

COMENTARIOS A LOS FUNDAMENTOS DE LA PROBABILIDAD EN 1919/1920: CONTROVERSIAS ENTRE RICHARD VON MISES Y GEORGE PÓLYA

Díaz, Diego
diegoden09@gmail.com
Universidad del Valle-Colombia

RESUMEN

La noción de Probabilidad a partir de los trabajos de Pascal, Fermat y Huygens alrededor del problema de los puntos durante mediados del siglo XVII han tenido amplias discusiones, filosóficas, epistemológicas y ontológicas sobre su definición y que en la actualidad cobran vigencia para el conglomerado de académicos interesados en los objetos probabilísticos. A principios del siglo XX continuaban los intentos por la necesidad de la formalización y fundamentación de esta nueva ciencia denominada por algunos Matemática Aplicada. El presente documento da a conocer los principales aportes en los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad entre los años 1919 y 1920. A través de la controversia entre Richard von Mises y George Pólya recuperada por Siegmund-Schultze (2006), se establecerán las disímiles posturas desde lo filosófico, político y disciplinar alrededor de la probabilidad.

PALABRAS CLAVE

Probabilidad, R. von Mises, G. Pólya, Aleatoriedad.

INTRODUCCIÓN

Desde su inevitable aparición, el concepto de Probabilidad ha tenido una serie de análisis por parte de filósofos, filósofos de la ciencia, historiadores, estadísticos, matemáticos, psicólogos y educadores en general; lo que lleva a ser imperativo considerar un estudio de este concepto alrededor de los posibles aspectos que posibilitaron el surgimiento de la Probabilidad con sus diferentes acepciones. Expresiones como suerte y azar también son consideradas como influyentes en el cambio de un determinismo “natural”, a un pensamiento en donde las leyes de la naturaleza, juegos de azar y del mundo en general pueden ser domesticadas. El carácter dual que presenta la Probabilidad es objeto aún de investigación, como aquella tensión entre los frecuentistas y los bayesianos; en términos de Hacking (1995) se hace referencia a probabilidad aleatoria y epistémica.

Esta dualidad de significado inherente a la Probabilidad a nivel epistemológico está presente también a nivel didáctico y por tanto indefectiblemente en la transposición didáctica. Es por ello necesario para la comunidad educativa bogar mar adentro caracterizando la evolución que ha tenido esta joven noción. Desde Pascal con su profunda dualidad al tratar dos problemas de naturaleza distinta, hasta Karl Popper, se podría hacer



un corto recorrido de la transformación, en términos de los fundamentos de la Probabilidad tal como lo muestra Carranza (2009), Pascal debuta con la dualidad, la lógica de Port Royal discute su cuantificación, Leibniz establece acercamientos de la Probabilidad bajo un enfoque de la lógica, Jacques Bernoulli la configura usando el Teorema del Límite, Bayes la utiliza como la Probabilidad Inversa, Laplace establece la definición clásica como un operador, J. Keynes establece una aproximación desde la lógica, Bruno de Finetti realiza sus estudios desde una postura subjetiva, Richard von Mises establece los fundamentos bajo una aproximación frecuentista y finalmente aparece Karl Popper bajo la noción de propensión.

En este comentario acerca de la controversia sobre los fundamentos de la Probabilidad, tendrá como personajes principales el alemán R. von Mises y el húngaro George Pólya, debatiendo principalmente el nuevo paradigma frecuentista defendido por von Mises y que mostraba la punta del iceberg de lo que sería la Teoría de la Probabilidad.

