígonos regulares inscritos en un círculo son casos particulares del límite al infinito, los alumnos dan otros ejemplos de casos que involucran el concepto y de casos en que no ocurre así.

Actividad 5.

a) Los alumnos conjeturan la definición de los siguientes límites: $\lim_{n\to\infty} f(n) = l, n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to\infty} f(x) = l, x \in \mathbb{R}$.

   Para ello, consideran en un primer momento sucesiones y/o funciones crecientes acotadas, decrecientes acotadas y posteriormente generalizan.

b) De la lista de límites dados a continuación, los alumnos identifican aquellos que ejemplifican casos de límite al infinito, los resuelven y justifican sus resultados utilizando las definiciones dadas.

   i. $\lim_{x\to 2} x^2 - 2x + 1$ ii. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ iii. $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

   iv. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2+2x+3}$ v. $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x}$ vi. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}$

Actividad 6.

Los alumnos analizan problemas dentro de la matemática y fuera de ella que involucran el concepto de límite al infinito, construyen los modelos matemáticos, los analizan y le dan solución a dichos problemas. Por ejemplo se les pueden proponer.

a) Resolver la siguiente integral: $\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$.

b) Se pueden proponer problemas geométricos que involucren procesos infinitos asociados a una situación límite y otros que no tengan esa propiedad.

c) En el contexto de la economía, la biología o en las ciencias de la salud, se pueden proponer problemas que involucren por ejemplo el estudio de la curva logística, en particular para estudiar la evolución y por tanto, el control de enfermedades (aquí me parecen interesantes algunas actividades que tú propones en tu diseño).

En mi caso, trabajé situaciones de tipo geométrico de determinación de volúmenes, áreas, perímetros.

Actividad 7. El profesor y los alumnos analizan los conceptos introducidos, el de límite al infinito como contenido central y se formaliza el contenido matemático.

2.4. Actividades de la planificación del investigador

Nivel educativo y tiempo

Está dirigida a estudiantes del Nivel Superior que hayan cursado Unidades de Aprendizaje donde se contemple el estudio de Límites al infinito. Para su implementación se han considerado dos sesiones de aproximadamente 100 minutos cada uno.

Objetivo

Los estudiantes establecerán, en un primer momento, una definición del límite al infinito de una función usando el lenguaje coloquial y en otro, sustentados de la simbología matemática, en particular, $\lim_{t\to\infty} P(t) = a$, donde $a \in \mathbb{R}$.

PARA APRENDER

Actividad 1. (Analizando el Comportamiento de Enfermedades Epidémicas, parte 1)

Objetivo: Tabular y graficar la función que modela el problema en estudio.

<u>Consigna.</u> Reunidos en equipos de trabajo analicen y resuelvan el siguiente problema. Justifiquen sus respuestas.

*La **función logística** es una función matemática que aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales. La función logística simple se define mediante la fórmula:*

$$P(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$$

Donde $P(t)$ es la población en millones y t es el tiempo en semanas.

Se ha detectado una nueva enfermedad epidémica en una determinada población. El contagio (propagación) de esta enfermedad se ha modelado matemáticamente, obteniéndose la fórmula siguiente:

$$P(t) = 30\left(\frac{1}{1+e^{-t}} - 0.5\right), t \geq 0$$

a) En la fórmula, ¿cuál es la Variable Independiente y la Variable Dependiente?, ¿qué función tiene cada uno?

b) ¿Por qué la fórmula plantea que $t \geq 0$?

c) Utilizando la fórmula, ¿qué valor se esperaría para la población cuando $t = 0$?, ¿por qué?

d) Completen la siguiente tabla a partir de la fórmula dada.

$\boldsymbol{t}$	**0**	**1.5**		**4**		**7**		**10**
$\boldsymbol{P(t)}$			**11.42391234**		**14.79921447**		**14.99629816**	

e) Si se mantiene el comportamiento dado inicialmente, ¿cuántas personas estarán contagiadas al transcurrir 5 semanas?, ¿y después de 9.5 semanas? Justifiquen sus respuestas.

f) A partir de la tabla, realicen un bosquejo de la gráfica que modela la situación.

