



ALGUNAS REFLEXIONES EPISTEMOLÓGICAS Y DIDÁCTICAS EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE MEDIA

León, José Miguel
josemigleon@gmail.com
Universidad del Valle (Colombia)

Uribe, Jimmy Alexander
jimmy.uribe@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle (Colombia)

RESUMEN

A través de un análisis epistemológico, se busca caracterizar los elementos constitutivos del concepto de media, luego se abordan consideraciones didácticas relacionadas con los campos de problemas asociados al concepto teniendo en cuenta algunas de las dificultades en el proceso de interpretación del mismo. Se finaliza con la una revisión breve de algunos elementos relevantes para el análisis y la interpretación de gráficos estadísticos, que se utilizan como herramienta para el aprendizaje y construcción del concepto de media.

PALABRAS CLAVE

Media, Gráficos, Aprendizaje significado.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad la Estadística hace parte del currículo de matemáticas y fue contemplada desde la formulación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional [MEN]. Dichos Lineamientos afirman que la Estadística es importante para la formación de estudiantes en cuanto a la comprensión e interpretación de fenómenos de la vida cotidiana y en la toma de decisiones no deterministas (MEN, 1998). Esta inclusión se debe a que en los últimos años se han comenzado a efectuar esfuerzos desde el *International Statistical Institute* [ISI] y la *International Association for Statistical Education* [IASE], dirigidos a la introducción de la Estadística al currículo educativo (Batanero, 2000).

Con base en el contexto global y nacional, resulta importante que para desarrollar el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, los estudiantes deban comenzar por comprender, analizar y comparar las distribuciones de datos, las cuales están conformadas por dos elementos fundamentales que son: las medidas de tendencia central [MTC] y las medidas de dispersión de los datos. En los párrafos siguientes la atención se centrará en el primero de estos elementos, ya que las MTC se consideran importantes en el desarrollo del



pensamiento estocástico en la Educación Primaria, debido a que son los primeros objetos estadísticos que hace referencia a las distribuciones de datos. Por tanto, es importante analizar en dos momentos clave el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de media: significado del concepto, y cuestiones didácticas que conllevan enseñarlo o aprenderlo.

MARCO DE REFERENCIA

Resulta de suma importancia preguntarse qué es lo que ocurre durante los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de media, para lo cual es necesario reconocer el significado del concepto. Al respecto Godino y Batanero (1994) hacen un análisis del significado institucional y personal de los conceptos, donde se tienen en cuenta aspectos epistemológicos del mismo. Por otro lado, para ampliar el significado se hace referencia a la Teoría de Funciones Semióticas de Godino (1999, 2003), Batanero, Godino y Navas (1997), y Godino y Batanero (1998) en donde se trabajan conceptos como los campos de problemas, los cuales permiten definir los elementos de significado extensivos, actuativos, ostensivos, intensivos y validativos de dicho concepto.

Adjunto a lo anterior, resulta fundamental tomar en consideración que más allá de revisar exclusivamente el significado del concepto de media, vale la pena mirar desde una perspectiva didáctica las dificultades en el aprendizaje de dicho concepto. Batanero (2000) aborda elementos para identificar estas dificultades y errores, y también hace un esbozo acerca de distintas interpretaciones de las medidas de tendencia central y su directa relación con sus respectivos campos de problemas.

DESARROLLO

SIGNIFICADO Y ELEMENTOS QUE CONSTITUYEN EL CONCEPTO DE MEDIA

Para efectuar un estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de media, resulta importante determinar el significado con el cual los estudiantes y las instituciones definen el concepto, así como su construcción como consecuencia de procesos efectuados en el aula de clase. Por tanto, es necesario tener en cuenta que el significado de referencia del concepto de media para estudiantes, profesores e instituciones puede ser diferente, lo cual puede provocar problemas de aprendizaje. Con base en esto, se propone hacer un análisis epistemológico de su significado, fundamentado principalmente en la Teoría de Significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino & Batanero, 1994), con el fin de precisar de mejor manera dicho objeto.

