



UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL NORTE
VICERRECTORÍA ACADÉMICA
ESCUELA DE EDUCACIÓN

CARACTERIZACIÓN DE TAREAS MULTIPLICATIVAS A PARTIR DE LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Tesis de Pregrado para optar al grado académico de Licenciado en Educación

FABIANA SCATTARÉTICA MUÑOZ

Profesora Guía: Nielka Rojas González

Antofagasta, Chile
2017

A ti y mi pequeña... son lo más importante
Gracias por todo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	5
<u>CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN</u>	9
1.1 OBJETIVOS DEL ESTUDIO.....	12
1.2 JUSTIFICACIÓN DEL TEMA A INVESTIGAR	13
1.3 VIABILIDAD DEL ESTUDIO.....	14
<u>CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO</u>	15
2.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.....	15
2.1.1 MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN MATEMÁTICAS	16
2.1.2 APORTES DE LA RPM E INVENCION DE PROBLEMAS AL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA	20
2.1.3 ¿QUÉ ENTENDEMOS POR RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS?	21
2.1.4 TIPOS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS.....	24
2.1.5 RESULTADOS OBTENIDOS EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	26
2.2 INVENCION DE PROBLEMAS	27
2.2.1 ASPECTOS POSITIVOS DE LA INVENCION DE PROBLEMAS	28
2.2.2 SITUACIONES DE INVENCION DE PROBLEMAS EN EL AULA.....	29
2.2.3 INVESTIGACIONES SOBRE LA VALORACION DE LOS PROBLEMAS INVENTADOS.....	33
2.3 MULTIPLICACION	36
2.3.1 SIGNIFICADOS DE LA MULTIPLICACION.....	36
2.3.2 CLASIFICACION DE LOS PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA	39
2.3.3 PRESENCIA DE LA MULTIPLICACION EN EL CURRÍCULO CHILENO.....	42
2.4 ASPECTOS VALORATIVOS DE LOS PROFESORES HACIA LA RPM E INVENCION DE PROBLEMAS.	44
2.5 RESUMEN DEL CAPÍTULO	46
<u>CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO.....</u>	47
3.1 TIPO DE INVESTIGACION	47
3.2 UNIDAD DE ANÁLISIS.....	48
3.3 DISEÑO DE INSTRUMENTOS.....	48
3.4 FASES DE APLICACION DEL INSTRUMENTO	49
3.4.1 APLICACION ETAPA 1: ACTIVIDAD PILOTO.....	50

3.4.2	DECISIONES FINALES A PARTIR DE ACTIVIDAD PILOTO	57
3.4.3	VALIDACIÓN DEL INSTRUMENTO POR EXPERTOS DEL ÁREA DE LA MATEMÁTICA	58
3.4.4	CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.....	59
<u>CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS.....</u>		63
4.1	CARACTERIZACIÓN TIPOS DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS	65
4.2	ANÁLISIS ENTREVISTA A PROFESORES DE MATEMÁTICA DE COLEGIO A, B Y C	72
<u>CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</u>		76
5.1	LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN	80
5.2	PROYECCIONES DE LA INVESTIGACIÓN	80
<u>REFERENCIAS.....</u>		82
<u>ANEXOS.....</u>		86

INTRODUCCIÓN

El presente estudio es de corte cualitativo y a su vez descriptivo, aborda dos temáticas principales; la invención de problemas y el conocimiento de la multiplicación de números naturales, ambos temas de interés para el quehacer docente vinculado a la matemática.

La invención de problemas (IP) resulta un tema de gran interés, principalmente por dos motivos, primero se enmarca dentro de la línea de investigación de Resolución de Problemas Matemáticos (RPM) la cual ha sido ampliamente investigada, y por vincularse directamente con el desarrollo de la competencia matemática; ambas actividades estrechamente ligadas.

La invención de problemas es una actividad importante dentro de la experiencia matemática de los estudiantes, siendo de gran valor educativo. A pesar de esto la IP aún no es considerada de manera extensa dentro de las orientaciones curriculares de nuestro país, a diferencia de la RPM, de acuerdo al análisis realizado a las actuales Bases Curriculares (MINEDUC, 2013).

Los dos temas tratados en el presente estudio resultan relevantes para los profesores del entorno más inmediato. Particularmente, para aquellos que inician sus prácticas y aún no han desarrollado una estrategia de enseñanza determinada para tratar el concepto de multiplicación. Así se espera, que este trabajo reporte conocimientos específicos que los profesores de enseñanza básica deben considerar cuando aborden la multiplicación y se adquiera una valorización sobre la IP en la actividad matemática.

De acuerdo a la literatura la invención de problemas se constituye como una herramienta que permite al profesor, tener una visión sobre la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos que tienen los estudiantes. Además, teniendo en cuenta el desempeño logrado por estos en diversas pruebas estandarizadas, aproximarse de manera más profunda y con más detalle a los tipos de tareas que realizan sobre multiplicación, resulta un ejercicio beneficioso del cual es posible extraer información relevante. Esta información puede ser la base para futuros diseños de las propuestas de enseñanza.

Para ello, la investigación se centrará en realizar una caracterización de los problemas de multiplicación que inventan un grupo de estudiantes, bajo la modalidad de una actividad semiestructurada de invención de problemas.

El grupo lo conformarán estudiantes de Sexto Año Básico de la comuna de Antofagasta, pertenecientes a tres colegios de distinta administración (pública, subvencionada y particular), con la intención de investigar particularidades en estos problemas, principalmente en cuanto a la complejidad matemática de las tareas inventadas, diversidad de contextos empleados, y tipos de problemas multiplicativos. Adicionalmente se realiza una entrevista estructurada a cada profesor que imparte clase de matemática a los estudiantes sujetos del estudio, esto solo con el fin de complementar los datos obtenidos al considerar a todos los actores del proceso.

La exposición de los temas presentados se organiza de la siguiente manera; en el primer capítulo se desarrolla el planteamiento del problema que incluye algunos resultados alcanzados en resolución de problemas matemáticos, invención de problemas como actividad matemática y la multiplicación. Junto con ello se presenta el problema a investigar, las preguntas de investigación y los objetivos propuestos en el estudio.

En el segundo capítulo se realiza una revisión de la literatura, abordando las áreas principales de trabajo que se han mencionado, contrastándolas con su presencia en el currículo nacional. El tercer capítulo expone en detalle la metodología empleada y enmarca el tipo de investigación. Además, se exponen los métodos utilizados para la recolección de la información y las unidades de análisis definidas. Dado que el estudio se realizó en dos fases se especifican los instrumentos considerados para cada fase y los criterios con los que se elaboran las categorías de análisis.

El capítulo cuarto dedicado al análisis exclusivo de la información obtenida durante la segunda fase de aplicación, da una panorámica general sobre los problemas matemáticos multiplicativos que crean estudiantes de los tres colegios participantes en la investigación. Adicionalmente, en este apartado se exponen los análisis sobre las entrevistas realizadas a los profesores que han dirigido la enseñanza de este grupo de estudiantes.

En el quinto capítulo se exponen las principales conclusiones que derivan de los resultados obtenidos, además se incluyen algunas recomendaciones orientadas a los profesores de

matemática que se inician en la enseñanza de la multiplicación, junto con aportar algunas consideraciones sobre la invención de problemas. Por último, se declaran posibles líneas investigativas a desarrollar, empleando la invención de problemas como herramienta para profundizar en el conocimiento de los estudiantes.

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Es posible comprobar que existe una preocupación internacional sobre la habilidad de resolución de problemas de matemáticas (RPM) que han de desarrollar los estudiantes a nivel mundial; razón por la que en los últimos 30 años ha sido considerada como una actividad central en el aprendizaje de las matemáticas, incrementando su presencia en los currículos (Castro, 2008; Santos, 2001; MINEDUC, 2013). Tal como indica la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, Ciencia y la Cultura (UNESCO, OREALC, 2013) la enseñanza de la matemática tiene como enfoques generales: la resolución de problemas, la aplicación de los conocimientos matemáticos a situaciones cotidianas y el desarrollo de la capacidad de argumentar y comunicar resultados.

Son numerosas las investigaciones que vinculan directamente el aprendizaje de la matemática con la capacidad de resolver problemas. Como se expresa en el marco “Aportes para la enseñanza de la matemática” del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE, 2016), la RPM supone activar todas las habilidades del pensamiento de los estudiantes y relacionar fuertemente el conocimiento matemático adquirido en el ámbito escolar con la vida cotidiana. De esta manera es posible apuntar la resolución de problemas como eje vertebrador del contenido matemático, ya que pone de manifiesto la capacidad de análisis, comprensión, razonamiento y aplicación, y que se constituye como una competencia básica que los alumnos deben adquirir (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015).

Por otra parte, las distintas orientaciones curriculares incluyen el desarrollo de esta habilidad, particularmente en Chile el Ministerio de Educación (2013) plantea que la resolución de problemas es el foco de la enseñanza de la matemática y que es tanto un medio como un fin para lograr una buena educación matemática. El currículo chileno en matemática contempla, dentro de los Objetivos de Aprendizaje de Habilidades, la resolución de problemas, señalando de qué forma se debe abordar en el aula; a saber, se emplea el modelo de Pólya (1979) –quién fuera el desarrollador de esta línea de

investigación– explicitando cuatro fases para desarrollar dicha habilidad: comprensión del problema, diseño del plan, ejecución y verificación de la solución, tomando el enfoque de *Enseñanza sobre la resolución de problemas*, como se profundizará en el siguiente capítulo.

Sin embargo, y tras los esfuerzos en educación a nivel mundial, el informe internacional sobre educación matemática PISA (2003; 2006; 2009; 2012) muestra reiteradamente bajos resultados obtenidos (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015). Particularmente, Chile tras los resultados de PISA 2012 se posiciona en el tercil inferior, con 423 puntos, permaneciendo bajo la media OECD, a considerar en los países de la media, solo uno de cada cinco alumnos es capaz de solucionar problemas muy sencillos (nivel 1), siempre que sean en contextos familiares (OECD, 2014).

