RECONOCIMIENTO DE PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS MATEMÁTICAS: UNA COMPETENCIA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS[i]

Recognition of practices, objects, and processes in solving mathematical tasks: a mathematics teacher's competence

Giacomone, B.[a], Godino, J. D.[a], Wilhelmi, M. R.[b] y Blanco, T. F.[c]

[a]Universidad de Granada; [b]Universidad Pública de Navarra; [c]Universidad de Compostela

Resumen

El análisis de las tareas matemáticas y de los distintos modos de abordarlas es necesario para poder comprender las dificultades potenciales y efectivas asociadas al aprendizaje. En este trabajo se presenta el diseño e implementación de una acción formativa en un curso de máster para futuros profesores de secundaria. El objetivo es desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico, esto es, identificar y discriminar los tipos de prácticas, objetos y procesos puestos en juego en la resolución de tareas matemáticas que involucran visualizaciones. El diseño se apoya en el uso de algunas herramientas teóricas y metodológicas del enfoque ontosemiótico. El análisis de los datos está orientado a la identificación de hechos didácticos significativos relativos al diseño e implementación de la acción formativa. Los resultados revelan la complejidad que implica el logro de este tipo de competencia y su importancia para el desarrollo profesional docente.

Palabras clave: *análisis ontosemiótico, prácticas matemáticas, diseño didáctico, formación de profesores, visualización*

Abstract

The analysis of mathematical tasks and its different ways of solving them are necessary to understand the potential and actual students' learning difficulties. The design and implementation of a training intervention in a master course for prospective Secondary school teachers are presented in this paper. The goal is to develop competences of onto-semiotic analysis, that is identifying and discriminating the types of practices, objects, and processes put into play in the mathematical problems solving, which involve using visualizations. The design is based on the use of some theoretical and methodological tools of the onto-semiotic approach. The data analysis is focused on identifying significant didactical facts regarding the design and implementation of the training intervention. The results reveal the complexity of achieving this type of competence and its importance for teachers' professional development.

Keywords: *onto-semiotic analysis, mathematical practices, didactical design, teachers' training, visualization*

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R. y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 269-277). Málaga: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Un problema ampliamente aceptado, dentro del campo de la educación matemática, consiste en dilucidar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que tiene, o que debería tener, el profesor de matemáticas para desarrollar su tarea docente de manera idónea (Chapman, 2014; Sowder, 2007). Sin duda, el trabajo de los profesores es una práctica compleja que requiere una combinación de tipos de conocimientos, competencias y habilidades; "no solo es importante saber qué matemáticas conocen los profesores sino también cómo las conocen y qué son capaces de movilizar para la enseñanza" (Chapman, 2014, p. 295).

Diversos autores se han centrado en el desarrollo de estrategias para promover el análisis y reflexión del profesor, sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; asimismo, brindan herramientas que permiten al profesor ser competente para describir, explicar y valorar, de manera sistemática, su propia práctica (Nolan, 2008). En estos trabajos se reconoce que el profesor debe tener conocimientos matemáticos y didácticos, pero también, debe ser competente en el uso de esos conocimientos para llevar a cabo el desempeño eficaz de la profesión.

En general, como señala Godino (2009, p. 19), es necesario establecer un sistema de categorías que permita tanto un análisis global de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como de modelos que permitan un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. De esta manera, consideramos necesario desarrollar herramientas que estén al alcance del profesor que le permitan, entre otros aspectos, referirse explícitamente a los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las tareas matemáticas.

