



UN ESTUDIO SOBRE LAS INTUICIONES PRIMARIAS ASOCIADAS AL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL

Yáñez, Gabriel

gyanez@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Rátiva, Ana Mayerly

mayuyao.4@gmail.com

Universidad Industrial de Santander (Colombia)

Morgado, Cindy Nathalia

nathalia.morgado@udes.edu.co

Universidad de Santander (Colombia)

RESUMEN

En este documento se muestran los resultados de una investigación cuyo objetivo fue indagar sobre las intuiciones respecto al razonamiento covariacional de los estudiantes universitarios de un primer curso de Estadística mediante la aplicación de un cuestionario. Se encontraron estrategias y dificultades ya reportadas en otras investigaciones y se propone al maestro usar las respuestas de los estudiantes donde se evidencian ideas intuitivas válidas para abordar o aclarar aspectos en la introducción al análisis de relaciones, asociación y predicción entre dos variables numéricas. También se ejemplifican algunas situaciones que pueden ser utilizadas como recurso para la instrucción.

PALABRAS CLAVE

Razonamiento covariacional, Intuiciones, Asociación, Errores y dificultades.

INTRODUCCIÓN

El Razonamiento covariacional se refiere a cómo un individuo juzga e interpreta una relación o asociación entre dos variables. Estepa y Batanero (1995) afirman que un razonamiento correcto sobre la asociación es un prerrequisito básico para el aprendizaje de un gran número de conceptos y métodos estadísticos, así como en la cotidianidad para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. El objetivo de este estudio es indagar sobre las intuiciones primarias de los estudiantes universitarios y las estrategias que emplean para resolver problemas de asociación y predicción entre dos variables. Además de identificar las estrategias incorrectas reportadas en la literatura, esta investigación quiere presentar las intuiciones empleadas por los estudiantes que podrían ser utilizadas como punto de partida para apoyar la presentación formal estadística de la covariación.

MARCO DE REFERENCIA

Se toma como marco de referencia algunas investigaciones que han reportado las concepciones y dificultades presentes al establecer asociación entre dos variables a partir de problemas con datos numéricos. Estepa y Batanero (1996) determinan que la concepción determinística ocurre cuando la relación entre las variables se considera solo desde un punto de vista funcional; y la concepción local, cuando se usa solo una parte de los datos y se generalizan las conclusiones a todo el conjunto de datos.

De otra parte, Estepa y Sánchez-Cobo (2003) enuncian las dificultades y errores en relación con la covariación, que se presentan luego de la instrucción, entre ellos: confundir la variable dependiente e independiente y el pensar que siempre que se dé una relación lineal existe proporcionalidad entre variables, lo cual se manifiesta en el uso de la regla de tres.

Referente a la predicción lineal, Casey (2014) estudia las concepciones que los estudiantes poseen antes de estudiar la línea de mejor ajuste; una de éstas es considerar que la recta que mejor se ajusta es la que pasa por más puntos, y otra es considerar el comportamiento de una de las variables (univariado) para describir la relación entre dos variables. Además, los estudiantes que han estado familiarizados con el cálculo, y conocen la pendiente de una recta tienden a interpretar de la misma forma la pendiente de una recta de regresión, y usar estas mismas ideas para determinar la ecuación de la recta de mejor ajuste, convirtiéndose en un obstáculo cognitivo. Casey (2014) sintetiza sus resultados afirmando que un elemento necesario para la enseñanza de los conceptos estadísticos, son las concepciones de los estudiantes y cómo estas pueden ayudar a la sólida comprensión del tema con experiencias de aprendizaje diseñadas e implementadas por los profesores.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Se realizó un estudio cualitativo con alumnos universitarios de un primer curso de Probabilidad y Estadística. Se elaboró un cuestionario con tres ítems uno de los cuales contenía una tabla de datos numéricos y evaluaba las intuiciones y estrategias de asociación y predicción, cuyos resultados son el motivo de este trabajo:

Los corredores dan más pasos por segundo a medida que aumentan la velocidad. He aquí el promedio de pasos por segundo de un grupo de corredoras de élite a distintas velocidades. La velocidad se expresa en metro por segundo.