La media es un valor típico o representativo de una muestra de datos, se le denomina comúnmente por promedio y resulta de efectuar una serie determinada de operaciones con un conjunto de números, además, en determinadas condiciones, puede representar por sí solo a todo el conjunto de datos (DLE, 2001). Este es un concepto matemático que epistemológicamente tiene una naturaleza abstracta y difícil de comprender, puesto que, en el *quehacer* matemático, los símbolos (significantes) están en lugar de las entidades conceptuales (significados) (Díaz, 2007).

Cada término o expresión estadística tiene dos diferentes tipos de significados, uno institucional y otro personal, el significado de la media no es necesariamente igual para instituciones que para las personas, puesto que el primero se atribuye más a un significado socialmente compartido y discutido por los miembros de una institución educativa o una institución didáctica y el segundo es el adquirido por los estudiantes a lo largo del proceso de aprendizaje del concepto estadístico (Godino & Batanero, 1994). Por tal razón, es necesario tener en cuenta que para solucionar problemas asociados a la significación del concepto de media, los profesores deben formular situaciones-problema que propicien un aprendizaje significativo de la misma. Para lo que se considera que un elemento importante en la significación son las actividades que propone el docente en el aula de clases, puesto que en diversos estudios, actividades como la modelización estadística de datos le permiten al estudiante familiarizarse con las propiedades y características del concepto de la media, y a su vez impulsar reflexiones y formulación de conjeturas para la solución de dichas situaciones.

Cuando se presentan diversas situaciones-problema cuyos procesos de solución son similares o relacionados, se refiere a un campo de problemas. Por ejemplo, el concepto de media soluciona problemas de estimación de una cantidad desconocida y esta clase de problemas abarca todas las situaciones en donde es necesario medir una cierta cantidad desconocida de una magnitud; otra clase de problemas es la predicción de una nueva variable de la distribución, tomando el concepto de media como valor esperado. También se tienen en cuenta campos de problemas asociados a la esperanza matemática, como centro de gravedad o masa. Siguiendo a Godino (1996),

el problema de la comprensión está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes? (Godino, 1996, p. 418).

Según lo anterior, existen elementos que se ponen en juego en la construcción del significado de media; en el momento de la actividad estadística el objetivo principal es resolver las situaciones problema, sin embargo, para que la solución de dichos problemas sea significativa, es necesario que el estudiante comprenda que hay elementos importantes entendidos como sistemas de prácticas, los cuales debe superar para que haya una comprensión del concepto. Dichos elementos son según Batanero (2000): extensivos, actuativos, ostensivos e intensivos.

- Elementos extensivos: campo de problemas en donde surge el concepto de media, los diferentes usos y situaciones en los cuales emerge dicho concepto. Esto puede ser apreciado en cuatro tipos de problemas que se abordarán en el apartado de cuestiones didácticas de la media.



- Elementos actuativos: centrados en las prácticas empleadas para la solución de problemas, es decir, el método operativo por el cual se soluciona el problema. El elemento acumulativo en el objeto de media se ve desde distintos puntos de vista, es decir, existen distintos sub-objetos que se derivan del concepto de media, entonces existen para cada uno un algoritmo. Un ejemplo de los elementos actuativos es el algoritmo con el cual se calcula la media aritmética, en el que se suman todos los datos y se divide por el número de sumandos; algoritmo usado para la solución de distintos tipos de problema, como por ejemplo la estimación de una cantidad X desconocida o la media como elemento representativo de una función.
- Elementos ostensivos: representaciones materiales o notaciones utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos). Como por ejemplo X ó $E(x)$. Estos elementos ostensivos tienen dos características, la primera es que sirven para referenciar dichos objetos abstractos, y la segunda es que se pueden operar con ellos, es decir, como mecanismos de simplificación y producir resultados aplicables a dichos objetos (Díaz, 2007).
- Elementos intensivos: definiciones, propiedades, características y relaciones con otros conceptos. La media está comprendida entre los extremos de la distribución, un ejemplo claro de inadecuada comprensión de los elementos intensivos son los campos de problemas donde es necesario emplear el algoritmo de media ponderada y donde el alumno emplea la media aritmética, algo que por definición está errado, puesto que la media no tiene la propiedad asociativa.
- Elementos validativos: argumentos con los cuales los alumnos justifican sus respuestas, estos son los que se usan para validar las proposiciones o conjeturas de la situación-problema, un claro ejemplo de la evidencia de los elementos validativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje es cuando el estudiante da respuestas o argumentos a cuestionamientos tales de por qué en muchos casos la media o valor esperado no es necesariamente un elemento representativo del conjunto de datos.