En este trabajo se pretende mostrar el tipo de análisis que estamos experimentando con futuros profesores de matemática centrado en el desarrollo de la *competencia de análisis ontosemiótico,* esto es su conocimiento y capacidad para identificar y describir los objetos y procesos implicados en tareas matemáticas escolares. A continuación, se describe el problema de investigación y el marco teórico. En la sección 3, se presenta el diseño formativo junto con el análisis *a priori* de la primera tarea aplicada, el cual sirve de ejemplo para mostrar la trama de objetos y significados que se ponen en juego en su resolución. En la sección 4, se discuten las respuestas de los futuros profesores a dicha tarea; asimismo, se muestran algunos ejemplos prototípicos de respuestas sobre otras tareas implementadas, que permiten tomar consciencia de la dificultad que exige el logro de la mencionada competencia. Finalmente, se incluyen a modo de conclusión, algunos aspectos sobre la importancia educativa de esta investigación para la formación de profesores de matemáticas.

MARCO TEÓRICO Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El planteamiento de la acción formativa está apoyado en algunas herramientas teóricas del Enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007). En trabajos previos (Godino, 2009; Godino, Rivas, Castro y Konic, 2012; Pino-Fan y Godino, 2015) se ha iniciado el estudio de las posibilidades y retos ofrecidos por la aplicación de las herramientas teóricas del EOS al campo de la formación de profesores de matemáticas. Se asume que el profesor de matemáticas debe desarrollar la competencia específica de análisis e intervención didáctica, entendida como la capacidad de abordar los problemas propios de su profesión. Esto implica que el profesor debe conocer y saber usar las herramientas conceptuales y metodológicas pertinentes que le ayuden a describir, comprender y valorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La mencionada competencia de análisis didáctico se puede descomponer en otras sub-competencias, las cuales se pueden identificar ligadas al uso de herramientas teóricas específicas, que hacen posible el abordaje de los problemas didácticos. Así, en el marco del EOS, el uso de la herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, implica el desarrollo de la competencia de *análisis ontosemiótico*, mediante la cual el profesor está capacitado para describir, explicar y evaluar las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver problemas y estudiar los contenidos matemáticos pretendidos. La evaluación por competencias, que requieren los actuales currículos, supone un reto para los profesores, ya que para la identificación de dichas competencias es necesario hacer análisis pormenorizados de la actividad matemática de los estudiantes (Rubio, 2012). Este proceso analítico / reflexivo se puede interpretar como una actividad metacognitiva, ya que se realiza sobre los conocimientos puestos en juego en las prácticas matemáticas, o sea, se trata de un análisis sobre la cognición, una meta-cognición (D'Amore, Font y Godino, 2007).

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo a la función que desempeñan en dichas prácticas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas o tareas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, formando *configuraciones ontosemióticas* de prácticas, objetos y procesos (Figura 1).

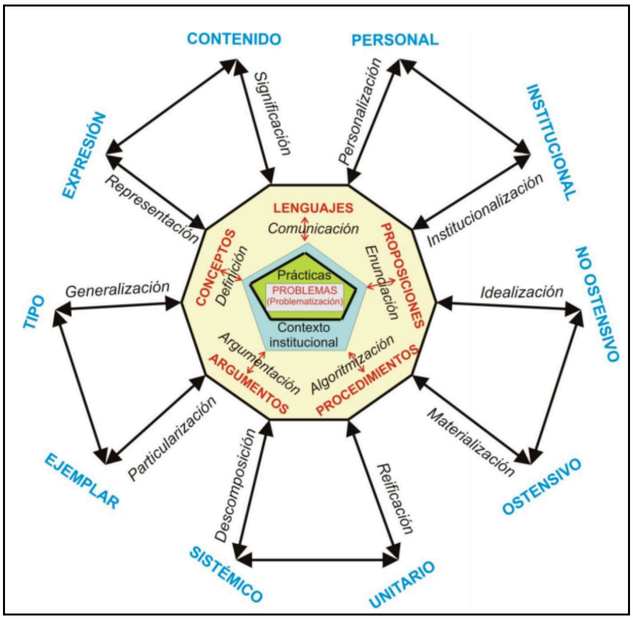


Figura 1. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas

A partir de la Tabla 1, discutiremos el papel que algunos de estos procesos (particularización-generalización; idealización-materialización; significación-representación; personalización-institucionalización) juegan en la aparición de los objetos primarios implicados tanto en el enunciado de la tarea de la Figura 2, como en la construcción de su solución. Con este ejemplo, se muestra la importancia que tienen las tareas que involucran visualización para dar cuenta de las relaciones complejas entre los tipos de lenguajes visuales/diagramáticos y analíticos/simbólicos, así como la dialéctica existente entre dichos objetos ostensivos y los objetos no ostensivos que necesariamente les acompañan.