Por otra parte, la invención de problemas (IP) es una línea de investigación que surge de los estudios realizados sobre la resolución de problemas matemáticos. Se refiere a la creación de nuevos problemas a partir de una situación dada, o bien a la reformulación durante el proceso de resolución. Al respecto como recoge Castro (2008), investigadores en Educación Matemática han enfatizado a lo largo del tiempo el valor educativo que tiene la actividad de que los estudiantes inventen/planteen/formulen problemas, por esto, han sugerido que se incorporen a las clases de matemáticas actividades de invención de problemas.

Son pocas las investigaciones que den cuenta de la realidad de los estudiantes chilenos en la RPM o la invención de problemas, salvo los resultados de las evaluaciones estandarizadas (SIMCE, PISA) que, por cierto, evidencian falta de dominio de estas habilidades.

Sin embargo, es posible citar el reciente estudio guiado por Felmer *et al.* (2014), quien aborda la temática desde la otra vereda; los profesores, con una muestra de 30 docentes nóveles chilenos de Educación Media, revela que éstos ofrecen pocas oportunidades a sus estudiantes para desarrollar la habilidad de resolución de problemas matemáticos, esto tras observaciones de clases. Ante este resultado, es comprensible que los estudiantes no se desenvuelvan apropiadamente ante actividades de RPM, por lo que se espera algo similar frente a la invención de problemas.

Por lo tanto, y de acuerdo a lo expuesto la actividad de inventar problemas matemáticos resulta oportuna para esta investigación, tanto porque ha sido poco considerada en el quehacer diario de la enseñanza de la matemática en Chile, como por configurarse una ventana para caracterizar los tipos de problemas matemáticos que los estudiantes inventan.

La finalidad del presente estudio es caracterizar los tipos de tareas matemáticas vinculadas al concepto de multiplicación, que preponderan en estudiantes de Sexto Año Básico. Razón por la que se ha decidido utilizar la invención de problemas, ya que permite a los alumnos trabajar sobre el significado de los conceptos y/o procedimientos matemáticos o sobre la utilidad de los mismos y transferirlo a una variedad de contextos (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015).

Por ello, a partir de la invención de problemas se comprenderá cuáles son los tipos de problemas multiplicativos que generan los estudiantes, los diversos contextos que emplean, la complejidad matemática de las situaciones propuestas, aspectos que permitirán caracterizar las tareas que inventan los estudiantes. Con lo cual se espera poder aportar a los profesores algunas orientaciones que potencien el aprendizaje de la multiplicación, identificando, si es que existe algún tipo de problema menos propuesto o inclinación sobre alguno en particular. Además, considerando que los profesores deben dar a conocer a sus estudiantes una variedad de escenarios en los cuales la matemática forma parte, con el fin de estos experimenten una matemática funcional, se vuelve relevante conocer cuáles son los tipos de contextos que sugieren los estudiantes, ya que esta información puede ser de base para que los profesores se interesen en diversificar y enriquecer los ejemplos que presentan durante sus clases. Además, los profesores podrán tener evidencias sobre las habilidades de invención y resolución de problemas de sus estudiantes. Otra de las razones para seleccionar la invención de problemas matemáticos como herramienta en esta investigación, está dada por la positiva relación entre esta última y la RPM; ya que la práctica habitual de inventar problemas está relacionada con una mejora de las habilidades de los estudiantes al resolver problemas, por último, ofrece variables de estudio de los problemas aritméticos, aspectos que son de relevancia en este trabajo.

Finalmente, tanto la RPM como la invención de problemas consideran aspectos emocionales dentro del proceso, Silver (1985) contempla la relación entre los aspectos afectivos y la resolución de problemas y junto a otros autores han abordado las creencias,

actitudes, emociones como influyentes para el desarrollo de la actividad de resolución de problemas, lo cual también es válido para los profesores, como se ha visto en diversos estudios (Bryan, 2003; Callejo y Vila, 2003; Pajares, 1992, citados en Donoso, Rico y Castro, 2016) las creencias que tienen los profesores hacia algún contenido específico influye en su forma de abordarlo durante sus clases. Por esta razón, se considera relevante para esta investigación indagar sobre las valoraciones hacia la invención de problemas por parte de profesores de matemáticas que guían o han enseñado al grupo de estudiantes que participará en esta investigación, especialmente recoger sus opiniones respecto a la temática y al modo de trabajar la invención de problemas en el aula.

1.1 OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Para dar respuesta al problema de investigación, se ha fijado el siguiente objetivo general:

- Caracterizar las producciones enunciadas por estudiantes de Sexto Año Básico, a través de la invención de problemas matemáticos multiplicativos.

Para la consecución del Objetivo General, se proponen los siguientes Objetivos Específicos:

- Identificar y describir los tipos de tareas multiplicativas que desarrollan los estudiantes a través de la creación de problemas matemáticos.
- Identificar y describir niveles de complejidad de tareas multiplicativas que desarrollan los estudiantes a través de la creación de problemas matemáticos.
- Identificar y describir los contextos de tareas multiplicativas que desarrollan los estudiantes a través de la creación de problemas matemáticos.

Con el propósito de considerar a todos los actores que forman parte del proceso, y con fines complementarios al objetivo principal también se contempla:

- Identificar las valoraciones sobre la invención de problemas presentes en profesores de matemática vinculados a los estudiantes participantes.

1.2 JUSTIFICACIÓN DEL TEMA A INVESTIGAR

Ante lo expuesto se considera que la presente investigación resulta de valor por cuanto aborda temáticas fundamentales dentro de la Educación Matemática, como ha sido indicado, la resolución de problemas matemáticos constituye la línea de investigación que más importancia cobra en la enseñanza. Tanto es así que el último marco teórico de PISA explícita y define la resolución de problemas como el proceso mediante el cual los estudiantes formularán, emplearán e interpretarán fenómenos usando las matemáticas (OECD, 2013). Así mismo la RPM se presenta como el contexto en que los alumnos deberán demostrar su competencia matemática, mostrando la relevancia que tiene esta habilidad para desenvolverse en el mundo actual (Rico, 2007), por ello la importancia de abordarla en el aula.

Por su parte, la invención de problemas se enmarca dentro de la RPM, y presenta reales contribuciones para el desarrollo de esta habilidad, por ejemplo, los Estándares Profesionales para la Enseñanza de la Matemática (NCTM, 1991) sugieren un incremento en el uso de dicha actividad en las clases de matemáticas. De igual forma, algunos distinguidos matemáticos e investigadores en Educación Matemática (Freudenthal, 1973; Pólya, 1979; Brown y Walter, 1990; Ellerton, 1986; NCTM, 2000; Rico, 1995) reconocen la invención de problemas como actividad importante dentro de la experiencia matemática de los estudiantes, y destacan el gran valor educativo que tiene el que los estudiantes inventen problemas. Asimismo, Alsina (2009) cuando expone sobre qué es ser matemáticamente competente, incluye plantear y resolver problemas como actividades que contribuyen.

Por tanto, se considera importante realizar un estudio que explore la capacidad de inventar problemas matemáticos en estudiantes antofagastinos, ya que no se reportan estudios a nivel nacional que traten esta temática; si bien se manejan los resultados generales de las evaluaciones estandarizadas, aún no se ha explorado directamente y en profundidad como se resuelven los estudiantes de la comuna ante esta competencia matemática. Igual de importante resulta poder emplear esta actividad como medio para indagar sobre la apropiación que tienen los estudiantes acerca de los tipos de problemas multiplicativos, los que al ser abordados en toda su diversidad configuran el concepto de multiplicación.

Por último, los enunciados que plantean los estudiantes están situados en diferentes contextos, y constituyen un reflejo de lo que ha sido su experiencia educativa; investigarlos resulta de interés, ya que existe una preocupación por vincular el conocimiento matemático con los problemas del presente y su solución.

1.3 VIABILIDAD DEL ESTUDIO

La factibilidad para lograr llevar a cabo el estudio, en primera instancia resulta alta, ya que se cuenta con reales posibilidades para contactar algunos centros educativos, ya sea por instancias de prácticas educativas o contactos académicos, la gestión para el ingreso al aula puede resultar más compleja, para minimizar ese riesgo, se contempla intervenir en la asignatura de matemática, taller de matemática u otra que la institución disponga, con un instrumento diseñado para no extenderse de 60 minutos.

El complemento de esta investigación, es decir la aplicación de una entrevista a profesores de matemática, podría tener ciertos lapsos, principalmente porque requiere la participación de profesores de matemática de Enseñanza Básica, idealmente se quiere entrevistar al profesor o profesora a cargo del curso participante.

Por último, en cuanto a la disponibilidad de recursos económicos, la realización completa de la investigación no contempla gastos importantes, por lo tanto, no se esperan interrupciones mayores para su concreción.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

Para la constitución del marco teórico de esta tesis se sigue la siguiente organización, la cual considera tres grandes corrientes de información. Primeramente, se expone lo ampliamente investigado sobre resolución de problemas matemáticos, ya que como indica Blanco (2008) corresponde al eje vertebrador del contenido matemático, con lo cual se espera ofrecer al lector mayor comprensión sobre la relevancia de incluir la RP y la IP para el aprendizaje de la matemática. Luego se pasa a profundizar en los aportes en invención de problemas y exponer los modos en que esta actividad se puede incluir al aula. Por otra parte, se aborda en el contenido matemático sobre multiplicación; su estructura y tipos de problemas, para finalmente exponer brevemente sobre la valoración que tienen los profesores hacia las matemáticas y cómo estas influyen en el quehacer matemático en el aula.

2.1 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Investigadores de diversas disciplinas, filósofos e historiadores del conocimiento comparten el hecho de que la ciencia es en sí misma, una actividad de resolución de problemas, esto porque forma parte de la actividad intrínseca al quehacer científico. Luego cada disciplina aborda la noción de problemas desde una perspectiva propia (Castro, 2008). Específicamente para las Ciencias de la Educación, la resolución de problemas resulta importante desde el punto de vista de su enseñanza y aprendizaje, esta competencia se constituye como un tema prioritario de estudio e investigación para el ámbito educativo:

[...] a través de fijar la resolución de problemas como actividad central se busca preparar personas para enfrentar las condiciones impuestas por la globalización, desarrollando habilidades que les permitan adaptarse a los cambios de una sociedad compleja, generando competencias para ser permeables a estos cambios (OREALC/UNESCO, 2016, p.28).