Actividad 2. (Analizando el Comportamiento de Enfermedades Epidémicas, parte 2)

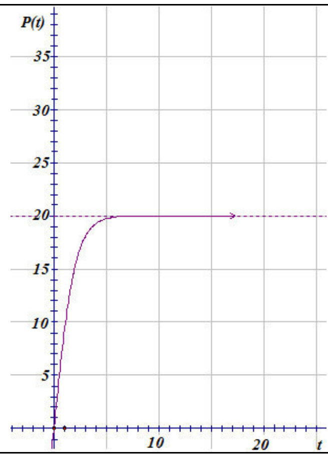
Objetivo: Asociar la gráfica de una función con su expresión algebraica y con base en dichas representaciones analizar el problema.

Consigna. Reunidos en equipos de trabajo analicen la situación y determinen lo que se pide.

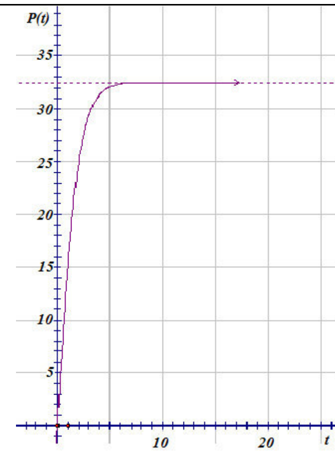
Miguel es médico y está interesado en controlar el contagio de la enfermedad detectada. Por tanto, le han presentado las funciones y las gráficas de la propagación de la enfermedad en cuatro poblaciones, las cuales debe analizar para comprender mejor la situación. Sin embargo, por un descuido se han traspapelado los documentos que contienen la información. Ayuden a Miguel a organizar la información, relacionando la función con su respectiva gráfica, para ello coloquen dentro del paréntesis de la izquierda la palabra “Gráfica 1”, “Gráfica 2”, “Gráfica 3” ó “Gráfica 4”, según corresponda. Enseguida realicen un análisis apoyándose de las preguntas planteadas.

1. ( ) ... $P(t) = 75\left(\frac{1}{1+e^{-t}} - 0.5\right), t \geq 0$
2. ( ) ... $P(t) = 65\left(\frac{1}{1+e^{-t}} - 0.5\right), t \geq 0$
3. ( ) ... $P(t) = 40\left(\frac{1}{1+e^{-t}} - 0.5\right), t \geq 0$
4. ( ) ... $P(t) = 25\left(\frac{1}{1+e^{-t}} - 0.5\right), t \geq 0$

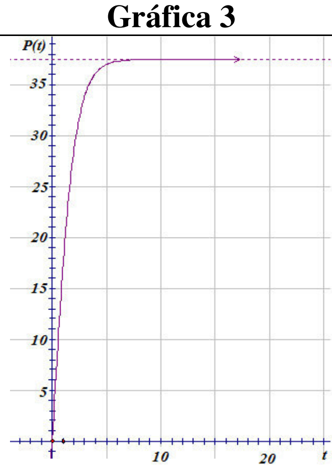
Gráfica 1



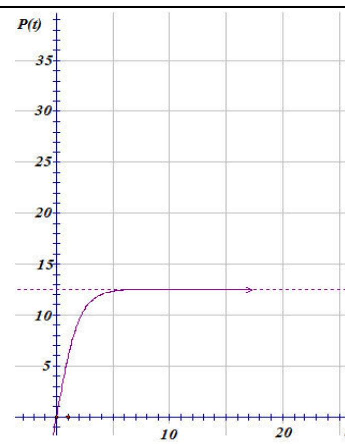
Gráfica 2



Gráfica 3



Gráfica 4



a) ¿Qué procedimientos realizaron para asociar las fórmulas con sus respectivas gráficas? Describir detalladamente.

b) En cada caso, ¿cuál es el comportamiento que presenta la gráfica?

c) En términos del problema, ¿qué significa que en cada gráfica haya una asíntota?

d) En la fórmula, ¿qué parámetro determina la asíntota horizontal?

e) Determinen la ecuación de la asíntota horizontal en cada función.

f) Con base en el análisis realizado de las fórmulas y las gráficas, ¿qué conclusión le presentarían al médico? Expliquen detalladamente en términos del problema.