ALGUNAS CUESTIONES DIDÁCTICAS DEL CONCEPTO DE MEDIA

Al planificar la enseñanza del tema o al tratar de evaluar el aprendizaje de los alumnos, debe tenerse en cuenta los cinco tipos de elementos antes descritos que constituyen el significado sistémico de los objetos matemáticos (Batanero, 2000), es posible tomarlos en cuenta para el análisis de las dificultades de comprensión de los estudiantes.

Así, con relación a los elementos intensivos, se identifican problemas asociados a la definición o a la significación del concepto de media dada por los estudiantes, como, por ejemplo, la confusión de este concepto con los conceptos de mediana o moda. Por otra parte, en cuanto a las propiedades, se ha identificado que algunos estudiantes suelen adjudicar nuevas propiedades al concepto de media como por ejemplo la propiedad asociativa en la media aritmética.

Pensando en los elementos extensivos, pueden relacionarse algunos de los campos de problemas asociados al concepto:



1. Media como estimación: uso de la media para la estimar una cantidad desconocida y las situaciones relacionadas con medir una cantidad X desconocida de una cierta magnitud.
2. Media como valor representativo: uso de la media en situaciones cuando se necesita obtener una cantidad equitativa a repartir para conseguir una distribución uniforme, en este sentido la media presenta un grupo de valores individuales de una manera simple y concisa que permite crear una idea rápida sobre el tamaño general de una distribución sin que distraigan variaciones individuales.
3. Media como reparto equitativo: uso de la media como elemento representativo de una distribución simétrica, es decir, utiliza su propiedad de localización central para representar simétricamente un conjunto de datos.
4. Media como estimador de un parámetro específico desconocido: uso de la media en situaciones en donde se necesita conocer el valor que se obtendrá con mayor probabilidad al tomar un elemento al azar en la población. Se utiliza este concepto como un elemento para predecir, o como valor esperado.

Pasando ahora a los elementos actuativos, la serie de dificultades identificadas están relacionadas a la confusión de los procedimientos y a los usos erróneos de algoritmos en la solución de problemas.

Las dificultades asociadas a los elementos ostensivos están relacionadas de manera directa con la comprensión y análisis de las distintas representaciones posibles del concepto de media, en particular los manejos gráficos que se le dan a dicho concepto.

Con respecto a los elementos validativos, pueden identificarse dificultades relacionadas principalmente a la cuestión de la representatividad de la media, es decir, aquellos casos en los que la media representa de manera apropiada el conjunto de datos o no; además, existe otra serie de dificultades relacionadas con las formas que toman las argumentaciones realizadas por los estudiantes para demostrar la pertinencia de una solución, en las cuales se encuentran inmersas una serie de interrogantes con relación a la media: ¿Cómo es que la media es representativa? ¿Cuándo no lo es?

DIFICULTADES EN LA INTERPRETACIÓN DEL CONCEPTO DE MEDIA

En los Estándares Básicos de Competencias EN Matemáticas propuestos por el MEN (2006), se afirma que todos los conceptos que se trabajen en clase deben ser significativos para los estudiantes para que este aprendizaje pueda emplearse en distintos contextos, algo que define con el término competencia. Por tanto, resulta fundamental que un estudiante sea competente frente al uso de las medidas de tendencia central y precisamente del concepto de media, esto es que sea capaz de darle una interpretación al algoritmo.

Durante el proceso de aprendizaje de las MTC, resulta fundamental para los estudiantes que más allá de operar o calcular el valor de la media referente a un problema determinado, sea capaz de interpretar dicho resultado; por ello es necesario que el estudiante enuncie con sus

palabras qué significa ese resultado y si soluciona el problema en cuestión, dicho proceso podrá ser llamado interpretación.