Por ello, la resolución de problemas se integra como un contenido escolar que se presenta como meta relevante para la educación de los estudiantes a nivel mundial, una evidencia de la transversalidad y relevancia de la resolución de problemas se ve reflejada a través de la evaluación internacional PISA, la cual tiene como propósito “identificar la existencia de

ciertas capacidades, habilidades y aptitudes que, en conjunto, permiten a la persona resolver problemas y situaciones de la vida” (OCDE, 2006, p. 6).

Más recientemente en el informe Resultados PISA (2012), en su apartado Resolución de Problemas, define competencia de resolución de problemas como: “[...] la capacidad de un individuo para participar en los procesos cognitivos para comprender y resolver situaciones problemáticas en las que un método de solución no es inmediatamente obvio. Incluye la disposición a comprometerse con este tipo de situaciones con el fin de alcanzar su potencial como ciudadano constructivo y reflexivo” (p.1). De esta manera se aprecia la relevancia que ha adquirido la resolución de problemas para el ámbito escolar, por cuanto significa adquirir capacidades que permiten desenvolverse ante los desafíos de la vida actual, que concierne un trasfondo mayor, configurándose como una habilidad compleja que implica ir más allá de dar respuestas numéricas a diversos problemas. Por tanto, el profesorado y los centros educativos deben fomentar esta competencia en los estudiantes para afrontar y resolver problemas de manera creativa, apelando a los conocimientos y destrezas, con el fin de preparar al alumnado para enfrentar y resolver los problemas para el Siglo XXI (OCDE, 2012).

Concretamente en Chile, de acuerdo a las Bases Curriculares 2012 las cuales se organizan en Objetivos de Aprendizaje y Objetivos de Aprendizaje Transversales y que contemplan metas de carácter comprensivo y general para la educación escolar, en este caso en Educación Básica; se promueve dentro de la Dimensión Cognitiva, el desarrollo de la capacidad para “resolver problemas de manera reflexiva en el ámbito escolar, familiar y social utilizando tanto modelos y rutinas como aplicando de manera creativa conceptos y criterios” (MINEDUC, 2012, p.16). Como se constata, nuestro país también atiende a esta visión holística de la resolución de problemas como herramienta para desenvolverse en el mundo globalizado.

2.1.1 Modelos de resolución de problemas en matemáticas

Como se ha señalado hoy en día la Resolución de Problemas se impone como eje central y soporte principal del aprendizaje matemático, esta línea de investigación se enmarca dentro de la Didáctica de la Matemática y por lo menos desde los últimos 30 años se constituye como un marco ideal para la construcción de aprendizajes significativos en el aula.

La resolución de problemas matemáticos (RPM) es un tema que ha sido ampliamente estudiado por diversos autores; para la realización de este estudio se consideran las investigaciones llevadas a cabo por matemáticos y especialistas en Educación Matemática tales como Carrillo, (1995); Pólya, (1979); Silver, (1994); Ellerton, (1986, 2015); Castro, (1991; 2008), entre otros, esta selección se debe a que la RPM es una extensa línea de investigación con diversas corrientes y que aún está por concluir.

Posicionados desde el ámbito escolar se debe tener en cuenta que para la resolución de problemas de matemática intervienen tres dimensiones, citando a Kilpatrick (1978) quien distingue:

- a. El problema, interrogante o cuestión que se plantea.
- b. El alumno(s) (resolutor) a quien se plantea el problema para que lo resuelva.
- c. La situación en que se resuelve el problema (para este contexto corresponde el aula, guiada por el profesor-facilitador).

De aquí derivan la gran mayoría de las corrientes de investigación las cuales se centran en uno o más componentes de esta triada. A su vez Lester (1983) complementa lo anterior indicando categorías o variables para clasificar las líneas prioritarias de las investigaciones en resolución de problemas matemáticos, a saber: a) Factores de la tarea, b) Factores del sujeto, c) Factores del proceso, d) Factores ambientales e) Factores de instrumentación y metodología de la investigación.

Esta información ayuda a enmarcar las áreas de investigación de este estudio, atendiendo a los dos autores antes mencionados, se indaga desde la dimensión del problema y más específicamente se concentra en los factores de la tarea; es decir, sobre aspectos relacionados con la naturaleza de los problemas, dejando de lado las dimensiones relacionadas con los estudiantes (resolutores) y proceso de resolución de la tarea.

Como se aprecia, el origen de la RPM data desde hace bastante tiempo, durante una conferencia ante la Sociedad Suiza de Profesores de Matemática, y su posterior reseña, en la revista *Matemática Elemental* en 1934, George Pólya trata un modelo inicial o versión preliminar del que apareció en 1945, sobre enseñanza para la resolución de problemas (Castro, 2008). Cabe mencionar que esta es la línea de investigación que mayor progreso y desarrollo ha procurado a la Educación Matemática. Dicho método consiste en una serie de fases para ayudar a los estudiantes a enfrentarse a un problema, acompañada cada una de

las fases por un listado de sugerencias heurísticas. Actualmente y con algunas variantes ha formado parte de las últimas propuestas curriculares para matemáticas, en países como Chile y España. A continuación, se presenta un resumen del modelo publicado por Pólya (1945), el cual consta de cuatro fases, al mismo tiempo que el autor sugiere una serie de preguntas y recomendaciones que acompañarían en el desarrollo del proceso que propone:

- a) Comprender el problema: alude a una representación mental para posteriormente integrar esta información con un esquema coherente.
- b) Planificación: el alumno aprende a razonar cuáles son las ideas o procesos lógicos que le llevan a la solución, para ello examina las estrategias generales que puede aplicar y elige las acciones que debe realizar.
- c) Ejecución del plan: se traducen las ideas en términos de operaciones mediante las que se obtiene la solución o las soluciones.
- d) Supervisión: momento en que se evalúan las decisiones tomadas y los resultados del plan realizado, revisando que la solución sea coherente y lógica con lo planteado.

Cabe indicar que aun cuando dicho modelo es altamente valorado, ha derivado en algunos casos en una interpretación algorítmica. Sin embargo, continúan habiendo mejoras de este modelo clásico. A saber, actualmente autores como Guzmán (1991), Callejo (1994), Puig (1996), Carrillo (1996), Santos (2007), Caballero (2013) y Pino (2013) han profundizado y sugerido una serie de heurísticos, que sirven como guía en el proceso de resolver el problema ayudando al resolutor a desarrollar habilidades y actitudes positivas, además de estudiar situaciones de bloqueo o frustración que presentan los estudiantes, las que provocan actitudes negativas; nerviosismo, miedo a lo desconocido, retraimiento, ansiedad, repercutiendo en la forma de abordar los problemas (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015).

Recientemente se ha propuesto un Modelo Integrado de Resolución de Problemas (MIRPM), disponible en *La resolución de problemas en la matemática* (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015) el cual tiene como base el modelo antes expuesto por Pólya (1945), pero que ahora considera de manera integrada aspectos cognitivos y afectivos, proponiendo cinco fases, tal como se sintetiza en la Figura 1.

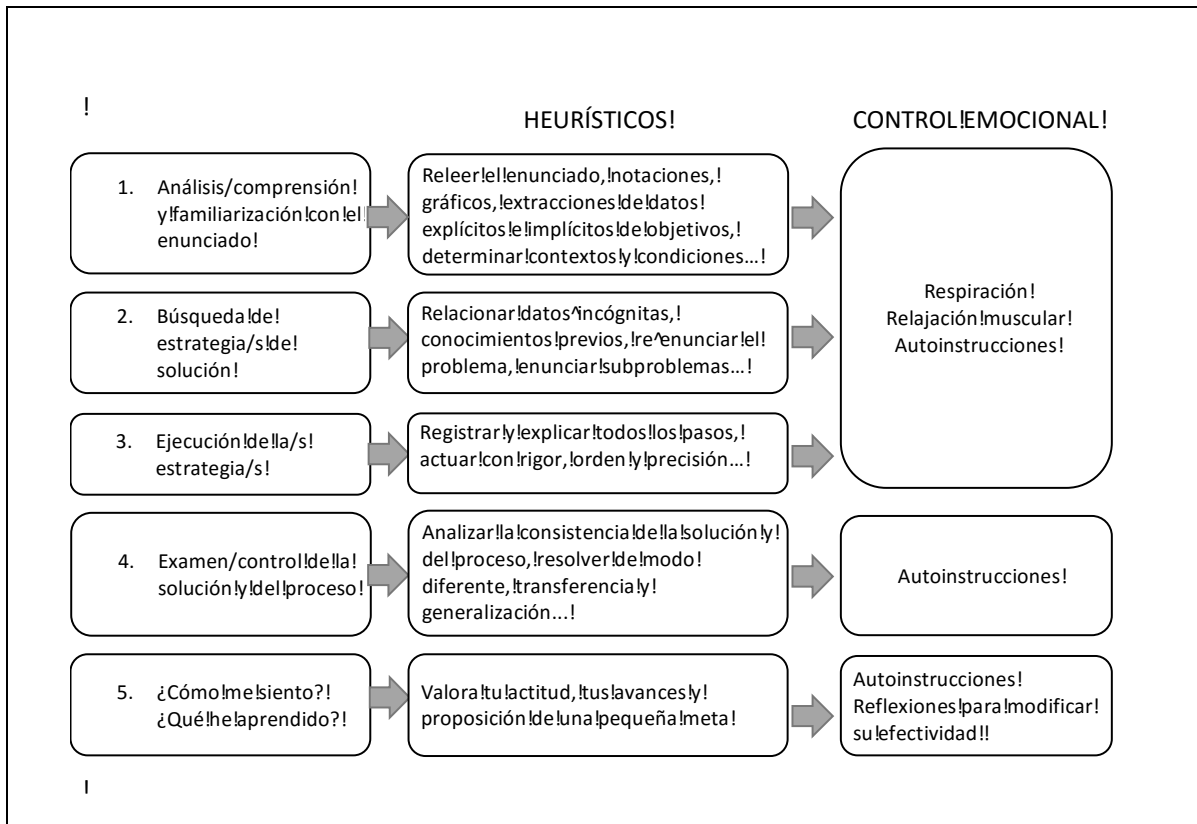


Figura 1. Modelo Integrado de RPM (Caballero, 2011, 2013)

Este modelo busca ayudar a los estudiantes a aprender a resolver problemas a partir de su propio estilo. A continuación, se exponen solo algunos aspectos relevantes de cada fase.