Por ello, desde una perspectiva ontosemiótica del conocimiento y de la instrucción matemáticos, nos planteamos en la formación de profesores: ¿cómo desarrollar en los profesores la competencia de análisis de objetos y procesos intervinientes en la actividad matemática? En las secciones siguientes de este trabajo se describe el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa realizada con futuros profesores de Educación Secundaria mediante la cual tratamos de avanzar en dar respuesta a esta pregunta.

DISEÑO INSTRUCCIONAL

Método

En el marco del Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria en Matemáticas, se ha desarrollado una intervención formativa con un enfoque propio de las investigaciones basadas en el diseño (Kelly, Lesh y Baek, 2008). El primer ciclo se implementó en el curso del año 2014-2015 con 54 estudiantes, durante 3 sesiones de dos horas cada una; el segundo, se implementó en el curso 2015-2016 con 52 estudiantes con la misma cantidad de sesiones. El análisis de los datos es básicamente cualitativo y está orientado a la identificación de hechos didácticos significativos (Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi, 2014) sobre el estado inicial de los significados personales de los estudiantes, el reconocimiento de conflictos y progresos en el desarrollo de la competencia pretendida.

Si bien las clases fueron grabadas en audio, en este trabajo se sintetiza el análisis de las respuestas que los estudiantes dieron en el segundo ciclo a partir de la información recogida de las anotaciones del observador participante (primer autor). Concretamente, el análisis a priori de las tareas y presentación de resultados se focaliza en la primera tarea implementada en este ciclo ya que permite indagar sobre los significados iniciales de los futuros profesores e iniciarlos en el proceso de conocimiento y competencia de la noción de configuración ontosemiótica.

Fases y metodología de implementación

La acción formativa comprende una primera fase de exploración inicial de los significados personales de los estudiantes, sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y su capacidad para el reconocimiento de dichos objetos en las prácticas matemáticas. Los estudiantes trabajaron de manera individual, con la tarea 1 que se muestra en la Figura 2, a partir de un dibujo en perspectiva isométrica; seguidamente se presentaron y discutieron en clase las respuestas dadas por los estudiantes.

En la segunda fase de implementación, se propuso la lectura y discusión de un documento específico sobre el papel de la visualización en educación matemática (Godino, Giacomone, Blanco, Wilhelmi y Contreras, 2015), que incluía un ejemplo del tipo de análisis que se pretende realizar. Seguidamente se implementaron dos tareas trabajando en equipos de 2 o 3 estudiantes, seguidas de su presentación y discusión en el conjunto de la clase. En la tarea 2 se les pedía a los estudiantes que justifiquen las acciones realizadas para construir un cuadrado con GeoGebra; en la tarea 3 se les daba a los estudiantes un problema sobre fracciones y una solución aportada por un alumno basada en un diagrama de áreas; se les pedía a los estudiantes que justifiquen si la solución mostrada era correcta.

En la tercera fase, los estudiantes trabajaron de manera individual a partir de una cuarta tarea basada en una demostración del teorema de Pitágoras. La resolución no fue abordada en clase y se consideró como un instrumento de evaluación final.

Las tareas de la segunda y tercera fase, se plantearon sobre las siguientes consignas generales:

- Resuelve la tarea.
- Describe el procedimiento seguido, indicando las acciones que se deben realizar y las explicaciones necesarias que justifican las respuestas.
- Identifica los conocimientos que se ponen en juego en el enunciado y cada una de las prácticas elementales, completando la tabla incluida a continuación (añade las filas necesarias).