El proceso de enseñanza para que un estudiante sea capaz de interpretar el valor de la media es un camino bastante arduo, debido a que existen distintos tipos de media y también distintos campos de problemas asociados a esta.

Antes de pasar a mirar algunas interpretaciones del concepto de media, hay que resaltar un aspecto importante que determina la representatividad de la media para un conjunto de datos, y es el tipo de distribuciones en el cual se calcula la media. Se parte del hecho de que existen dos tipos de distribuciones para el conjunto de datos: simétricas y asimétricas; estas son una variable significativa para su interpretación, puesto que en estos casos la media pierde propiedades como: centro de la distribución, predicción (si existieran valores atípicos), etc. Por tanto, antes de hacer una interpretación, se debe consultar si dicho valor representa al conjunto de datos y le da solución a la situación problema propuesta. Si el campo de problemas está asociado principalmente a la estimación de un valor representativo de un conjunto de datos, la interpretación debe estar dirigida a enunciar el valor como centro de dicha distribución y no como una predicción o valores esperados.

Los campos de problemas asociados al concepto de valor esperado son aún más difíciles de interpretar, puesto que para comenzar se deben tener en cuenta varios aspectos conceptuales acerca de la solución de dichos problemas, es decir, en problemas sencillos como lo son la predicción de un valor dado una muestra de datos su interpretación está dada por una predicción que en términos básicos de estadística va a ser probable pero no obligatoria, y por otra parte el valor a interpretar no es representativo del conjunto de datos.

Los campos de problemas un poco más complejos asociados a la esperanza matemática, tienen dificultad en su proceso de interpretación, puesto que al formalizar la idea de valor medio de fenómenos aleatorios se tiende a caer frecuentemente en errores de interpretación, tales como representatividad del valor. Un ejemplo de dichos problemas es calcular la esperanza matemática de los resultados al lanzar un dado (donde su resultado es 3.5), pero sería un error interpretar este resultado como el valor esperado al lanzar un dado, puesto que es imposible. Por tanto, la esperanza matemática y más su interpretación no siempre coincide con los valores de la variable aleatoria en la distribución, por tanto, pierde su valor de representatividad para el conjunto de datos. Por otro lado, la esperanza matemática puede interpretarse de manera más directa en campos de problemas asociados a evaluar la fiabilidad de apostar, esta favorabilidad está expresada en términos del signo que tenga el resultado, es decir, si al calcular la esperanza el resultado es negativo se entiende que en un futuro cercano o en un número n de jugadas se va a perder x valor, y en el caso que sea positivo será todo lo contrario. Cabe resaltar que en algunos problemas, la esperanza matemática no existe y es necesario utilizar otras herramientas para su análisis, un caso puntual es la paradoja de San Petersburgo (Rincón & López, 2014).

EL LENGUAJE GRÁFICO

El lenguaje gráfico juega un papel fundamental en el análisis exploratorio de datos, puesto que el cambio a un sistema de representación gráfico permite la visualización de nueva información (Batanero, Díaz, Contreras & Arteaga, 2011) como puede ser ilustrar la moda, caracterizar una distribución de datos como simétrica o no, o de estimar el valor de la media aritmética sin realizar operaciones.

A la luz de lo anterior, vale la pena preguntarse acerca de las potencialidades de las distintas representaciones gráficas de sistemas de datos (histogramas, diagramas de dispersión, pictogramas, etc.) para el desarrollo del concepto de media; además, como lo menciona Zapata (2011) “el ciudadano común enfrenta el desafío permanente de leer e interpretar datos estadísticos que surgen de diferentes fuentes”. En particular se llama la atención frente a la cantidad de información que se suministra mediante gráficos estadísticos, abriendo campo a la necesidad de habilidades para la comprensión de dichos gráficos por parte de los ciudadanos, entre las cuales se incluye la estimación del valor de la media de los datos. Frente a ello Friel, Curcio y Bright (2001, citados en Cobo, 2003) proponen elementos estructurales de los gráficos:

- El marco del gráfico, en él se incluye información sobre las unidades de medida y los datos que se miden en el mismo, incluye los ejes, escalas, rejillas, marcas de referencia, etc.
- Los especificadores del gráfico, que son a manera general los elementos que se utilizan para representar los datos, como son las barras o los puntos.
- Los títulos y etiquetas.