Fase 1. Familiarización con la situación planteada, se propone a los estudiantes poner en práctica técnicas de relajación muscular progresiva (control de respiración, y de modificación cognitiva a través de auto instrucciones). Se orienta al profesorado a “desmontar el error de enseñar a resolver problemas en primaria asociando palabras con operaciones” (p.114).

Fase 2. Diseño de estrategias de solución: Igualmente se enfatiza en las técnicas de relajación para disminuir las respuestas cognitivas, emocionales y fisiológicas negativas. Se propone la búsqueda de estrategias autónomamente; conjeturar, estimar, descomponer el problema y enunciar subproblemas, entre otras.

Fase 3. Ejecución: Se dan orientaciones que favorezcan un orden en el proceso.

Fase 4. Análisis del proceso y de la solución: Volver a recordar los objetivos planteados en la presentación del problema, se busca que el resolutor comprenda y sea capaz de explicar

que ha hecho más allá de una respuesta correcta. Acompañando esta etapa de autoinstrucciones dirigidas a elogiarse.

Fase 5. ¿Cómo me siento? ¿Qué he aprendido?: Evidentemente se apunta a revisar la implicación personal del resolutor con el problema y su proceso. Siendo una instancia en que el estudiante se propone metas relacionadas al autoconcepto.

Actualmente algunos autores concuerdan con que las estrategias para la resolución de problemas dependen tanto del estudiante como del problema, por lo que es demasiado generalizador determinar una o varias estrategias para ser enseñadas a los estudiantes. En cambio, en este modelo se aprecia un sentido de ajuste personal; cada fase permite realizar una reflexión personal, que ayuda a una selección de estrategias pertinentes a cada estudiante, alejándose de ser un modelo algorítmico, constituyéndose desde lo holístico. Se expone este método para ejemplificar el progreso que ha tenido el proceso de resolver problemas.

2.1.2 Aportes de la RPM e Invención de problemas al desarrollo de la competencia matemática

No es hasta la década de los 80 que se comienza a masificar el interés por esta línea de investigación y a proponer la inclusión de la RPM como eje de la enseñanza de la matemática escolar, siendo el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas norteamericano (NCTM, 1989, 2000) quien en su lista de recomendaciones ubica como primer ítem y principal objetivo de la enseñanza de la matemática a la resolución de problemas matemáticos, esta tarea compleja entre otras ventajas, ofrece la posibilidad para organizar la diversidad de niveles existentes en el aula; es un marco ideal para la construcción de aprendizajes significativos y fomentar el gusto por las matemáticas (Carrillo, 1995).

A la fecha se ha incrementado su presencia en los currículos (Castro, 2008) de esta manera la RPM pone de manifiesto la capacidad de análisis, comprensión, razonamiento y aplicación, razón por la que surge como un contenido específico del quehacer matemático (Blanco y Cárdenas, 2013).

Del mismo modo la invención de problemas es considerada como actividad matemática compleja, y junto a la RPM se consideran que desarrollan la competencia matemática. Esta

competencia ha sido definida por numerosos autores con distintos enfoques, en términos generales, se entiende como la capacidad del individuo para identificar variables, relaciones o hipótesis en situaciones de la vida real (distintas situaciones y contextos) y traducirlas a las matemáticas, empleando procedimientos; interpretando los resultados y la formulación y comunicándolos. En efecto, el modelo propuesto por Mogens Niss (2002) citado en *Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática* [...] en el cual introduce ocho competencias específicas relacionadas con la habilidad para preguntar y responder cuestiones en matemática y por medio de las matemáticas, estas son; pensar, modelizar, argumentar matemáticamente junto con resolver e inventar problemas matemáticos (Fernández y Barbarán, 2015, p.16).

Más específicamente las capacidades de identificar, definir y plantear diferentes tipos de problemas matemáticos, junto con resolver diferentes tipos de problemas (teóricos, prácticos, de respuesta abierta y cerrado), ya sean planteados por otros o por uno mismo, son incluidas como actividades que deben iniciarse a edades tempranas, dado que estas capacidades en su conjunto, abarcan el dominio de las habilidades de la disciplina como su componente práctico. Considerando que la competencia matemática no es algo que se enseñe, sino que es un objetivo a largo plazo del proceso de enseñanza y aprendizaje, se requiere activar procesos para que el estudiante use las matemáticas en la resolución de situaciones problemáticas de su quehacer diario (Rico, 2006, citado en Fernández y Barbarán, 2015).

A partir de lo expuesto es posible dimensionar la necesidad de realizar las actividades tanto de resolución como invención de problemas, como parte fundamental para todo aprendizaje matemático. Ante este escenario, Chile también ha considerado para sus orientaciones curriculares establecer la RPM como eje central en la formación matemática. Finalmente, situaciones problemáticas como punto de partida permiten generar y consolidar conocimientos matemáticos (Blanco, Caballero y Cárdenas, 2015).

2.1.3 ¿Qué entendemos por resolución de problemas matemáticos?

Una vez teniendo clara la importancia de trabajar con problemas matemáticos se debe definir en qué consisten. Para intentar dar respuesta a esta pregunta, resulta muy útil comparar entre las definiciones de ejercicio y problema.

Ejercicio: “reconocer o practicar algún procedimiento aritmético o algebraico usuales y repetidos en la enseñanza de las matemáticas” (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015, p.187), implican el uso reiterado de algún algoritmo, en el cual para obtener un resultado basta repetir un mismo procedimiento.

Por su parte, para definir qué es un problema matemático se toma de base la exposición que realizan Ayllón, Castro y Molina (2008), en la cual consideran los aportes de Castro, Puig y Cerdán, este punto es de interés con el fin de tener claros los criterios para clasificar las producciones de los estudiantes de acuerdo a si corresponden o no a un problema matemático, por consiguiente:

“En el contexto escolar se entiende como problema a un enunciado verbal o escrito en el cual la información proporcionada es cuantitativa (datos), además tiene una condición contenida que expresa relaciones entre los datos, y la pregunta se refiere al descubrimiento o determinación de una o varias cantidades o relaciones entre las mismas” (p.226).

Las autoras mencionadas destacan los siguientes componentes de un problema matemático a) proposición, o enunciado oral o escrito, b) datos conocidos, c) intención de averiguar, d) una meta, obtener un resultado, e) un proceso, el modo de actuación para alcanzar el propósito. Estos son los aspectos que se considerarán para clasificar como problema matemático a las producciones que realicen los estudiantes.

Ahora retomando la pregunta inicial ¿qué se entiende por resolución de un problema matemático?, citando las investigaciones recogidas por Blanco, Cárdenas y Caballero (2015) junto con lo expuesto por Cruz (2006) en términos generales se aceptan tres paradigmas diferentes sobre el modo en que se emplea la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas:

- a) Enseñanza para la resolución de problemas: consideración tradicional en que los estudiantes aplican sus conocimientos matemáticos en la resolución de problemas dados, se considera como aplicación de la teoría y se suelen fijar los problemas al final de la introducción de algún concepto o algoritmo, como también al término de capítulos como suele ocurrir en textos escolares. “El fin consiste en que el estudiante pueda ser capaz de aplicar las técnicas memorizadas ante ciertas

situaciones, donde algunas características específicas (estímulo) provocan respuestas específicas (respuesta)” (Cruz, 2006, p.109).

- b) Enseñanza sobre la resolución de problemas: los estudiantes trabajan tanto desde lo cognitivo como afectivo, se concentran en las diferentes fases sobre la resolución de problemas favoreciendo la reflexión y discusión sobre el propio proceso. Bajo este paradigma “los estudiantes no son educados para descubrir los métodos por sí mismos, sino conducidos por el maestro hacia la respuesta correcta (...) la enseñanza, en su algoritmo exposición-ejemplo-ejercicio-problema, enfatiza saber qué y cómo detectando errores y remediándolos, pero pasando por alto el porqué y el para qué” (Cruz, 2006, p. 110).
- c) Enseñanza a través de la resolución de problemas: considera la resolución de problemas como una metodología o como contexto para el aprendizaje, aunque su plasmación en el aula es mucho más escasa, a través de situaciones problemáticas como punto de partida permiten generar y consolidar conocimientos matemáticos favoreciendo la construcción de dicho conocimiento. En palabras de Cruz, 2006; “ante una situación problemática el estudiante debe, por medio de la abstracción, simplificar la información y determinar lo esencial (lo dado y lo buscado) (...) a continuación procede a matematizar la información, traduciéndola al lenguaje simbólico, para luego obtener el modelo matemático del problema, por medio de operaciones, transformaciones, usando técnicas y teorías, llega a la solución, la cual debe ser analizada y comprendida con el objeto de interpretarla” (p.110).

Se comprende que este último paradigma no es aplicable al cualquier momento del proceso educativo, pero su naturaleza la hace apropiada para la enseñanza de las ciencias exactas.

La última distinción nos refiere a situaciones realmente complejas, capaces de potenciar el desarrollo de la competencia matemática, además de proporcionar formas de intervención que preparen a los estudiantes para enfrentar los desafíos de la ciencia, la técnica y la vida cotidiana, apoyando esa idea de preparar a los estudiantes a través de la resolución de problemas para enfrentarse al mundo globalizado. La propuesta realmente es ardua teniendo en cuenta que, en palabras de Cruz (2006), situaciones así son difíciles de encontrar en la práctica educativa. Sin ir más lejos en la definición realizada por el MINEDUC se entiende la resolución de problemas: “[...] cuando el estudiante logra

solucionar una situación problemática dada, contextualizada o no, sin que se le haya indicado un procedimiento a seguir” (Bases curriculares, 2012, p. 107). En ella se aprecia la visión de considerar la *Enseñanza sobre la resolución de problemas* o como eje del aprendizaje matemático. Por último, con el fin de exponer una visión completa sobre este punto, realmente no existe una única definición y/o un consenso masificado sobre qué se entiende por resolución de problemas.