Velocidad (m/s)	4,8	5,1	5,3	5,6	6,0	6,4	6,7
Pasos por Segundo	3	4	3	7	8	2	4
Pasos por Segundo	3,0	3,1	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
Pasos por Segundo	5	2	7	5	6	6	5

- Escoja la opción que mejor describe los datos anteriores y justifica.
 - La corredora con mayor velocidad dará más pasos por segundo.
 - Si las corredoras tienen velocidades altas darán menos pasos por segundo.
 - Si las corredoras tienen velocidades bajas entonces darán menos pasos por segundo.
 - No se puede establecer relación entre las velocidades de las corredoras y el número de pasos por segundo.
- Prediga el número de pasos por segundo si la velocidad de una corredora alcanza 6 m/s.

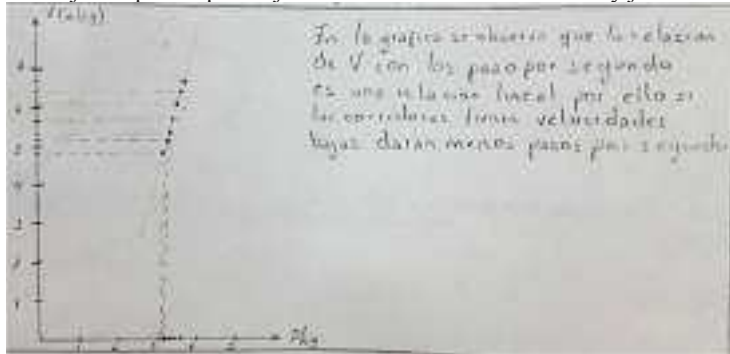
La muestra estaba conformada por 69 estudiantes de diferentes carreras universitarias (Psicología, Ingeniería Civil, Ingeniería Industrial, Enfermería, Fonoaudiología), que desarrollaban el curso de Estadística Descriptiva. Al inicio del curso y antes de la aplicación del cuestionario los estudiantes habían tratado los siguientes temas: medidas de tendencia central, medidas de dispersión y gráficos.

DESARROLLO

De los 69 estudiantes que presentaron la prueba, 51 de ellos contestaron el ítem de asociación y predicción. A continuación se analizan las respuestas de los estudiantes:

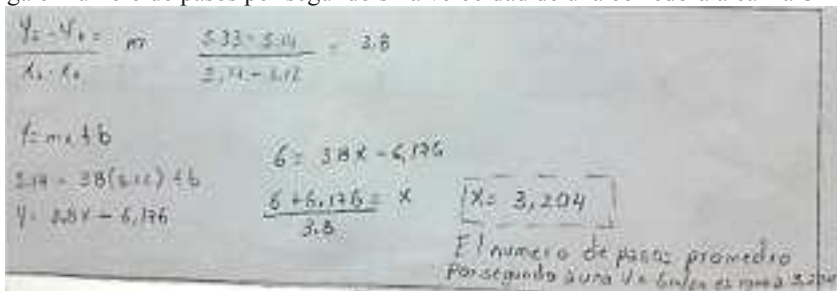
Ocho (8) estudiantes escogen la opción correcta (c) y en su argumentación se evidencia que entienden el sentido de la relación, si las dos variables aumentan (velocidad- pasos) es igual a decir que ambas disminuyen; esto se observa a través de argumentaciones como: “si la velocidad disminuye también lo hace la cantidad de pasos y lo mismo sucede si la velocidad aumenta”. Un estudiante realiza un gráfico de dispersión y basa su análisis en el hecho que la gráfica evidencia una relación lineal (Imagen 1a). Estas respuestas corresponden a estrategias intuitivas adecuadas para responder a la pregunta.

Escoja la opción que mejor describe los datos anteriores y justifica.



(a)

Prediga el número de pasos por segundo si la velocidad de una corredora alcanza 6 m/s.



(b)

Imagen 1. Respuesta correcta de un estudiante al ítem datos numéricos

Dentro de los estudiantes que escogen una opción incorrecta, 30 (61%) escogen la opción (a) y argumentan que cada columna describe los datos correspondientes a una corredora,

aunque el enunciado aclara que es el promedio de un grupo de corredoras. En los estudiantes persiste la idea que al tener un solo dato (promedio) se pierde el sentido de grupo y se asume que este valor pertenece a un individuo. Además, los estudiantes asumen que son los pasos quienes explican el aumento de la velocidad, con afirmaciones como: “porque cada vez que la cantidad de pasos aumenta, también aumenta la velocidad de la corredora”, confunden variable dependiente con independiente según los errores reportados en Estepa y Sánchez-Cobos (2003).