MARCO DE REFERENCIA

Entre varios personajes que contribuyeron al obligado paso de un Cálculo de Probabilidades hacia una Teoría de Probabilidad, se rescata el trabajo de Richard von Mises quien establece sus fundamentos bajo la probabilidad frecuentista, ya que en la actualidad, en un sentido restrictivo, se configura como una definición potente para el desarrollo del pensamiento estocástico con la idea circundante de aleatoriedad. Sin embargo, fue objeto de fuertes críticas desde filósofos en contra del positivismo arraigado en von Mises, así como de los denominados matemáticos puros como Kolmogorov, Hausdorff y Pólya, por la falta de rigor matemático en los fundamentos. Bajo estas críticas se establece una correspondencia epistolar entre Pólya y von Mises que consta de 5 cartas entre el 16 de Noviembre de 1919 y marzo de 1920, acerca de los fundamentos de la probabilidad que será objeto de comentarios en esta presentación dando ideas de los nuevos paradigmas para la consolidación de la teoría de la probabilidad. Se pretende a través de los comentarios al artículo de Siegmund-Schultze, aportar elementos que identifiquen de un lado, la problemática asociada a los dos axiomas planteados por von Mises y de otro lado, las objeciones de Pólya y su tendencia de rigor, para dotar de fundamentos a la naciente Teoría de la Probabilidad.

Por su parte, los trabajos de A. Hald (1998) en su texto *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*, I; Hacking (1971) en *Equipossibility Theories of Probability* y P. Carranza (2009) en su tesis doctoral *La dualite de la probabilite dans L'enseignement de la statistique, Une experience en classe de BTS* dotarán de mayor sentido la controversia establecida.

DESARROLLO

Tal como lo indica Siegmund-Schultze (2006) esta controversia sucede bajo la mirada expectante de los nuevos desafíos científicos que se esperaban luego de terminada la Primera Guerra Mundial. Alemania, ciudad natal de von Mises, y Hungría cuna de Pólya, habían quedado en condiciones bastantes desfavorables a todo nivel. Sin embargo, la empresa académica muestra una vez más, que es solución a grandes problemas globales, ya



que luego de este desenlace los adelantos particularmente en la física mecánica y particularmente los nuevos paradigmas de la probabilidad no se hicieron esperar.

La correspondencia mencionada, tiene como pretexto dos artículos publicados por von Mises (1918, 1919): *Physikalische Zeitschrift* y *Mathematische Zeitschrift*. No solo gira en torno a las dificultades sobre los fundamentos de la probabilidad que serán expuestos a continuación, sino a la demostración del Teorema Central del Límite (para lo cual von Mises argumenta a favor de las funciones características) y a su vez, la discusión alrededor de la Teoría de Errores Cíclicos (determinando experimentalmente pesos atómicos). El presente comentario a la controversia se centra en los fundamentos que expone von Mises para la consolidación de la Teoría de la Probabilidad y las reacciones (más que propuestas de fundamentos) de Pólya al respecto. Las expectativas de estos frente a la Teoría de la Probabilidad y sus aplicaciones serían el caldo de cultivo primigenio para la discusión, que luego sería recogida y modificada por los trabajos de P. Levy y A.N Kolmogorov y F. Hausdorff.

Viena sirvió de punto de lanza para sentar las bases probabilísticas en esta época; gozaba de gran prestigio académico con el conocido círculo de Viena, el cual estaba en concordancia con la postura filosófica del positivismo de von Mises. Lo importante en esta postura de manera general, serían las ciencias útiles, prácticas, con vista a la predicción; si es empíricamente verificable, tendría sentido y validez. Von Mises profesor en la Universidad Técnica de Dresden 1919/1920 y Pólya estudiante de Universidad *Eötvös Loránd* tuvieron el legado académico húngaro. Inmerso en esta postura, von Mises en *Mathematische Zeitschrift* describe el estado del arte de la Teoría de la Probabilidad en 1919, afirmando la necesidad de hacer las cosas diferentes al paradigma Laplaciano que se había perpetuado y en oposición parcial a la axiomática y a la emergente teoría de la medida. No rechazaba del todo la formalidad vía axiomatización, sino que sentía la necesidad de nuevos aires para la ciencia en donde el cálculo de probabilidades se podía aplicar a diversos contextos y campos de la sociedad, como la física, ciencias actuariales y económicas.