2.1.4 Tipos de problemas matemáticos

Son numerosos los autores que han intentado realizar una clasificación para los problemas matemáticos, de acuerdo al resumen llevado a cabo por Pino (2015) en el capítulo *XII Tipos de problemas de matemáticas* presente en (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015) se atienden a distintas categorías; problemas “para resolver” y “para demostrar”; “bien estructurados” (problemas presentes en textos escolares) y “mal estructurados” (similares a los problemas que encontramos en la vida diaria); aplicados y puros a través del contexto.

Por otra parte, y con un enfoque más curricular surgen las clasificaciones de problemas “rutinarios y “no rutinarios”. Los autores Verschaffel y De Corte recogiendo algunas clasificaciones que habían hasta ese momento, indican que el término *rutinario* se utiliza para referirse a situaciones propias de los libros de textos escolares y a situaciones concretas, con los datos necesarios para resolver el problema, las operaciones son de la aritmética, la solución generalmente es única, el proceso de seleccionar la operación atiende a reglas, y el contenido del problema se relaciona directamente con lo aprendido en la escuela en el momento que se plantea el problema.

Para el caso del término *no rutinario* son varias las situaciones que comprende; las reales (compras, viajes, etc.) en que la información no viene dada o prefabricada y las soluciones no presentan, en principio, una relación directa con operaciones simbólicas, sino que hay que relacionar cosas conocidas; igualmente, dada una situación de base formular o plantear un problema (NCTM, 1991); a partir de ciertas condiciones con datos, modificar y plantear un problema (*reformular un problema*) (NCTM, 1991); por último, situaciones en que el modelo matemático o las soluciones no son obvias y están condicionadas por el contexto realista de la tarea.

Estas son sólo algunas de las categorías que matemáticos han establecido para diferenciar los problemas que de cierta manera engloban algunos de los otros términos que han sido descritos. En otras palabras y de acuerdo al análisis que realiza Noda (2000), al respecto, indica que “en ocasiones se utiliza un mismo término para referirse a situaciones diferentes y, en otras ocasiones, una misma situación es designada con diferentes términos” (p. 25).

En consecuencia, desde la resolución de problemas surgen variadas distinciones o clasificaciones para los tipos de problemas matemáticos por lo que dependerá del autor y año la clasificación más adecuada, en este marco de clasificaciones desde la RP, comienza a surgir la categoría *problema planteado* para referirse a la creación de un nuevo problema desde una situación o experiencia. Más adelante comienza a configurarse esta nueva línea de investigación llamada invención de problemas o *Problem Posing*.

Tras la revisión llevada a cabo por Noda (2000) la invención de problemas actualmente se incluye dentro de la clasificación de “problemas abiertos o no rutinarios”, pero ¿a qué tipos de problemas hacen referencia en concreto?, esto fue discutido en la PME (1993) acordando lo siguiente:

“ [...]durante el International Conference for the Psychology of Mathematics Education celebrado en Japón (PME 17, 1993) se buscaba dar respuesta a la pregunta ¿cuáles son los problemas abiertos?, finalmente se plantearon varios tipos de problemas: Problemas de investigación, aquellos que hay que replantearlos, situaciones de la vida real, proyectos, sucesiones de problemas, problemas sin pregunta, y variaciones de problema, aludiendo al Método *What if not*, estrategia descrita por Brown y Walter (1990) que insta a los estudiantes a cambiar las condiciones originales del problema, para crear nuevos problemas” (p.37).

Finalmente, el propósito de este apartado es exhibir un extracto de las numerosas clasificaciones que existen para los tipos de problemas, y que en ocasiones atienden a distintos o iguales criterios, estos pueden ser *rutinarios o no rutinarios, bien o mal definidos, mal estructurados o bien estructurados*, entre otros. Al mismo tiempo se busca mostrar que la invención de problemas pertenece a la clasificación de problemas abiertos o no rutinarios.

2.1.5 Resultados obtenidos en resolución de problemas

Como se ha venido mostrando la resolución e invención de problemas, ambas líneas de investigación ampliamente estudiadas, cuentan con bastante respaldo acerca de los beneficios que reportan al ser incluidas durante el desarrollo de la actividad matemática en el aula, aunque son poco empleadas por profesores para la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, así dan cuenta los resultados obtenidos en diversas pruebas nacionales e internacionales.

Como se aprecia en el informe Aportes para la Enseñanza de la Matemática¹ (OREALC/UNESCO, 2016) el cual tiene dentro de sus propósitos orientar a docentes y directivos, en cuanto a aspectos relevantes sobre la resolución de problemas, pone de manifiesto, tras un análisis curricular de distintos países, la importancia de la RP en el enfoque general en la enseñanza de la matemática a nivel mundial. Específicamente se detalla que “la RPM no debe ser solo una herramienta de práctica de procedimientos, sino que debe transformarse en el modo central de relacionar el trabajo matemático con la vida cotidiana [...] se deben contextualizar los contenidos mediante problemas reales” (p.27).

Sin embargo, los resultados obtenidos por los estudiantes de América Latina y el Caribe que componen el TERCE indican que para los ítems asociados a la habilidad de resolución de problemas complejos solo un 35% logra desenvolverse correctamente.

Específicamente, Chile revela que un 48% de sus estudiantes de Sexto Año Básico respondió correctamente los ítems de Resolución de problemas complejos, y un 54% lo hizo para resolución de problemas simples (p.25). Mientras tanto, de acuerdo a los resultados obtenidos en PISA el año 2012 en los países de la OCDE, el 11,4% de los alumnos de 15 años obtienen un rendimiento sobresaliente en la resolución de problemas (nivel 5 o 6) “es decir que son capaces de estudiar sistemáticamente las circunstancias complejas que rodean a un problema, idear soluciones en varios pasos que tengan en cuenta los impedimentos y puedan adaptar sus planes en función de los resultados obtenidos” (p. 30).

¹ Informe elaborado por el Centro de Medición, MIDE UC, que presenta los principales resultados del Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo, TERCE, por encargo de la Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe, y publicado en 2016 por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OREALC/UNESCO,2016).

Por otra parte, en cuanto al conocimiento de esta habilidad que poseen los profesores noveles la situación no es muy diferente, quienes llevan entre uno a tres años ejerciendo igualmente presentan resultados desalentadores. En la investigación llevada a cabo por Felmer *et al.* (2014) sobre resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente, se indica que el concepto de problema manejado por los profesores, en algunos aspectos se aleja de la definición presente en las Bases Curriculares. Asimismo, frente a la resolución de problemas con múltiples soluciones los docentes presentan limitaciones en el uso de heurísticas, y además creen resolver un problema al momento de hallar una solución, sin plantearse encontrarlas todas. Además, en el estudio mencionado se observó que durante algunas prácticas pedagógicas los docentes ofrecen pocas oportunidades para que los estudiantes tomen el rol de resolutor de problemas, dando prioridad a hacer uso de ejercicios y no a problemas, evitando que enfrenten la matemática de manera autónoma. Como se aprecia, los resultados obtenidos por los estudiantes, en cuanto a la capacidad de resolución de problemas, se condice con el conocimiento y prácticas que tienen los profesores sobre esta materia.

2.2 INVENCIÓN DE PROBLEMAS

Este apartado pretende exponer los principales beneficios de incorporar esta actividad al quehacer matemático en el aula. Como se ha señalado, la investigación en Educación Matemática considera que el trabajo con problemas es imprescindible para que el individuo construya de manera significativa el conocimiento matemático. Así mismo tal y como se ha venido tratando, la invención de problemas (IP) surge como línea de investigación desde la resolución de problemas y tras numerosas investigaciones en la materia es aceptado el vínculo que tienen la resolución de problemas y la invención de problemas como actividades en que una potencia a la otra. Al respecto, la práctica que poseen los alumnos en materias de RP constituye un elemento que influye fuertemente en la relación establecida entre la invención y la resolución de problemas (Ayllón, Gómez y Ballesta, 2016).

Por otra parte, Kilpatrick (1987) indica que la formulación de problemas es una componente importante de la resolución y que ha recibido poca atención explícita en el currículo de matemáticas. Autores reconocidos como Pólya, Freudenthal, Silver, entre otros, advierten que cuando un sujeto inventa un problema está alcanzando niveles elevados

de razonamiento que hacen posible la construcción del conocimiento matemático. Además, la actividad de inventar problemas resulta una manera eficiente de aprender matemáticas, al mismo tiempo que el sujeto realiza una actividad intelectual y de demanda cognitiva alcanzando niveles de reflexión complejos. Los autores Christou, Mousiulides, Pittalis y Pitta-Pantazi (2005) establecen algunos procesos cognitivos que necesita el *inventor* –semejando al *resolutor* en el ámbito de la RPM– identificando: editar, seleccionar, comprender y organizar información y traducirla de una forma de representación a otra, estableciendo relaciones entre distintos conceptos matemáticos.

2.2.1 Aspectos positivos de la invención de problemas

En esta sección se exponen los principales aspectos positivos que conlleva incluir la invención de problemas en la Educación Matemática. Ayllón, Gómez y Ballesta (2016) realizan una extensa recopilación y síntesis de renombrados autores como; Burçin (2005), Ellerton (1986), English (1997) en su artículo *Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos*. En el cual indican que el principal factor es que esta tarea obliga a crear conexiones entre distintos conocimientos que poseen separadamente los estudiantes, por tanto, aumenta el conocimiento matemático. A su vez el inventor debe: leer, examinar datos y pensar críticamente, discutir ideas, estrategias y soluciones, con frecuencia deberá generalizar, y será necesario que escriba con claridad, exactitud y organización. Asimismo, Ellerton (2015) señala que la IP resulta un componente integral del currículo de la matemática, esta autora introduce un nuevo término “Pedagogy for Problem Posing” (Pedagogía para la invención de problemas) el cual describe la IP como un componente integral de modelamiento matemático y aboga por que se integre a las actividades rutinarias de matemáticas en el aula, en dónde el profesor asume el rol de transformar la clase en un ambiente constructivo y productivo de aprendizaje a través de la invención de problemas (p.526).