El 16% de los estudiantes (8 individuos) basan su argumento en el uso de ecuaciones físicas o matemáticas, que no dan solución al problema y los sitúa en un contexto ajeno al planteado. Tal es el caso del siguiente ejemplo: “... el tiempo es inversamente proporcional a la velocidad, entre más rápido menos tiempo le tomará $d = v/x$ ” (Imagen 2). Un 5% de los estudiantes se fijan en dos datos para establecer la relación entre las variables, lo cual deja en evidencia una concepción local de la correlación (Estepa & Batanero, 1996).

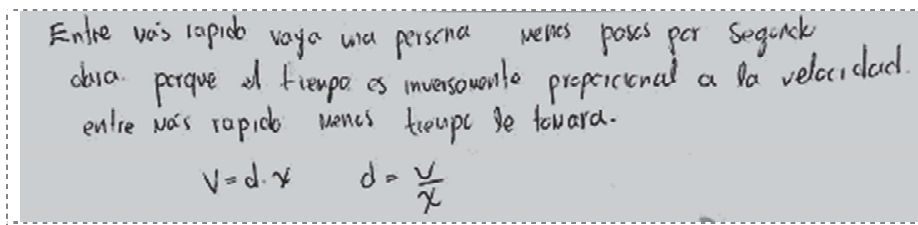


Imagen 2. Respuesta incorrecta de un estudiante que utiliza una ecuación física

Respecto a la segunda parte, donde se pide hacer una predicción sobre el número de pasos por segundo, si la velocidad de la corredora es de 6 m/s, se presentaron varias estrategias de solución. Entre ellas, un estudiante que realiza el diagrama de dispersión y utiliza como estrategia tomar el segundo y tercer dato para determinar una pendiente y la ecuación de una recta (Imagen 1b). Se puede deducir que este estudiante decide aplicar el concepto matemático pendiente de una recta, si bien entiende la relación lineal entre los datos, confunde la variable dependiente (pasos por segundo) con la independiente (velocidad). A pesar de los errores que se evidencian, esta idea intuitiva puede ser usada por los profesores para aclarar la diferencia que existe entre una relación funcional y una relación de asociación estadística que es un error persistente aún luego de la instrucción tal y como lo reporta Casey (2014).

Otras estrategias usadas por los estudiantes para predecir el número de pasos fueron:

- Hacer regla de tres (Estepa & Sánchez-Cobo, 2003). Utilizada por 19 estudiantes para establecer la predicción. De estos: 3 hacen el promedio de las dos variables y con estos establecieron la regla de tres (Imagen 3).
- Promedios. 11 promediaron el número de pasos cuyas velocidades eran cercanas a 6 m/s, $(3.25+3.36)=3,3$ y otros 3 estudiantes realizan el promedio de todos los datos, en número de pasos por segundo (3.28), y este valor lo asignaron a la velocidad de 6

m/s. A continuación en el Gráfico 1 se muestra el porcentaje de estudiantes que utilizan las diferentes estrategias ya descritas para realizar la predicción.