Actividad 3. (Analizando el Comportamiento de Enfermedades Epidémicas, parte 3)

Objetivo: Calcular el límite al infinito de una función, que modela un determinado problema contextualizado, a partir de las representaciones algebraica, numérica y gráfica.

Consigna. Reunidos en equipos de trabajo analicen la situación y respondan las preguntas planteadas. Justifiquen sus respuestas.

1. Retomando la actividad 1, donde analizaron el contagio de la enfermedad en una población en particular y cuya función matemática que modela la situación es:

$$P(t) = 30\left(\frac{1}{1+e^{-t}} - 0.5\right), t \geq 0$$

a) Con base en la gráfica que elaboraron previamente, ¿qué comportamiento presenta la cantidad de población infectada cuando transcurre el tiempo, por ejemplo, cuando $t = 22$?

b) ¿Existe un valor máximo de dicha función? Determínenlo en caso afirmativo, si no, justifiquen por qué no existe.

c) Utilizando lenguaje común, describan la relación que guardan el número de personas contagiadas con el aumento del tiempo.

d) Utilizando la expresión matemática adecuada, ¿cómo expresarían la relación anterior?

2. A continuación, se presentan algunos datos en la tabla sobre la propagación de la enfermedad en cierta población.

$\boldsymbol{t}$ **(en semanas)**	$\boldsymbol{P(t)}$ **(en millones)**
0	0
1	4.621171573
2	7.61594156
3	9.051482536
5	9.866142982
7	9.981778976
8	9.993292997
10	9.999092043
…	…
23	9.999999998

Con base en los datos, realicen lo siguiente.

a) Elaboren una gráfica a partir de los datos de la tabla.

b) Tomando en cuenta los datos de la tabla, ¿qué comportamiento presenta la cantidad de población infectada cuando el tiempo aumenta?

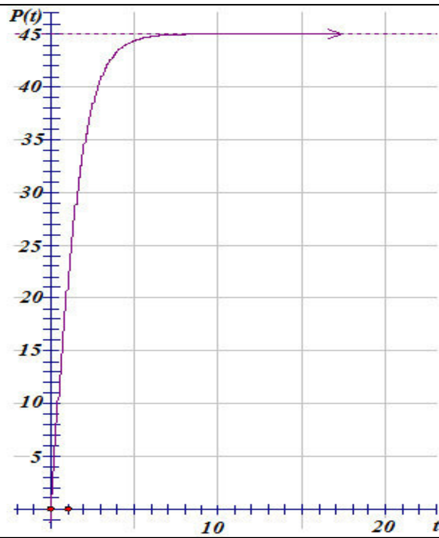
c) El comportamiento, ¿de qué manera se observa en la gráfica?

d) Expresen lo anterior, utilizando la simbología matemática adecuada.

Actividad 4. (Analizando el Comportamiento de Enfermedades Epidémicas, parte 4)

Objetivo: Utilizar una simbología matemática de límites al infinito de funciones en la resolución de problemas.

<u>Consigna.</u> De manera individual, completa la siguiente tabla donde se muestran la gráfica, el comportamiento y la expresión matemática sobre el contagio de la enfermedad en tres poblaciones distintas.

Población	**Gráfica (Población en millones y tiempo en semanas)**	**Comportamiento (Lenguaje común)**	**Expresión matemática**
1			
2			$\lim_{t \to \infty} P(t) = a$
3		*Cuando las semanas transcurridas crecen demasiado, la población infectada se acerca a 57.5 millones.*	

UNA SÍNTESIS

Actividad 5. (Síntesis)

Síntesis

Objetivo: Que el estudiante describa el concepto de límite al infinito de una función utilizando lenguaje común y simbología matemática.