En resumen, diversos autores describen los principales propósitos y beneficios que trae la IP y que se deben tener en cuenta en la introducción de esta actividad al aula, los cuáles son recopilados por los autores Espinoza, Lupiañez y Segovia (2013), a saber:

1. IP como características de la actividad creativa o talento excepcional: tras estudios realizados entre otros, por Silver para la creatividad y Krutetskii frente al talento

excepcional, ha quedado de manifiesto la relación positiva entre estos dos ámbitos y la IP.

2. IP como característica de una enseñanza orientada a la responsabilidad en el aprendizaje: principalmente porque al tener la oportunidad de crear y explorar sus propios problemas los estudiantes se involucran más en su propio aprendizaje, desarrollando curiosidad, compromiso y entusiasmo durante la clase.
3. IP como una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes: resulta un medio para conocer las habilidades de los estudiantes, como también la comprensión de los conceptos matemáticos aprendidos, al mismo tiempo que permite al profesor observar patrones en el aprendizaje y el pensamiento matemático de los estudiantes.
4. IP como herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos: al respecto se señala que al introducir la IP como una actividad más en el proceso de enseñanza entonces podría incorporarse de alguna forma dentro de la evaluación.
5. IP como medio para mejorar la disposición y las actitudes hacia las matemáticas: ya sea aminorando la ansiedad, motivando incluso a quienes tienen poco conocimiento sobre la asignatura, además crea una atmósfera optimista, estimulando a los estudiantes a concentrarse en actividades de pensamiento crítico, proponiendo y compartiendo con los compañeros de la clase.
6. IP como medio para mejorar la capacidad de resolución de problemas: esto ya que existe una interdependencia entre ambas tareas matemáticas, además se producen problemas de estructuras más complejas por quienes son buenos resolviendo problemas, se ha descrito que resolviendo los propios problemas creados se pueden comprobar los propios errores, conocer las estrategias y dificultades volviendo a los estudiantes mejores resolutores.

2.2.2 Situaciones de invención de problemas en el aula

Considerando los diversos usos ya comentados sobre la invención de problemas en el aula, y los múltiples beneficios que presta en distintos ámbitos, además se han descrito situaciones o contextos en los cuáles es posible trabajar la IP, como premisas generales, a través de las actividades introducidas por el profesor, los estudiantes requieren de sentirse libres para compartir borradores de sus problemas, con sus pares y profesor, reconociendo

que probablemente los problemas son imperfectos. El profesor debe establecer una atmósfera en la cual los estudiantes aprendan a realizar y recibir comentarios sobre los problemas creados. No debería diferenciarse el tiempo para la actividad de inventar problemas del tiempo para la matemática, tampoco debería ser visto o impuesto como un tópico más del currículo. Al mismo tiempo es necesario que el profesor se sienta cómodo frente a la invención de problemas, para lograr involucrar a los estudiantes en esta actividad (para ello es fundamental fortalecer esta habilidad desde la formación docente).

Uno de los métodos ampliamente conocidos es el propuesto por Brown y Walter (1990) *What if not*, basada en la idea de modificar los atributos de un problema dado para realizar nuevos planteamientos, alentando a los estudiantes a conseguirlo a través de tres niveles:

1. Re - examinar los datos del problema inicial, realizando una lista de los datos.
2. “What if not” los estudiantes sugieren alternativas a los datos iniciales.
3. Nuevos problemas, los estudiantes plantean nuevos problemas inspirados por las alternativas creadas por ellos.

Por su parte, Stoyanova y Ellerton (1996) citadas en Fernández y Barbarán, (2015) clasifican tres categorías de experiencia o situaciones en las que se promueve la actividad de inventar problemas:

Situaciones libres: los estudiantes deben generar un problema a partir de una situación dada, artificial o natural, no tienen restricción para formular sus problemas. Por ejemplo, inventar un problema para una olimpiada matemática.

Situaciones semiestructuradas: se les proporciona a los estudiantes una situación abierta y se les pide que exploren su estructura, y que la complete usando sus conocimientos, destrezas, conceptos y relaciones de sus experiencias matemáticas previas. Por ejemplo, ajustarse a cálculos dados, usar un concepto matemático u operación dada.

Situaciones estructuradas: cuando la actividad se basa en un problema específico, reformulando o cambiando algunas condiciones.

Mientras que, con un enfoque práctico y guiado por el profesor, Santos (2001) presentó cuatro estrategias que ayudan a iniciar a los estudiantes en la invención de problemas.

1. Estrategia espontánea, a partir de una situación significativa para los niños, se inicia un debate, para desarrollar un proceso de problematización.

2. Estrategia de tema generativo, los estudiantes eligen una temática y a partir de ella investigan datos relacionados con la misma.
3. Estrategia de incentivo, el profesor elige un tema de contenido matemático para el debate, y se motiva a que los estudiantes formulen preguntas relacionadas.
4. Estrategia de analogía, a partir de un problema conocido estudiantes presentan semejantes.

Más recientemente Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi y Sriraman (2005) proponen un modelo compuesto de cuatro pasos que deben realizar los estudiantes, dependiendo de la situación o actividad de inventar problemas que se les haya planteado. En la Tabla 1 se presenta un resumen de la actividad y el proceso a seguir que vincula el quehacer del estudiante frente a una situación específica de inventar problemas.

Tabla 1.

Taxonomía para el proceso de inventar problemas.

Actividad	Proceso
Edición de información	Situaciones libres: plantear problemas sin ninguna restricción
Selección de información cuantitativa	Plantear preguntas o problemas que se ajusten a respuestas dadas
Comprender información cuantitativa	Plantear problemas a partir de cálculos matemáticos dados.
Traducción o traslación de información cuantitativa	Plantear problemas apropiados a las preguntas de los gráficos, diagramas o cuadros.

Finalmente se muestran algunas situaciones con una visión más didáctica, bajo las que se puede solicitar a los estudiantes inventar problemas. Esta organización es recogida de los planteamientos de los autores Blanco, Cárdenas y Caballero (2015), quienes en su libro *La RPM en Primaria*, también entrega orientaciones para integrar la invención de problemas en el aula como otra forma de trabajar la resolución de problemas matemáticos.

1. Inventar o formular problemas a partir de otros o que impliquen conceptos y/o procesos matemáticos: bajo esta situación los estudiantes tienen la posibilidad de entender y reflexionar sobre algunas relaciones entre objetos matemáticos, que pasan desapercibidos cuando solo resuelven un problema. Para este caso se entregan a los estudiantes datos numéricos concretos (plantear un problema con la operación

24×50), conceptos (plantear un problema que implique el concepto de doble), procedimientos (plantear un problema que implique la suma de fracciones).

2. A partir de una situación concreta:
 - a. Preguntar por el significado de la operación realizada: Ej.: al comprobar que 25 es el cuadrado de 5, ¿qué problema se puede generar para describir la relación entre esos números? (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015, p.176).
 - b. Preguntar por la operación adecuada a la acción: Ej.: “si supieras lo que vale un lápiz. ¿Cómo calcularías lo que valen varios?” (p.176).
3. Plantear supuestos a partir de una fórmula o expresión matemática: “la diagonal de un cuadrado mide 8 cm. ¿qué podemos averiguar a partir de este dato?”
4. Redactar enunciados de problemas a partir de determinadas preguntas o cuestiones: ¿Cuál es el volumen del cono?, esto implica un análisis previo y la interiorización de las variables que intervienen en la fórmula para el volumen del cono.
5. Formular problemas a partir de datos explícitos: una sucesión de datos, un dibujo, un gráfico.

En general, al hablar de invención de problemas son muy variadas las situaciones que se pueden emplear como punto de partida. El inventar problemas tiene diversos propósitos, no debe entenderse como acto en que solo se redacte un enunciado que incluya las variables que se han indicado, como se aprecia de lo expuesto por los autores dichas situaciones deben emplearse para profundizar un concepto, buscar relaciones entre cantidades, analizar fórmulas, entender los contextos de ciertos procedimientos, propiciar el intercambio de problemas entre los pares y con el profesor, debe incluir espacios de retroalimentación, por tanto es una actividad compleja que demanda profundizar en los contenidos matemáticos, alejándose de las clásicas reproducciones de los algoritmos. Así “el alumno podrá observar que no es más fácil inventar problemas que resolverlos” (Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015, p.175).

Para el caso específico de este estudio se considerará la *situación semi estructurada* propuesta por Stoyanova (1998), similar a la situación indicada por los autores Blanco, Cárdenas y Caballero (2015), de manera que la actividad consistirá en que los estudiantes inventen problemas a partir de información de base (imágenes que aluden a diversos contextos) con la única restricción que deben ser problemas multiplicativos. En este caso la

IP será utilizada como herramienta que permita profundizar sobre los tipos de problemas de multiplicación que plantean los estudiantes y las conexiones que hacen con otros contenidos al inventar problemas.

2.2.3 Investigaciones sobre la valoración de los problemas inventados

En el siguiente apartado se busca dar cuenta de las principales clasificaciones que se han establecido, para poder realizar valoraciones sobre las producciones de los problemas inventados por los estudiantes. Cabe aclarar que existe una diferenciación entre el estudio que se realiza sobre el enunciado en sí mismo, con la demanda cognitiva que implica al resolutor un determinado enunciado. El propósito del presente trabajo va orientado al análisis del enunciado en sí mismo, para ello se muestra el abanico de variables con las cuales se estudian los enunciados creados.