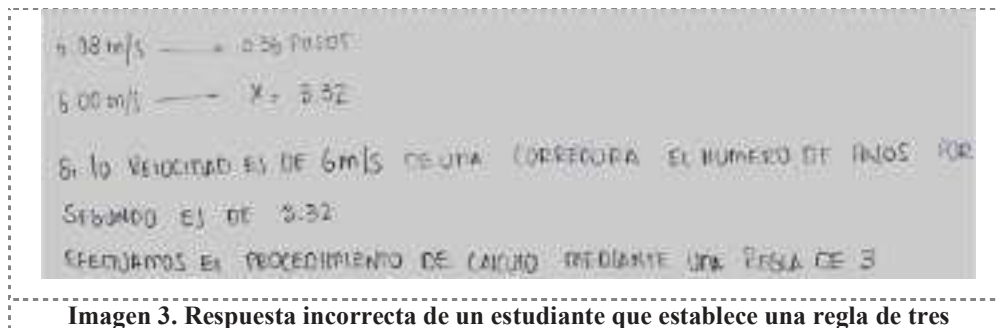
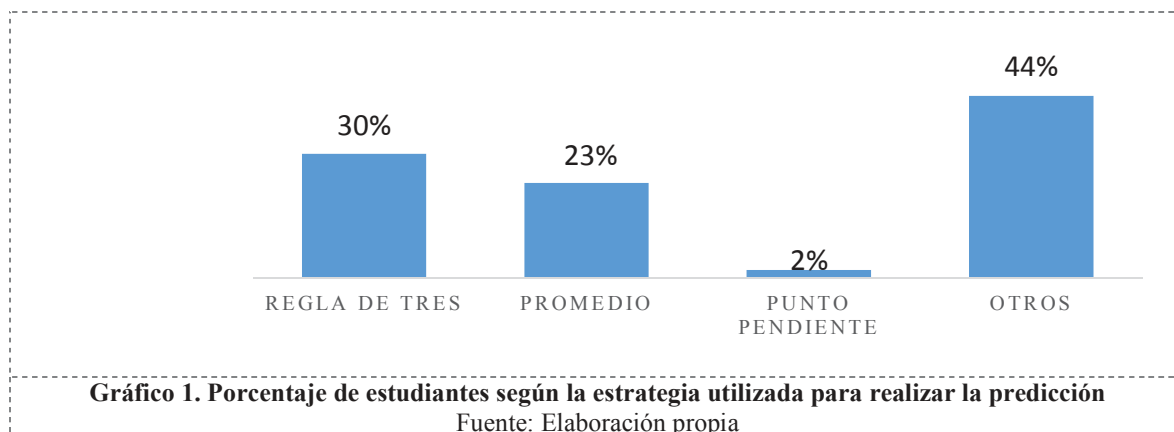


Imagen 3. Respuesta incorrecta de un estudiante que establece una regla de tres



CONCLUSIONES

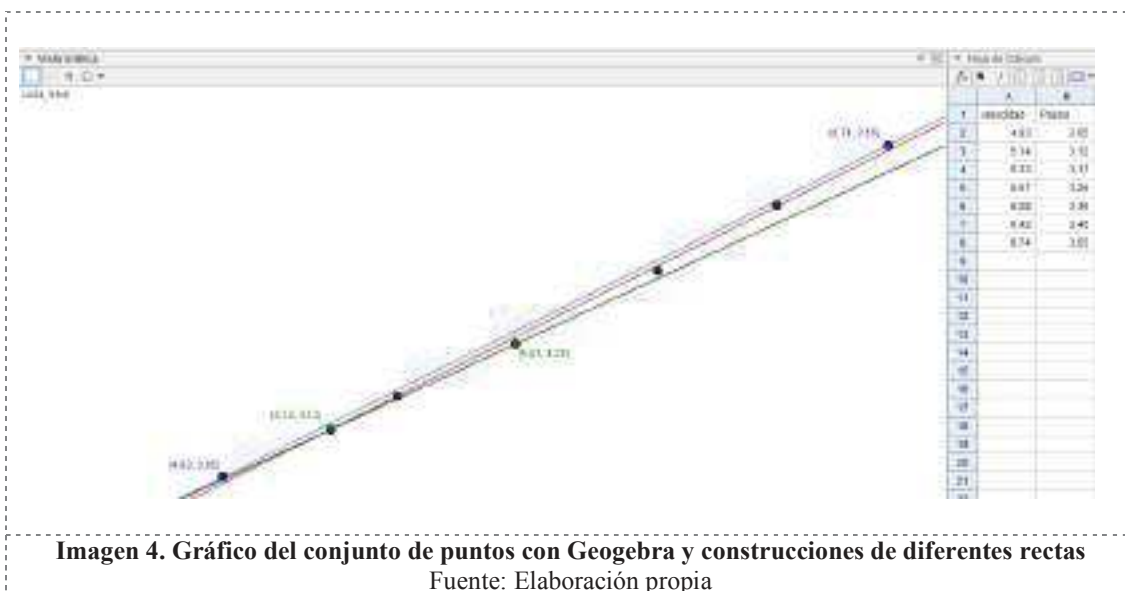
Las respuestas incorrectas de este grupo de estudiantes ilustran las concepciones y dificultades reportadas en la literatura, tales como: la concepción local de la asociación (Estepa & Batanero, 1996), el uso de conceptos matemáticos y físicos y el uso de la regla de tres, es decir, una idea determinística de la asociación (Estepa & Sánchez-Cobos, 2003). Estas investigaciones revelan que tales concepciones y dificultades persisten aun luego de la instrucción. Sin embargo, este estudio permitió evidenciar algunas concepciones de los estudiantes que pueden ser utilizadas como recurso para abordar la instrucción (Casey, 2014). A continuación se describen algunas situaciones, como ejemplo para utilizar las concepciones de los estudiantes en la enseñanza.