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
…	…	…

– Además de los procesos de significación indicados en la tabla anterior identifica otros procesos matemáticos que están involucrados en la resolución de la tarea.

Fase 1: Exploración inicial de significados personales

La tarea 1 que se muestra en la Figura 2, corresponde a la exploración inicial de significados personales. El análisis *a priori* que se realiza en la Tabla 1 es un ejemplo ilustrativo que sintetiza el análisis ontosemiótico que se pretende que los estudiantes logren durante el desarrollo de la tarea. Este mismo análisis fue usado para apoyar la puesta en común de las respuestas elaboradas individualmente por los estudiantes.

Tarea 1. Exploración inicial

La figura adjunta muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.

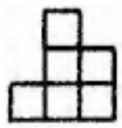
1) Dibuja la vista del edificio desde atrás. Justifica la respuesta.
2) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.
3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.
4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe el procedimiento matemático en la resolución de la tarea.
5) ¿Qué es para ti una demostración matemática? Elabora una justificación matemática para la respuesta dada en la tarea.
6) Uno de los conceptos que intervienen es el de cubo, usado para indicar cada una de las piezas que componen el 'edificio'.
   a) Elabora al menos dos definiciones diferentes para el cubo como concepto geométrico.
   b) Indica otros usos o significados que puede tener la palabra 'cubo'.
7) Indica qué papel desempeñan las proposiciones que has identificado en la justificación de la respuesta.
8) Describe otros posibles procedimientos que se podrían aplicar para resolver la tarea.
9) Describe una posible justificación de la respuesta que podría dar un estudiante usando algún tipo de material, secuencia de representaciones u otras explicaciones.
10) La figura geométrica dada se representa como una composición de piezas de forma cúbica.
   a) Identifica propiedades del cubo, como figura geométrica, que no se pueden representar de manera empírica.
   b) Enuncia la tarea utilizando lenguaje natural u ordinario.

Figura 2. Tarea de exploración inicial de significados personales

Análisis ontosemiótico *a priori* de la resolución de la tarea

La Tabla 1 resume la configuración de objetos y significados involucrada en la resolución de la tarea. Para un análisis pormenorizado, el enunciado del primer ítem junto con su resolución y justificación esperada, son descompuestos en 7 unidades de análisis.

Tabla 1. Análisis ontosemiótico de la tarea inicial (Dibujo en perspectiva)

Uso e intencionalidad de las prácticas	*Enunciado y secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea*	*Objetos referidos en las prácticas (Conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos)*
Planteamiento del problema; interpretación de una perspectiva isométrica de un objeto físico tridimensional.	1) La siguiente figura muestra un edificio dibujado desde el ángulo frente-derecha.  Dibuja la vista del edificio desde atrás.	Conceptos: perspectiva isométrica de un objeto tridimensional; punto de vista (o foco); puntos de vista opuestos; proyección ortogonal; plano de proyección; rectas proyectantes; rayo visual; cubo; composición de cubos; cuadrado; sistema de referencia tridimensional; frente, arriba, derecha; objeto visible, objeto oculto.
Inducir la elaboración de una justificación de la respuesta requerida.	2) Justifica la respuesta.	Concepto de justificación de una proposición geométrica (como convencimiento, a sí mismo y al otro, de la corrección de una respuesta).
Respuesta a la tarea solicitada.	3) La vista desde atrás debe ser la figura adjunta. 	Concepto: vista de alzado (trasero). Procedimiento: recuento de cubos por filas y columnas. Proposición 1: la vista de atrás es la figura adjunta.
Se establece una hipótesis fundamental para poder dar una respuesta racional a la tarea y se evoca una propiedad de las proyecciones ortogonales.	4) Suponiendo que las piezas dibujadas en perspectiva son cubos, las proyecciones ortogonales de las caras son cuadrados.	Concepto: cubo; proyección ortogonal; cuadrado. Proposición 2: las proyecciones ortogonales de un cubo son cuadrados.
Se evocan propiedades de las proyecciones ortogonales necesarias para justificar deductivamente la respuesta a la tarea.	5) Las proyecciones ortogonales conservan la forma, tamaño y posición relativa de los objetos proyectados.	Argumento: justificación de la proposición 2. Conceptos: forma, tamaño y posición relativa.
Se describen las posiciones relativas de las piezas que componen la construcción para justificar la forma de la proyección plana desde atrás.	6) Si me pongo detrás del edificio, a mi izquierda vería un solo cubo, en el centro tres cubos apilados y a mi derecha dos cubos apilados, porque en la perspectiva isométrica dada a la derecha-atrás hay un cubo; en medio-atrás hay 3 cubos; y finalmente, en la izquierda – frente, 2.	Conceptos: atrás, izquierda, centro y derecha. Proposición y su argumentación basada en los datos de la tarea.
Se evoca una propiedad previamente establecida para justificar la respuesta final.	7) Como las proyecciones ortogonales de las caras del cubo son cuadrados la vista del objeto debe ser la figura dada en 3)	Argumentación que justifica la proposición 1.