Se entiende que von Mises necesitaba una naturaleza de los objetos probabilísticos más cercana a su realidad y por ello, el carácter ontológico era necesario resolver. Quienes han logrado grandes avances en la Teoría de la Probabilidad han sido los matemáticos, pero son las aplicaciones las que enriquecen el contenido teórico de las investigaciones “puras”. En el sentido de Fréchet (1936):

No es de sorprender entonces de que muchos matemáticos hayan trabajado en la teoría matemática de las probabilidades, sin preocuparse de discutir las definiciones que le sirven de base o, al menos, sin juzgar útil publicar sus reflexiones al respecto. Tal vez ocurre esto también porque, al abordar estas cuestiones, saben bien que no podrán aportar las respuestas definitivas a que están habituados en los problemas matemáticos (Fréchet, 1936, p. 173).

Von Mises (1919) en su artículo titulado *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, hace antesala de la propuesta de sus axiomas resaltando la importancia del cálculo en la teoría de la probabilidad, pero que ningún autor ha ido más allá de la definición Laplaciana



que señala la razón entre el número de casos favorables al evento y el número de todos los casos igualmente posibles. Era necesario hacer aparecer su noción frecuentista frente a la tradición conjuntista, psicológica, filosófica y estadística que se estaba trabajando con los aportes de J. Ven, G. Fechner, G. Helm y H. Bruns respectivamente. Su fundamento se centra en la idea de lo que él llama *Kollektiv* o secuencia aleatoria, como un conjunto de elementos heterogéneos que varían aleatoriamente con respecto a una característica cuantificable común. Tales colectivos describen una serie de experimentos (x_1, x_2, \dots) con valores x_i en algún espacio Ω . Según Landro (2010), von Mises distingue dos clases de colectivos en el siguiente sentido:

(...) considera la necesidad de distinguir entre “colectivos empíricos” (que pueden ser hallados en el mundo real que, por lo tanto, son observables y que, en consecuencia, están formados por un número finito de elementos) y “colectivos matemáticos” (formados por una sucesión infinita de elementos). De la comparación de estas dos definiciones surge, en forma inmediata, que un colectivo matemático consiste en una sucesión ordenada, en tanto que un colectivo empírico no observa ningún orden natural (Landro, 2010, p.3).

Cada subconjunto A de Ω aparece con alguna frecuencia relativa asintótica f_A , no solo a lo largo de la secuencia en sí, sino también a lo largo de cada subsecuencia, la cual se puede formar bajo alguna aplicación. Estos colectivos entonces, afirma von Mises, inducen una distribución de Probabilidad f en el espacio Ω . En este sentido, se aprecia en von Mises que la idea de *Kollektiv* precede a la noción robusta de probabilidad bajo los siguientes dos axiomas (en principio los llamó postulados):

AXIOMA I

Se establece la existencia del límite de la secuencia de las frecuencias relativas de aparición de cualquier subsecuencia del espacio de valores (equivale a la probabilidad del conjunto de resultados del experimento).

AXIOMA II

La irregularidad o aleatorización de los colectivos asegura que el límite, (la probabilidad en Axioma I), no cambiará como resultado de tales selecciones de subsecuencias, las cuales pueden ser definidas mediante alguna aplicación matemática en particular.

La exposición de von Mises continúa definiendo noción de colectivo (para él desde el punto de vista netamente matemático) e introduce las cuatro operaciones fundamentales sobre estos, las cuales producirán nuevos colectivos a partir de uno dado. Según Martínez (2000) estas cuatro operaciones se pueden caracterizar en:

- Selección: Sobre el objeto probabilístico, se define una operación que cambia el ordenamiento de los elementos en la secuencia del colectivo C , sin alterar el límite de la frecuencia relativa al experimento.
- Mezclado: Implica la suma de probabilidades.
- Partición: Se corresponde con la división de probabilidades.
- Combinación: Se asume como la multiplicación de probabilidades.

Las críticas desde diferentes frentes no se hicieron esperar. Se centraron en la idea vaga de colectivo y la falta de rigor en el axioma II. La inmensa mayoría de matemáticos que leyeron a von Mises coincidían en que había algo errado en sus planteamientos, se apartaba de la axiomática convencional, de la Teoría de la Medida, del álgebra de Borel. Contrario a ello, firmemente von Mises defendió sus fundamentos hasta el final, su manera de relacionar la ciencia con el mundo que lo rodeaba, le hizo partícipe de usar sus recursos intelectuales para aplicarlos a campos muy interesantes como la Teoría de Fluidos por citar uno de ellos. Solo entendiendo el paradigma científico de von Mises, se podía entender la necesidad de llevar sus fundamentos, en cierto sentido, a algo común como las secuencias aleatorias. Interesante manera de abordar este juicio que hoy 96 años después, son retomados útilmente para la enseñanza de la Probabilidad a nivel mundial.