Estos elementos, aunque presentes en los diversos tipos de gráficos, poseen en cada uno de ellos una dificultad particular para su comprensión y aprendizaje, y es por ello que Cobo y Díaz (2003) afirman que los gráficos estadísticos pueden ser considerados en sí mismos como objetos de enseñanza, más que meras representaciones de las distribuciones de datos. Con base en estas consideraciones, es posible pensar en proponer situaciones que involucren gráficos en las cuales a los estudiantes se les solicite estimar el valor de la media a partir de la información aportada mediante la gráfica, tomando en consideración aquellos elementos estructurales mencionados y cómo estos pueden intervenir en la estimación de la media del sistema de datos.

CONCLUSIONES

A la luz de las consideraciones realizadas previamente, puede afirmarse que en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de media se deben tener en cuenta los diferentes aspectos que están relacionados en la construcción del mismo, como lo son los elementos constitutivos del significado.

Con relación a los campos de problemas asociados al concepto de media, se identifican dificultades en el proceso de solución de estos, debido a la cantidad de campos de problemas asociados al concepto, el proceso de interpretación de dicho resultado, la



diferencia en el resultado de la media en distribuciones simétricas y asimétricas, etc., asuntos que podrían ser importantes para que un docente en ejercicio tenga en cuenta en su organización de clase.

Por otro lado, es de resaltar aquellos casos especiales en los cuales el valor de la media no se ajusta a ninguno de los datos muestrales, como por ejemplo, el valor de la esperanza matemática al lanzar un dado, puesto que la interpretación del concepto de media en estos casos, dista bastante de ser inmediato y significativo para los estudiantes.

Para finalizar, la caracterización propuesta para el análisis de gráficos puede ayudar a los estudiantes a consolidar la comprensión del concepto de media y así mismo la construcción de su significado, en la medida en que con la representación gráfica de datos estadísticos es posible realizar inferencias para estimar el valor específico de la media para cada conjunto de datos. Se espera que estas reflexiones puedan ser retomadas en el aula con el fin de proporcionarle al maestro elementos con los cuales plantear nuevas formas de abordar el concepto de media, y así mismo dar luces para orientar futuras investigaciones en relación a la enseñanza-aprendizaje de dicho concepto.

REFERENCIAS

- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., & Arteaga, P. (2011). Enseñanza de la estadística a través de proyectos. *Estadística con proyectos*, 9-46.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 310-304). Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *UNO*, 2000, 25, 41-58.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática: Universidad de Granada.
- Cobo, B. y Díaz, C. (2003). Media, mediana y moda ¿qué significa esto para los estudiantes de secundaria? *27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Lleida.
- Díaz, D. (2007). *Significado atribuido al concepto de media aritmética por estudiantes de grado séptimo*. (Trabajo de grado de pregrado). Cali: Universidad del Valle.
- Diccionario de la Lengua Española. (2016). DLE: medio, día. [online] Disponible en: <http://dle.rae.es/?id=OIQ6yC8#FAG6zLR> [Ingresado el 9 Agosto. 2016].
- Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. 14 (3): 325-355.
- Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding]. En, L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, pp. 417-424). Universidad de Valencia, España
- Godino, J. (1999) *Análisis epistémico, semiótico y didáctico de procesos de instrucción matemática*. Recuperado de www.ugr.es/~jgodino/semioesp/aepistemico.htm
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Seminário de Investigaçao em*

- Educação Matemática* (p. 25-45). Associação de Professores de Matemática. Portugal. [<http://www.ugr.es/local/jgodino>].
- Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Rincón, G., & López, S. (2014). Los Bernoulli y sus aportes a la teoría de la probabilidad. El caso de la paradoja de San Petersburgo. *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (págs. 174-178). Bogotá, Colombia: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.
- Zapata-Cardona, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista virtual Universidad Católica del Norte*, 234-247.