El análisis de los objetos y significados reflejados en la Tabla 1, se complementa con el reconocimiento de los procesos implicados en la resolución del primer ítem de la tarea. Sin embargo, no es el objetivo de este trabajo incluir un análisis más completo de la trama de funciones semióticas implicadas en el sistema de prácticas, tanto de tipo *referencial* (un objeto refiere a otro objeto) como *operacional* (uso pragmático de los objetos). Asimismo, es preciso señalar que los procesos de *particularización–generalización* y *materialización/idealización* están siempre presentes, como se ejemplifica a continuación.

- Procesos de particularización – generalización

En la tarea se da una vista particular de un objeto espacial y se pretende que se razone sobre el objeto en su totalidad. La solución pedida en la consigna 1, esto es, el dibujo de la parte de atrás, es la misma cualquiera que sea el tamaño y posición ortogonal de los diagramas, aunque es dependiente de la forma en que se compone el cuerpo espacial al que la tarea hace referencia. De esta manera, la proposición 2 y su argumentación, deben ser interpretadas de manera general, para cualquier cubo. Asimismo, dicha consigna admite múltiples y variadas generalizaciones cambiando la composición del objeto real representado; en particular, modificando la designación de las vistas como *perfil* (izquierdo/ derecho) o *alzado* (delantero /trasero). Así, se puede pedir la construcción y el reconocimiento de las diferentes vistas; de hecho, representa un problema prototípico dentro del área de dibujo técnico y geometría descriptiva.

- Procesos de materialización/idealización

La tarea muestra la representación material en la hoja de papel de un objeto real (el edificio) ideal (imaginado). Esta representación en perspectiva isométrica se refiere a la vista que un observador hipotético tendría del edificio ideal. Este tipo de perspectiva tiene la ventaja de permitir la representación a escala, y la desventaja de no reflejar la disminución aparente de tamaño que percibe el ojo humano. El dibujo del edificio es entonces una materialización de un objeto ideal: la vista de un edificio que tendría un hipotético observador. Los dibujos (en proyecciones isométricas y ortogonales) pueden ser interpretados cómo materializaciones de objetos ideales (composiciones de cubos) que facilitan la realización de las "acciones matemáticas" (reconocer las vistas) que se realizan sobre ellos.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La observación participante del proceso formativo implementado y el análisis de muestras de respuestas elaboradas por los estudiantes ha permitido extraer algunas conclusiones sobre las dificultades de comprensión de las consignas, los logros alcanzados y las posibilidades ofrecidas por el dispositivo (diseño de tareas) para identificar algunos hechos didácticos relevantes.