De acuerdo con las actividades realizadas, en esta lección, trabajaron la resolución de problemas sobre un concepto matemático muy importante en el cálculo diferencial e integral. En particular, analizaron cómo cambia la población infectada por una cierta enfermedad conforme transcurre el tiempo.

De manera individual y con base en los problemas que estudiaste anteriormente, analiza y responde las siguientes preguntas.

1. Cuando el tiempo aumenta considerablemente, ¿qué comportamiento presenta la población contagiada?

2. De manera general y utilizando lenguaje común, describe el comportamiento anterior.

3. Ahora, utilizando la simbología adecuada, expresa matemáticamente lo anterior.

Con base en lo que aprendiste en la lección, elabora un reporte abarcando básicamente lo siguiente: el comportamiento (de manera general) observado en los distintos problemas, el concepto matemático involucrado en los problemas y los métodos que fueron útiles para la resolución de los problemas.

LOS MÉTODOS

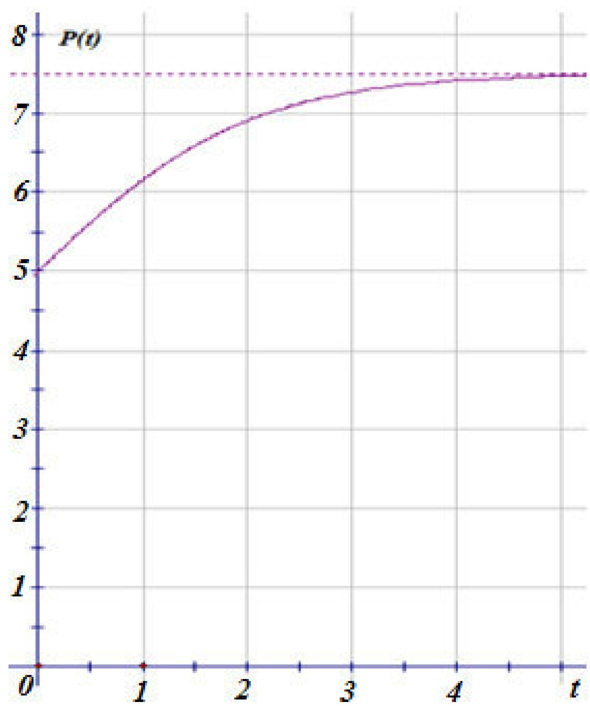
Actividad 6. (Método)

Método

Objetivo: Describir los procedimientos realizados en el cálculo de límites al infinito de una función, en determinados problemas contextualizados.

Con base en lo que aprendiste en esta lección, de manera individual, analiza y resuelve los siguientes problemas. Describe en cada caso los procedimientos de resolución, así como el comportamiento presentado en dichos problemas.

1. La gráfica siguiente representa el número de habitantes en una población conforme transcurre el tiempo, donde $P(t)$ es la población en miles de millones y t es el tiempo en años.



Con base en ello, realiza un análisis apoyándote de las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la población inicial al comenzar el registro?

b) Aproximadamente, ¿cuánto aumenta la población al transcurrir un año?

c) Conforme transcurren los años considerablemente, ¿qué comportamiento presenta el número de habitantes?

d) Representa lo anterior utilizando la simbología matemática correspondiente.

2. Se ha notado cierto comportamiento sobre el número de usuarios de redes sociales, conforme transcurren los meses. La siguiente tabla proporciona evidencia sobre este hecho.

t (en meses)	$P(t)$ (en millones)
1	18.48468629
2	30.46376624
3	36.20593015
5	39.46457193
15	39.99997553
20	39.99999984

a) Aproxima el valor para el número de usuarios cuando el tiempo es igual a 1.5 meses.

b) Con base en la tabla de valores, ¿qué comportamiento presenta el número de usuarios de redes sociales cuando aumenta el tiempo? Concluir en términos del problema.

c) Utilizando la simbología matemática correspondiente, expresar el comportamiento observado.