PÓLYA Y LOS FUNDAMENTOS DE VON MISES

Es clara la intención de discutir acerca de los fundamentos de von Mises cuando Pólya se refiere a ellos como “el principal punto de nuestra controversia”, en su correspondencia de febrero 24 de 1920. De esta correspondencia queda como resultado un von Mises receptivo a algunas críticas y reevaluará (entenderá) el porqué de ellas en la formulación de sus axiomas. Pólya no buscaba que esta teoría se acercará más a los fundamentos desde la teoría de medida por ejemplo, sólo que el axioma II no hacía parte del constructo matemático puro, debía darle vida matemática al proceso de aleatorización. En este sentido, Pólya sugiere a von Mises, revisar los trabajos de John Venn, en el texto *Logic of Chance* para persuadirlo de que su trabajo debería gozar de mayor precisión. Las críticas desde el logicismo incluso dejaron abierta la posibilidad años más tarde de quitar los axiomas de von Mises de su fundamentación, sin embargo Pólya no pretendiendo hacer parte de uno u otro estadio, simplemente argumentaba sobre definir de manera justa el axioma II:

I do not say that your axioms lead to contradictions in certain problems: you treat all concrete problems from the basis of your distributions and fundamental operations, the consistency of which is secured by other guarantees (Pólya a von Mises, febrero 24, 1920).

Más allá de algunas contradicciones relacionadas con la noción de colectivo, lo que Pólya insistía era en que los fundamentos de von Mises aún no lo convencían de ser matemáticamente aceptados y que no era una cuestión de gusto intrínseco el querer disipar todas las dudas que se originaron:

Whether a notion is mathematically acceptable or not acceptable is obviously much less a matter of taste [Auffassungssache]. I have to report that Weyl's thoughts about your “Grundlagen” are identical with mine (Pólya a Mises, Diciembre 4, 1919).

Y continua en tono más enfático relacionado con la noción no-matemática para Pólya de la aleatoriedad:

I will tell you straightforwardly the point on which I cannot agree with your foundations of probability. I deem your notion of randomness [Regellosigkeit] in postulate II badly delimited, mathematically unusable (Pólya a Mises, Diciembre 4, 1919).

Pólya describe que esta noción de aleatoriedad debe ser reforzada, pues en los colectivos se puede encontrar una función f que altera la probabilidad inicial (límite de la frecuencia relativa de cada experimento) y que de esta forma estarían en tela de juicio la construcción de dichos colectivos. Para clarificar un poco lo anterior, se puede reducir el problema a una secuencia de caras y sellos al lanzar una moneda muchas veces, asignando los valores de 0 (cara) y 1 (sello) se podría obtener los siguientes resultados en la secuencia aleatoria: 00110100010110...la cual tiende a un valor p (existe). Ahora bien, la asignación de una aplicación podría ser de la forma f_{2n+1} que implica escoger los valores que se encuentran en posición impar, quedando “equivalente” a la subsecuencia: 0100001...la cual tiene el mismo valor p (Propiedad de Selección). La idea general de Pólya, en concordancia también con la crítica que hace Löf (1969) años después, en un sentido reduccionista, es que se podría encontrar una aplicación sobre todos los valores de la secuencia aleatoria que escogiese al valor 1, de esta forma se cambiaría la probabilidad inicial y por tanto la idea de colectivo estaría eliminada.