Durante el desarrollo de la primera fase (trabajo individual), se observó que los estudiantes no tenían claro cuál era la naturaleza de los objetos matemáticos primarios y sus significados. Dado el proceso de visualización que involucra el enunciado (perspectiva frente – derecha del edificio) y su solución (dibujo de la vista desde atrás), el reconocimiento de objetos matemáticos por parte de los estudiantes, se ha centrado en los objetos visuales perceptivos. Por ejemplo, reconocen como conceptos intervinientes y emergentes en la resolución: cubo, cuadrado, volumen, altura, giro, sistema de referencia, etc., pero ningún alumno refiere a las proyecciones ortogonales (Figura 3).

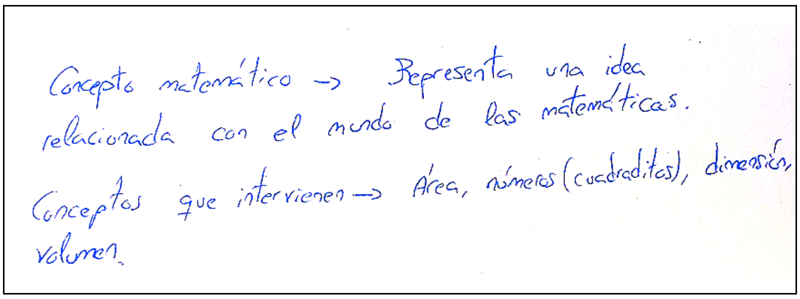


Figura 3. Respuesta de un estudiante

La noción de proposición resulta también conflictiva en esta tarea; por ejemplo, el estudiante E_1 sugiere que una proposición es un supuesto del que se parte; para el estudiante E_2, la tarea es muy sencilla de resolver y la representación visual de la solución no contiene matemáticas.

E_1 La única proposición es la asunción de que las piezas son cúbicas.

E_2 Las proposiciones se aplican para demostrar teoremas. Esta resolución no tiene demostración, es simplemente dibujar lo que uno ve (...) Es un problema de dibujo técnico, no de matemáticas.

Los conflictos identificados se reflejaron en la puesta en común para manifestar, discutir y compartir la manera de entender dichas entidades y su papel en la práctica matemática. El objetivo era que los estudiantes compartieran la visión pragmatista y antropológica sobre el conocimiento matemático que postula el EOS, según la cual un concepto se concibe como una entidad funcional (que desempeña un papel en la práctica matemática), cuyo significado es fijado por una definición-regla; y una proposición es un enunciado al que se debe asignar un valor lógico de verdadero o falso.

En la consigna seis de la tarea (Figura 2), se les pide a los estudiantes que establezcan al menos dos definiciones diferentes para el cubo como concepto geométrico, lo cual causó cierto desconcierto en muchos estudiantes:

E_3 Existe un solo cubo geométrico, por lo tanto, tiene una única definición.

Luego, se pide a los estudiantes que indiquen otros usos o significados en contextos no geométricos asociados a la palabra ‘cubo’. Esto representó un reactivo para explicitar la diversidad de significados que puede tener un concepto o una proposición dependiendo del contexto en el que participan, así como aspectos relativos al lenguaje, tales como la polisemia o la homonimia.

Otro aspecto importante a destacar es la dialéctica compleja que existe entre los objetos *ostensivos* (representaciones) y *no ostensivos* (inmateriales, mentales o ideales) que se manifiesta en los diálogos registrados; así, por ejemplo, los estudiantes E_4 y E_5, responden a la pregunta del profesor “*¿Qué propiedades del cubo no se pueden representar empíricamente?”* de la siguiente manera:

E_4 Todas las propiedades del cubo se pueden representar empíricamente, menos las caras que están por detrás. Por ejemplo (señala el dibujo): esto es un cubo y lo estoy representando empíricamente; éstas son las aristas, éstas son las caras, (...)

E_5 Habría que medir las aristas y calcular las distancias entre caras opuestas. De esta manera se puede comprobar que, si son iguales, entonces es posible representarlo empíricamente.