El siguiente compendio se desprende de los trabajos realizados por Espinoza, Lupiañez y Segovia (2015) en *Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas*, y por el trabajo presentado por los autores Ayllón, Gallego y Gómez (2016) en *La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas*, se resumen las categorías de análisis que diversos autores han empleado para valorar entre otras cosas la complejidad matemática de las producciones, coherencia del enunciado, estructura operatoria involucrada, organizándose a modo sintético según la estructura sintáctica, estructura semántica del problema y estructura matemática.

Estructura sintáctica: Puig y Cerdán (1988) destacan cualquier característica del problema que tiene que ver con el orden, las relaciones de las palabras y símbolos presentes en el enunciado. Tales como longitud y coherencia del enunciado, complejidad gramatical, presentación de los datos, tipo de proposición interrogativa; la cual se relaciona con la pregunta del problema. Esta variable se asocia a la complejidad lingüística del problema inventado, de modo que la presencia de proposiciones de asignación, relacionales o condicionales son indicadores de la complejidad del enunciado (Fernández y Barbarán, 2015).

Estructura semántica: Considera el significado de los conceptos y relaciones implicadas en el problema, para ello a partir de su estructura operatoria (aditiva o multiplicativa), los

problemas se clasifican de acuerdo a su componente semántica: cambio, combinación, comparación e igualación para los problemas aditivos, e isomorfismo de medidas, comparación y producto de medidas para los problemas multiplicativos. Vergnaud (1983; 1988) es pionero en organizar la estructura multiplicativa, pero esta clasificación original ha sufrido una serie de modificaciones tanto por el propio autor como por otros, surgiendo variadas clasificaciones. En este trabajo interesa estudiar la estructura multiplicativa según su estructura semántica, ya que se considera por los investigadores como una variable para determinar la complejidad de un problema matemático.

Estructura matemática: En esta categoría se incluyen variables según la operatoria, tales como la cantidad de pasos y operaciones necesarias para resolver el problema, significados de los números, también se incluyen el análisis del tipo de números empleados, dominio de las operaciones y las dificultades observadas en su realización, utilización de los datos numéricos ofrecidos de base, validez del procedimiento de resolución de problemas y la coherencia de las operaciones con la estructura del problema. En general, se considera como problemas más complejos aquellos que implican relación entre dos o más cantidades, igualmente resultan más complejos los problemas que implican relaciones multiplicativas entre sus cantidades que solo aquellos con relaciones aditivas.

Complementando los criterios de análisis mencionados, existe otra clasificación para el análisis de problemas matemáticos ampliamente reconocida y propuesta por el programa PISA (OCDE 2006, p.12), con la que se busca medir la competencia matemática que deben tener los resolutores a través de diversos problemas y tareas matemáticas. Para ello, se establecen categorías de valoración, ya sea para medir los procesos que el estudiante debe realizar o para clasificar las situaciones o contextos en que se plantean dichos problemas matemáticos, esto último se relaciona directamente con el propósito del trabajo, distinguiéndose tres niveles de complejidad progresiva:

- a) Reproducción: Se trabaja con operaciones comunes, cálculos simples y problemas propios del entorno inmediato y la rutina cotidiana. En términos prácticos se considera como problemas multiplicativos de reproducción a aquellos en que se tiene la operación $a \times b = c$, donde la incógnita varía de posición entre los factores o el resultado, resolviéndose la operación de forma inmediata y en un paso.

- b) Conexión: Involucran ideas y procedimientos matemáticos para la solución de problemas que ya no pueden definirse como ordinarios pero que aún incluyen escenarios familiares. En términos prácticos en este trabajo, los problemas multiplicativos de conexión serán aquellos que se relacionan con contenidos matemáticos de niveles iniciales y superiores; es decir, casos en que se establecen relaciones intramatemática al abordar problemas de más de una etapa, implicando mayor dificultad por generar conexiones entre dos o más contenidos matemáticos.
- c) Reflexión: Implica la solución de problemas complejos y el desarrollo de una aproximación matemática original. Para ello los estudiantes deben matematizar o conceptualizar las situaciones.

Por otra parte, y como ya ha sido comentando, en el marco de una matemática educativa funcional los problemas enunciados deben estar situados en diversos contextos vinculados con la vida real. PISA presenta esta clasificación la cual será considerada como criterio de análisis para las producciones que realizan los estudiantes. Esta clasificación igualmente se vincula con la competencia matemática y expone una complejidad matemática progresiva.

- a) Personal: relacionada con el contexto inmediato de los alumnos y sus actividades diarias (familia, amigos, entre otros).
- b) Educativa o laboral: relacionada con la escuela y sus distintos elementos; aula, asignaturas, estudiantes, profesores, etc. Para el caso laboral se incluyen los diversos tipos de trabajos, alusión a empresas, herramientas y/o maquinarias, situaciones laborales, por mencionar algunos.
- c) Pública: relacionada con la comunidad, considera situaciones que involucran a la sociedad en su conjunto; supermercado, centro comercial, centros hospitalarios, reuniones sociales, etc.
- d) Científica: implica el análisis de procesos tecnológicos o situaciones específicamente matemáticas.

En resumen, se destaca que las categorías de análisis presentadas no son limitantes; es decir, los investigadores seleccionan los elementos a estudiar en concordancia al propósito del estudio, por lo que es frecuente ver que los criterios para el análisis del enunciado corresponden indistintamente a cualquiera de las tres categorías mencionadas. De igual manera, en este estudio se seleccionan solo algunos de los criterios indicados,

principalmente aquellos que permiten profundizar en la capacidad del estudiante para inventar problemas matemáticos multiplicativos, como la complejidad matemática del enunciado creado a través de lo siguiente:

- Coherencia del enunciado, si la situación es un problema matemático y multiplicativo simultáneamente, tipos de problemas multiplicativos de acuerdo a su componente semántica, operaciones necesarias para resolver el problema, niveles de complejidad matemática y tipos de contextos, además de estudiar de qué forma el estudiante resuelve su problema.

2.3 MULTIPLICACIÓN

De acuerdo al propósito general del estudio, de caracterizar las producciones enunciadas por estudiantes de Sexto Año Básico a través de la invención de problemas matemáticos multiplicativos, se vuelve necesario identificar y describir los tipos de tareas multiplicativas que se exponen en los enunciados creados, para ello se presentan algunos antecedentes sobre este concepto matemático, abordándolo desde la matemática escolar.

La multiplicación corresponde a una operación de la forma $a \times b = c$ que cumple con ciertas propiedades, así mismo se describe la división como su operación inversa la que se representa formalmente como $c \div b = a$, o $c \div a = b$, e igualmente cumple con ciertas propiedades. Profundizando más en el concepto, Isoda y Olfos (2009) explican el modelo multiplicativo haciendo eco de Freudenthal (1983) quien indicaba “la multiplicación sirve para hallar un número llamado producto que sea respecto del multiplicando lo que el multiplicador es respecto de la unidad” (p.45), distinguiéndola de situaciones aditivas. Por cuanto la multiplicación implica interacción; un número en función de otro, además, esta modela situaciones de proporcionalidad, áreas y combinatoria entre otras.

2.3.1 Significados de la multiplicación

El aprendizaje de la multiplicación y la división se compone de dos aspectos fundamentales: el significado de las operaciones y el dominio del cálculo. Para comprender el significado de la multiplicación, es necesario reconocer las distintas situaciones o fenómenos en que se aplica dicha operación. De esta manera los autores Castro y Ruíz

(2011) detallan dos situaciones de la multiplicación que se deben enfatizar en el sistema escolar para construir el significado matemático de este concepto:

- a) Suma repetida o reiterada: Es el significado más extendido e incluido en los textos escolares, propuesta por Harel y Confrey (1994) citados por Isoda y Olfos (2009), quienes recomiendan “construir la multiplicación partiendo de la fragmentación, formación de grupos y la suma repetida” (p.48). Profundizando sobre esta línea los autores Castro y Ruiz (2011) indican que de la suma como operación aritmética básica se pueden definir otras operaciones, y por ello representa uno de los significados más elementales de la multiplicación, su uso se justifica como un principio de economía que simplifica el expresar una unidad repetida varias veces, la unidad puede ser el cardinal de un conjunto o una medida.
- b) Producto cartesiano: Sin acudir a la operación de adición, la multiplicación puede definirse como una nueva operación, desde este punto de vista la multiplicación es una operación binaria simétrica en la que ambos factores desempeñan el mismo rol, así a partir de dos conjuntos distintos se obtienen todos los pares combinados.
 - Matriz y Área de un rectángulo: Ambos modelos aluden al mismo significado de producto cartesiano, y muestran el carácter simétrico de la multiplicación, en el modelo de matriz el producto de la multiplicación está representado por el número de filas y columnas (factores) siendo el producto el número total de objetos, semejante a la base y la altura de un rectángulo (factores) así el producto corresponde a la medida de superficie del rectángulo.

Esta dualidad de significados que conforman el concepto de multiplicación, se pone de manifiesto a través de las distintas situaciones en las que se modela dicho concepto, a su vez indican la comprensión que tiene un estudiante sobre la multiplicación, en la medida que es capaz de reconocer las diversas situaciones multiplicativas –sin dejar de lado el cálculo– se asume que ha adquirido de manera integral el concepto. Dichas situaciones han sido clasificadas en lo que se conoce como *tipos de problemas multiplicativos*.

Situados desde esta perspectiva escolar se describen términos, procedimientos de enseñanza y tipos de problemas que incluyen las operaciones de multiplicación y división para su

resolución. Así de acuerdo a Orozco (1996) el estudio de la estructura multiplicativa se aborda al menos desde cuatro puntos diferenciados:

- a) Operación mental;
- b) Tabla de multiplicar;
- c) Desde la perspectiva de los algoritmos; y,
- d) Desde el enfoque de la resolución de problemas.

En orden de complejidad, cada uno incluye al anterior, así el enfoque de resolución de problemas genera demandas complejas en los estudiantes, a las que no siempre pueden responder aun sabiendo el estudiante las tablas de multiplicar y el manejo de los algoritmos.