La perspectiva inicial de von Mises era dotar sus colectivos de algo extra, tal vez un poco de intuición (una existencia lógica), en vez de lo puramente matemático; la aleatoriedad era un aspecto palpable para von Mises, había estado presente en algunos trabajos de física mecánica que estaba elaborando. Esto lo confirma en *Mathematische Zeitschrift* (1919):

The existence of a collective cannot be proved by means of the actual analytical construction of a collective in a way similar, for example, to the proof of existence of continuous but nowhere differentiable functions, a proof which consists in actually writing down such a function (*Zeitschrift*, 1919, p.60).

En los intentos por delimitar los colectivos y la noción de aleatoriedad, Pólya establece en la correspondencia del 4 de diciembre de 1919, que estaba totalmente en desacuerdo con von Mises en su fundamentación; era necesario establecer una separación entre los dominios matemáticos y no matemáticos y darles vida con características epistemológicas propias. La desaprobación de la noción de aleatoriedad radica en Pólya, al reconocerla como imprecisa en cierto grado, una imprecisión que para Pólya era delimitadamente volátil, la cual podía llevar incluso a contradicciones como la famosa “paradoja del montón” mencionada por Borel (1920) en su libro *Le Hasard*.

Von Mises protesta y afirma que para poner fin a esa separación entre tendencia matemática y extra-matemática, ha realizado precisamente su exposición de los fundamentos y que no necesariamente las aplicaciones que estaba encontrando obedecen a imprecisiones insolubles, de hecho termina cuestionando, en su carta del 12 de diciembre de 1919, la posibilidad de considerar una noción de probabilidad acabada:

My decided tendency – which cannot be separated into a mathematical and an extra-mathematical – is precisely to put an end to the current situation, where a presentation of the theory of probability begins with the words (Poincaré) that one does not know really what probability is (Von Mises, 1919).



Respecto al axioma I, Pólya hace referencia a la aseveración realizada por von Mises en el sentido que sus fundamentos (Colectivos y axiomas) iban más allá de lo establecido por Laplace en cuanto a la definición clásica de la probabilidad bajo equiprobabilidad y simetría geométrica. Pólya replica diciendo que los fundamentos laplacianos eran totalmente válidos y que de hecho, tenía intenciones de realizar un libro sobre teoría de la probabilidad basada en la teoría clásica de Laplace. Una vez más se muestra entonces a un Pólya, sin intenciones de hacer radicales transformaciones a la teoría de la probabilidad, simplemente preparar el terreno de forma adecuada para esos resolutores de problemas que serían el público adepto a Pólya en un futuro próximo.

Von Mises con sorpresa ante la decisión de Pólya sobre la base probabilística, responde al cabo de una semana en su carta de diciembre 12 de 1919: “I am convinced that this standpoint is no longer justified and I would deeply regret it if you were to write another book from this point of view” (Von Mises, 1919).

Convencido de sus críticas, además respaldadas por otros matemáticos como Hausdorff, Pólya propone una sustentación pública a von Mises sobre sus fundamentos en Berlín o con los matemáticos de Göttingen. Se rastrea al menos según Rammer (como se citó en Siegmund-Schultze, 2006) que una de estas reuniones se dio en diciembre de 1931, de la cual sale von Mises mal librado. Sin embargo en su famoso texto *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, “Probabilidad, estadística y verdad” (aun disponible en las principales librerías), responde en detalle a estas críticas, convencido por el resto de su vida que la axiomática introducida en sus fundamentos para darle sostenibilidad a la Teoría de la Probabilidad era la adecuada y que solo el esclarecimiento de esto, iba a darlo el paso del tiempo con los avances de las ciencias aplicadas.

CONCLUSIONES

De la controversia acerca de los fundamentos que hace von Mises a la Teoría de la Probabilidad surgen tres conclusiones generales que podrían a su vez, generar en algunos lectores, corolarios (controversias) al respecto:

En primera instancia, es de rescatar el valor de von Mises al establecer y defender la probabilidad vía frecuentista. Nadie desconoce en la actualidad que la definición clásica (laplaciana) funciona también restringidamente, tal vez más alejada de la realidad para la toma de decisiones. Cuando un objeto probabilístico y en general de cualquier ciencia emerge, surgen críticas y dificultades similares mientras es moldeado por el conglomerado de personas interesadas en ello, es lo potente en toda ciencia. Los productos intelectuales no son plenamente acabados como lo afirmaba von Mises. Es por ello necesario, adjuntar las dos corrientes generales de la dualidad de la Probabilidad en el discurso educativo a todos los niveles.