CONCEPCIÓN: USAR DOS PUNTOS CUALESQUIERA PARA TRAZAR UNA RECTA.

SITUACIÓN

Abre el archivo de Geogebra Corredoras.ggb. En la hoja de cálculo se muestra el promedio de pasos por segundo de un grupo de corredoras de élite a distintas velocidades y en la vista gráfica el diagrama de puntos de los datos. La velocidad se expresa en metro por segundo.

1. Traza la recta que mejor se ajusta a los datos. El profesor debe mostrar cómo se construye una recta en GeoGebra. Aquí podría surgir que trazarán una recta tomando como referencia el primer y el último dato o construyeran rectas con cualesquiera dos puntos (Imagen 4).
2. Discute con tus compañeros y el profesor las siguientes preguntas:
 ¿Cómo construir la recta que mejor se ajusta a todos los datos?
 ¿Cuál criterio se debe definir para la recta de mejor ajuste?
 En la discusión se pretende indagar sobre cuál sería la mejor recta e ir construyendo un camino que lleve a la idea de mínimos cuadrados.



CONCEPCIÓN

Tomar dos puntos y hallar la pendiente para establecer la ecuación de una recta.

SITUACIÓN

La siguiente tabla muestra el promedio de pasos por segundo de un grupo de corredoras de élite a distintas velocidades. La velocidad se expresa en metros por segundo.

Velocidad (m/s)	4,83	5,14	5,33	5,67	6,08	6,42	6,74
Pasos por segundo	3,05	3,12	3,17	3,25	3,36	3,46	3,55

Tabla 1. Promedio de pasos por segundo
 Fuente: Elaboración propia

Contesta las siguientes preguntas. Justifica tu respuesta

1. ¿Cuál sería el número de pasos por segundo si la velocidad de una corredora alcanza 6 m/s? ¿Cuál sería el número de pasos por segundo si la velocidad de una corredora es de x m/s? Se toma como punto de partida la concepción del estudiante de utilizar

dos puntos y determinar una ecuación de la recta para establecer el número de pasos por segundo.

2. Abre un archivo en Geogebra y sigue las instrucciones del docente. El profesor debe mostrar cómo realizar el gráfico de puntos en Geogebra y cómo enviarlo a la vista gráfica.
3. Construye la recta que estableciste en la pregunta 1. El profesor debe mostrar cómo construir una recta en GeoGebra introduciendo en Entrada la ecuación algebraica del punto 1.
4. Realiza el ajuste lineal con la ayuda de GeoGebra. El docente muestra cómo hacer el ajuste.
5. Compara la recta que construiste en el punto 3 y la recta de ajuste producida por Geogebra. ¿Cuál recta permite hacer una mejor estimación para responder a la pregunta 1? Esta pregunta la debe trabajar el estudiante sin la guía del profesor.
6. Socializa con tus compañeros y el profesor las soluciones a las anteriores preguntas y concluye al respecto. En la socialización el docente podría proponer construir las rectas que establecieron algebraicamente los demás compañeros y seguido mostrar cómo realizar zoom sobre la vista gráfica y observar detalladamente las rectas (Imagen 5) con el fin de generar discusión sobre cuál función permite hacer una mejor estimación: la determinada algebraicamente con dos puntos, o la suministrada por Geogebra.