La dualidad, ostensivo – no ostensivo, tiene un papel esencial en el EOS, ya que la actividad de producción y comunicación matemática no se puede realizar sin el concurso sinérgico entre ambos tipos de objetos (Font, Godino y Gallardo, 2013). Esta reflexión es necesaria porque permite a los futuros profesores tomar conciencia de que tales objetos son entendidos como las reglas de uso de los lenguajes visuales o analíticos que los representan.

En la última cuestión planteada, se les pide a los estudiantes que enuncien la misma tarea utilizando solamente lenguaje natural. La mayoría de los alumnos no supo expresar esta respuesta de manera correcta. Esto permitió discutir sobre los usos y limitaciones de los distintos lenguajes, reconociendo las posibilidades epistémicas y cognitivas de los medios visuales de expresión. De esta manera, el diálogo y la interacción cobran un papel clave en toda la intervención formativa.

Durante la implementación formativa, se adopta una observación y evaluación sistemática del progreso cognitivo de los estudiantes a través del trabajo en clase, la discusión en grupos, la puesta en común y los momentos de institucionalización. En el desarrollo de la primera fase, los estudiantes tuvieron muchas dificultades para el reconocimiento de objetos y significados, manifestando que este tipo de análisis es complejo. Esto es previsible: los estudiantes del Máster tienen un amplio conocimiento matemático *per se*; pero, sin embargo, están en un proceso de formación profesional y de adquisición de conocimiento didáctico (especializado).

En los momentos de discusión colectiva e institucionalización del trabajo didáctico, se profundiza en la importancia que tiene la justificación de una respuesta en el trabajo matemático con representaciones y visualizaciones en general. Como afirma Sherry, lo que importa más que construir un diagrama preciso es el conocimiento matemático implicado, el cual no está visible por ningún sitio; no está en los propios diagramas. “Cuando los estudiantes son incapaces de reconocer el conocimiento no es por deficiencias en los diagramas construidos sino en su incapacidad para comprender el sistema de relaciones conceptuales relevantes” (Sherry, 2009, p. 68).

El análisis de las respuestas de todo el proceso implementado, permite observar que los estudiantes logran avanzar en el reconocimiento de la diversidad de conceptos y procedimientos implicados en las prácticas matemáticas. Sin embargo, persisten ciertas dificultades, principalmente con la noción de proposición, cuya identificación resultó compleja. El foco de atención se pone en este objeto matemático dado que, en la evaluación final, se detectan confusiones que también se habían manifestado en la tarea inicial:

E_6 Proposición: partimos del supuesto que las figuras sombreadas son cuadrados y triángulos rectángulos.

E_7 Proposición: definición de área de un cuadrado.

El comentario de un estudiante registrado al final de ciclo implementado, se refiere al uso (significado) que se le asigna al término ‘proposición’ en las tareas:

E_8 En todos los ejercicios, he tenido una dificultad con el término proposición, puesto que se refería a resultados concretos del ejercicio y desde el punto de vista matemático una proposición es algo que siempre se cumple y tiene una demostración.

Este estudiante está condicionado por el uso que se hace en las clases de matemáticas universitarias, y en los textos correspondientes, de los términos ‘proposición’, ‘propiedad’ y ‘teorema’. En ese contexto, la matemática es un producto terminado, un sistema de conceptos y proposiciones demostradas. Esta concepción puede impedir comprender la actividad que realiza una persona, ya sea un matemático profesional o un estudiante, cuando se enfrenta a un problema. La práctica matemática comprende, no solo los momentos finales de sistematización y generalización de los resultados, sino que incluye también los momentos de indagación, de ensayos, pruebas y refutaciones, en los cuales se trata de formular los enunciados y aportar argumentos sobre su verdad o falsedad. Este hecho permite incidir en la necesidad, utilidad e importancia de aplicar herramientas que promuevan el desarrollo de competencias específicas de un profesor de matemáticas.