En segundo lugar, se puede notar a un Pólya alejado de radicalismos tendientes a fundamentar la nascente Teoría de la Probabilidad vía Teoría de la Medida o axiomática. A Pólya se le conoce como un excelente matemático, filósofo de las matemáticas pero sobre



todo una persona con fuerte tendencia hacia lo educativo. Es sabido que el método axiomático consiste en utilizar deducciones lógicas, con una axiomática a priori, sin hacer uso de la intuición, observación o experimentación y en general de la realidad, aspectos nada recomendables para la enseñanza, salvo en cursos avanzados. En este sentido, se podría inferir que la crítica hacia von Mises en su axioma II, estuviera basada en una definición robusta, tal como sucedía en la Teoría de la Medida o axiomática. Por ello, es importante continuar con revisiones acerca de la epistemología de la probabilidad y responder la pregunta si realmente está acabada. ¿Cómo explicar la importancia y potencia de esta teoría (hoy aplicada en casi todos los campos de la ciencia) cuando se ve en este comentario a la controversia, edificarse sobre una base bastante discutida y para muchos, débil?

Como tercer aspecto, si bien es cierta la importancia de la axiomatización en la Teoría de la Probabilidad y el uso de fundamentos asociados a la Teoría de la Medida, es completamente necesario también introducir una tercera variable denominada aleatoriedad. A veces resulta más fácil discutir sobre las bases de un planteamiento que proponer fundamentos y en este sentido se podría preguntar si las bases de algún objeto de conocimiento son indefectiblemente indiscutibles. Von Mises defendió a cabalidad su postura viéndose utilizada (en cierto sentido) en la gran mayoría de currículos de los países actualmente, en donde se privilegia un primer acercamiento desde lo intuitivo, desde lo aleatorio. La necesidad de una matematización de lo aleatorio se “logró” según Landro (2010) después de varios años con los trabajos de T.C Fry, y F.P Cantelli, además de los aportes de A. Wald, A. Church, A. Turing, A.N. Kolmogorov, G. Chaitin y P. Martin-Löf, mostrando a su vez la indemostrabilidad de la aleatoriedad y por tanto, un punto de tranquilidad al constructo teórico sobre el que von Mises fundamentó la probabilidad dándole la razón a través del tiempo.

REFERENCIAS

- Borel, É. (1920). *Le Hasard*; Paris: Félix Alcan.
- Carranza P. (2009). *La dualite de la probabilité dans L'enseignement de la statistique, Une expérience en classe de BTS*. (Tesis doctoral). Universidad Paris 7 Denis Diderot.
- Fréchet M. (1958). *Las matemáticas y lo concreto*. Dirección general de publicaciones. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Hacking, I. (1971). Equipossibility Theories of Probability. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 22(4), pp. 339-355.
- Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la probabilidad: un estudio filosófico de las ideas tempranas acerca de la probabilidad, la inducción y la inferencia*. Gedisa.
- Hald, A. (1998). *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930*. New York ed. Wiley.
- Landro A. (2010). Acerca del *Regellosigkeitsaxiom* de von Mises. Cuadernos del CIMBAGE N° 12 pag 1-21. Universidad de Buenos Aires.
- Löf, P. (1969). The Literature on von Mises' Kollektivs Revisited. *Theoria*, 35, 12–37.
- Martínez, M. (2000). Probabilidad un enfoque epistemológico. *Revista mexicana de física.*, 490-495.

- Siegmund-Schultze, R. (2006). *Probability in 1919/1920: The von Mises Pólya-Controversy*, 431-515.
- Von Mises, R. (1918): Über die ‘Ganzzahligkeit’ der Atomgewichte und verwandte Fragen; *Physikalische Zeitschrift* 19, 490–500.
- Von Mises, R. (1919): Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung; *Mathematische Zeitschrift*. 5, 52–99. *Reprint of an excerpt in Schneider* (ed. 1989), pp. 378–388.