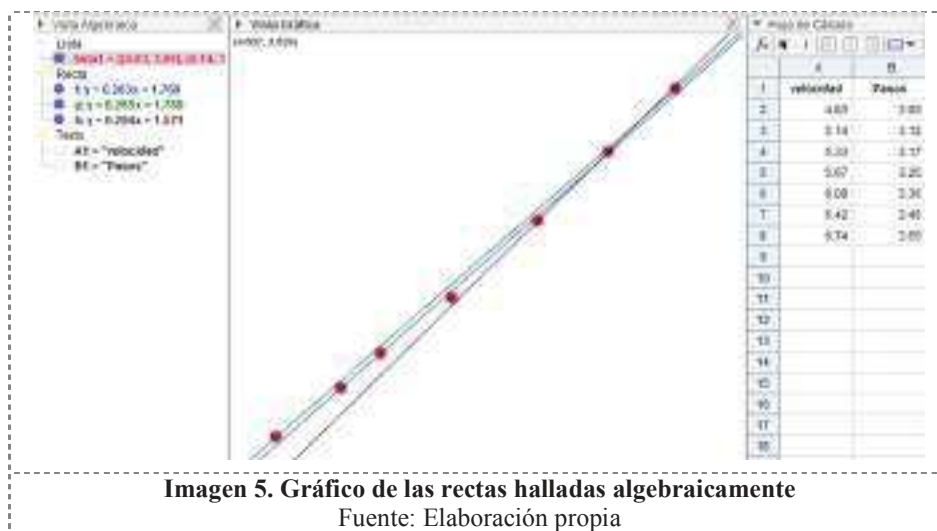


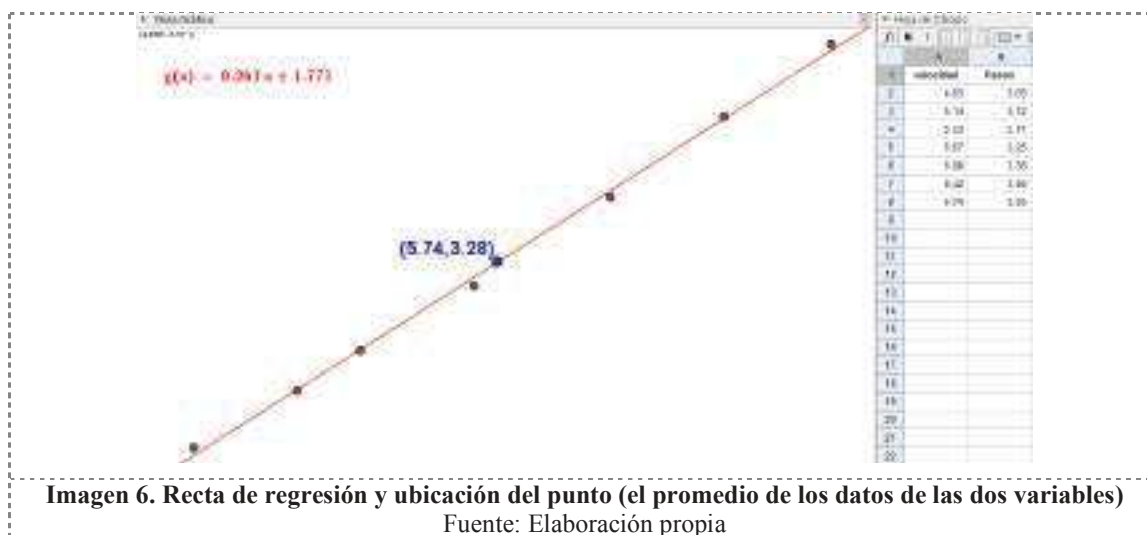
Imagen 5. Gráfico de las rectas halladas algebraicamente
Fuente: Elaboración propia

CONCEPCIÓN: HALLAR EL PROMEDIO DE LAS DOS VARIABLES

SITUACIÓN

Abre el archivo de Geogebra Corredoras.ggb. En la hoja de cálculo se muestra el promedio de pasos por segundo de un grupo de corredoras de élite a distintas velocidades. La velocidad se expresa en metro por segundo.

1. Realiza análisis de regresión de dos variables y traza la recta de ajuste a los datos. El profesor debe mostrar cómo se realiza en Geogebra el análisis de regresión.
2. Ubica el punto en el plano que corresponde al promedio de las dos variables (Imagen 6) y discute con tus compañeros y el profesor la siguientes preguntas:
 ¿El punto hace parte de la recta de regresión?
 ¿Cómo podría utilizar este punto para calcular la recta de regresión?
 En la discusión se pretende indagar sobre la importancia de los promedios de las dos variables en la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.



REFERENCIAS

- Casey, S. (2014). Teacher's knowledge of student's' conceptions and their development when learning linear regression. In K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014)*, Flagstaff, Arizona, USA. Voorburg. The Netherlands: International Statistical Institute.
- Estepa, A. & Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 13 (2), 155-170.
- Estepa, A. & Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 25-41.
- Estepa, A. & Sánchez-Cobo, F. (2003). Evaluación de la comprensión de la correlación y regresión a partir de la resolución de problemas. *Statistics Education Research Journal*, 2, 54-68.