El tipo de análisis que se ha implementado, esto es, el reconocimiento y la gestión de los conocimientos en la realización de las tareas, permite que el futuro profesor, analice los objetos intervinientes y emergentes en la resolución, y tome consciencia de la diversidad de significados que se les atribuye en el contexto específico.

A MODO DE CONCLUSIÓN

El análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas propuesto, permite centrar la atención en la dialéctica que existe entre los objetos ostensivos y los objetos ideales o abstractos (esto es, objetos no ostensivos) implicados necesariamente en la solución comprensiva y competente de las tareas (Tabla 1). Se muestra que el uso de diagramas en la práctica matemática debe ir acompañado de otros medios de expresión no visuales para argumentar (comunicar, justificar y explicar) el desarrollo de las prácticas operativas y discursivas, como también el progreso en la tarea. La génesis del conocimiento matemático precisa de la reinterpretación de los lenguajes y del análisis de sus relaciones. Además, es preciso observar que los medios de expresión son *artefactos* (Lasa, Wilhelmi y Belletich, 2014) que conllevan el uso implícito de un sistema de objetos no ostensivos que dotan de significado a la actividad matemática concretada en los objetos ostensivos.

La discusión de resultados y las reflexiones aportadas a partir de los hechos didácticos significativos mostrados, nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivas la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados. El factor tiempo es, quizás, la variable más importante que ha de considerarse para una gestión adecuada del proceso de enseñanza y aprendizaje, pero sin duda, dada la complejidad que requiere este tipo de competencia, no se dispone de tiempo suficiente, siendo una limitación en la implementación formativa. Por ejemplo, las respuestas de la evaluación final no pudieron ser discutidas en el aula, siendo necesario incorporar momentos de discusión sobre las dificultades detectadas y momentos para la negociación de significados.

A pesar de la cantidad y difusión de trabajos sobre la formación de profesores, el cambio significativo continúa siendo un desafío para muchos profesores (Chapman, 2014). El tipo de análisis que hemos descrito en este trabajo debería ser una competencia instrumental del profesor de matemáticas al permitirle reconocer la complejidad de objetos y significados puestos en juego en las actividades matemáticas, prever potenciales conflictos, adaptarlas a las capacidades de sus estudiantes y a los objetivos de aprendizaje. De acuerdo con Font, Planas y Godino (2010), el ciclo formativo que estamos experimentando con los futuros profesores incluye, además de las situaciones de estudio matemático de problemas seleccionados y del análisis de las relaciones duales epistémico-cognitivas, otros tres tipos de análisis: análisis de las interacciones en el aula, reconocimiento de las normas que condicionan y soportan la actividad de estudio matemático y valoración de la idoneidad didáctica global de experiencias de enseñanza y aprendizaje.

Referencias

Chapman. O. (2014). Overall Commentary: Understanding and Changing Mathematics Teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295-309). Dordrecht: Springer International Publishing.

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97-124.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(2), 89-105.

Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015). *Configuraciones de prácticas, objetos y procesos imbricadas en la visualización espacial y el razonamiento diagramático.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_DiagramasEOS.pdf

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2/3), 167-200.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 1-21.

Kelly, A. E., Lesh, R. A. y Baek, J. Y. (Eds.) (2008*). Handbook of design research in methods in education. Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching.* New York, NY: Routledge.

Lasa, A., Wilhelmi, M. R. y Belletich, O. (2014). Una parcela para Laika. *Educação Matematica Pesquisa, 16(*4), 1089-1110.

Nolan, A. (2008). Encouraging the reflection process in undergraduate teachers using guided reflection. *Australian Journal of Early Childhood, 33*(1), 31-36.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos* (Tesis doctoral). Universitat de Barcelona, España.

Sherry, D. (2009). The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundations of Science, 14*, 59-74.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-224). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.

---

[i] Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869 y EDU2013- 41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).