De acuerdo a esta autora, respecto a los algoritmos para multiplicar, “tradicionalmente se entiende como la aplicación de las cuatro operaciones básicas a partir del adiestramiento, la práctica y la ejercitación para la solución de multiplicaciones escritas” (p.8), Pero actualmente se apuesta por una conexión entre la comprensión del algoritmo y su utilización como herramienta de solución de problemas, apostando a que “sea considerado como un instrumento o herramienta para la resolución de problemas matemáticos, que reduce el esfuerzo mental y contribuye indirectamente al desarrollo conceptual, por cuanto un algoritmo automatizado facilita la comprensión de conceptos más complejos” (p. 11).

Como se aprecia, surgen alcances en la enseñanza de la multiplicación, principalmente según el empleo que se da al algoritmo y además por la introducción de la suma repetida para la enseñanza inicial de la multiplicación, esto último podría llegar a significar un conflicto cognitivo en la medida que el estudiante no supere la etapa inicial de pensar la multiplicación de manera aditiva. Es más, al finalizar la educación básica muchos estudiantes no utilizan la multiplicación y emplean la suma reiterada para resolver problemas de tipo multiplicativo; aseverándose que “la ausencia de la operación multiplicativa en los procedimientos que los estudiantes utilizan para resolver problemas es uno de los grandes causantes del fracaso en primaria” (Orozco, 1996, p.1). Por último, se reconoce que en el origen de la operación multiplicativa está la operación aditiva, sin embargo, algunos estudiantes resuelven multiplicaciones solo empleando la suma reiterada, al respecto esta deficiencia “tiene efectos muy difíciles de superar en la construcción de la división, en el manejo de las medidas de superficie y volumen y en la construcción de los racionales” (Orozco, 1996, p. 2).

2.3.2 Clasificación de los problemas de estructura multiplicativa

Con el propósito de estudiar el concepto de multiplicación que manejan los estudiantes, se clasifican los enunciados de acuerdo al tipo de problema multiplicativo, lo cual implica identificar a qué situación multiplicativa se alude. Esta conceptualización ha sido ampliamente desarrollada por Gérard Vergnaud, quien incluye los problemas de tipo multiplicativos como parte del campo de la estructura multiplicativa, planteando que el conjunto de conceptos, procedimientos y representaciones estrechamente interconectados conforman, lo que él denominó Campo conceptual, concepto complejo, que en un intento por simplificarlo es definido como “un conjunto de situaciones, así el campo conceptual de las estructuras multiplicativas lo constituyen el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones” (p. 8). Cabe hacer notar que el concepto de situación se relaciona con el de tarea y no de “situación didáctica”. Además, un concepto adquiere significancia o sentido para el niño a través de situaciones y problemas (Vergnaud, 1990).

Como ha quedado de manifiesto los problemas que emplean operaciones de multiplicar y dividir tiene la misma estructura de base; la estructura multiplicativa. Vergnaud los clasifica en problemas simples que se sitúan en tres estructuras principales a) isomorfismo de medidas, b) producto de medidas y c) comparación, posteriormente nombra una cuarta; proporción múltiple, referida a problemas de proporcionalidad. Es necesario subrayar que para los problemas de estructura multiplicativa no existe una clara distinción universalmente aceptada sobre su estructura semántica, a diferencia de la estructura aditiva, existiendo diversas clasificaciones que igualmente mantienen concordancia entre ellas.

Al respecto, los autores Castro y Ruiz (2011) en el libro *Matemática para maestros de Educación Primaria* proponen una clasificación para problemas de estructura multiplicativa; es decir, problemas que se resuelven con las operaciones de multiplicación y/o división. Esta clasificación general se sitúa desde una perspectiva lingüística para buscar las relaciones semánticas entre las proposiciones presentes en el enunciado de un problema, en otras palabras, esta clasificación de acuerdo a la situación representada en el problema, relaciona la operación aritmética con una situación cotidiana que se desarrolla en tiempo y lugar determinados, esta referencia a la situación representada en el enunciado le

otorga significado a las operaciones implicadas. Por lo tanto, es posible formular problemas usando las mismas cantidades y algoritmo, pero que representan situaciones diferentes.

El propósito de la siguiente clasificación es identificar las situaciones que están siendo representadas en el enunciado y ha sido seleccionada por cuanto resulta más completa y detallada, en ella se incluyen dos grandes categorías principales: problemas de una etapa y problemas de más de una etapa o mixtos.

2.3.2.1 Problemas de una etapa

Estos problemas se resuelven con una sola operación, ya sea multiplicación o división. Están implicadas tres cantidades, dos de ellas aparecen explícitamente en el enunciado y se pide hallar la tercera para completar la relación, pudiendo estar la incógnita en alguno de los factores o en el resultado. A continuación, se exponen los cuatro tipos de problemas multiplicativos pertenecientes a esta clase.

1. *Problemas de proporcionalidad simple*: Existe una proporción simple y directa entre dos espacios de medida o dos magnitudes diferentes, se incluyen los problemas de regla de tres, aunque estos últimos implican mayor complejidad. Se describen tres tipos de problemas según la posición de la incógnita.

- **Multiplicación**: Una caja de materiales contiene 3 estuches para guardar lápices. Cada estuche contiene 12 lápices ¿Cuántos lápices contiene la caja de materiales en total? ($a \times b = ?$)
- **División partitiva**: Una caja de materiales contiene 36 lápices, repartidos por igual en 4 estuches para guardar lápices. ¿cuántos lápices contiene cada estuche? ($a \times ? = 36$). Conjunto de objetos se divide en un número de partes iguales. Hallar la cantidad que corresponde a cada parte.
- **División cuotitiva**: Una caja de materiales contiene 36 lápices, se quieren guardar 12 lápices en cada estuche. ¿cuántos estuches de lápices se necesita? ($? \times b = c$). Se dan el total y tamaño de cada parte. Se busca el número de partes.

2. *Problemas de comparación*: Se relacionan tres magnitudes, una actúa como referente en la comparación, otra como cantidad comparada, y la tercera como factor de comparación, se establece una relación entre dos cantidades (doble, triple, tantas veces más, etc.), por ejemplo:

Fernanda tiene \$3.000 y Amalia tiene cuatro veces la cantidad Fernanda. ¿Cuánto dinero tiene Amalia?

3. La comparación multiplicativa también se hace en términos de igualación, evocando la cantidad de veces que una cantidad es tan grande como la otra.

El curso cuarto básico A ha ganado cuatro veces tanto como ha ganado el cuarto básico B, quien recaudó \$100.000. ¿Cuánto dinero recaudó el cuarto básico A?

4. *Problemas de producto cartesiano*: Aparecen dos cantidades para determinar el número de combinaciones que se establecen entre ellas. En esta categoría se incluyen los problemas que representan situaciones tanto de área, volumen, como de combinaciones (matrices). Admite solo dos variantes; factor o producto desconocido, por ejemplo:

- Beatriz quiere comprar un helado, los sabores disponibles son frutilla, sandía y piña, también puede optar llevar su helado en vaso o cono. ¿De cuantas formas distintas puede elegir su helado?
- Camilo desea pintar el techo de su casa, si mide 10 metros de ancho y 12 metros de largo. ¿Cuánta superficie necesita cubrir?

2.3.2.2 Problemas de más de una etapa o Problemas mixtos

Esta clasificación resulta de las propuestas que han realizado diversos autores como Puig y Cerdán (1988), Castro y Castro (1996) y Castro y Ruíz (2011) quienes incluyen problemas que contienen más de una situación de las señaladas anteriormente. Estos problemas se resuelven a través de dos o más operaciones aritméticas consecutivas, el número de pasos dependerá del número de relaciones entre las cantidades y generalmente se recurre a otra estructura, por ello implican una mayor complejidad. También llamados de operaciones combinadas, por incluir estructuras aditivas y multiplicativas simultáneamente, interviniendo distintas operaciones pertenecientes a campos conceptuales diferentes, el resolutor debe descubrir las relaciones y orden estratégico para resolver el problema (Espinoza, 2011, p. 22). A su vez, son considerados como un indicador de la complejidad matemática del enunciado por cuanto implican conexiones intramatemáticas.

En consecuencia con el propósito de este estudio, la clasificación propuesta por Castro y Ruíz (2011) reorganiza lo propuesto por otros autores, como se aprecia aborda la componente semántica presente en los problemas y al mismo tiempo da luces de la complejidad matemática de los mismos, de manera que al clasificar un problema multiplicativo de tipo: comparación, y que además para su resolución requiera de otra estructura (operaciones combinadas), se estará indicando al mismo tiempo el *tipo de problema multiplicativo y su complejidad matemática*.

Recapitulando, estas afirmaciones resultan relevantes, ya que existe una debilidad tanto en la resolución como en la invención de problemas. Por lo demás, ambas actividades constituyen una competencia matemática específica que el currículo chileno pretende desarrollar. Por esta razón, resulta de interés investigar sobre las características de las tareas multiplicativas que crean los estudiantes, bajo la modalidad de situación libre. A su vez, dado que la IP es un espejo en el cual los estudiantes reflejan las características de sus experiencias matemáticas escolares (Silver, 1994), será posible estudiar los conocimientos sobre el concepto de multiplicación que muestran los participantes, a través de la invención de problemas matemáticos; ya que esta operación ha sido estudiada al menos durante tres años de escolaridad, realizando un análisis a los enunciados basado en criterios específicos que apuntan a discriminar si el enunciado es un problema matemático, su complejidad matemática, tipos de contextos aludidos y tipos de problemas multiplicativos.

2.3.3 Presencia de la multiplicación en el currículo chileno.

De acuerdo a las Bases Curriculares actuales (2013), se vuelve a hacer notar que la resolución de problemas se encuentra definida como una habilidad a desarrollar en la asignatura de matemática, por ello el aprendizaje de la multiplicación y la RPM, según las orientaciones chilenas debe ser un trabajo conjunto. Aclarado esto, se pasan a detallar los objetivos de aprendizaje vinculados a la multiplicación. Indicar que este tema pertenece al eje de Números y Operaciones para los que se propone el aprendizaje a través de uso de material concreto o didáctico, representación pictórica y finalmente reemplazar por símbolos.

Tercero Básico: Demostrar que comprenden las tablas de multiplicación hasta el 10 de manera progresiva, expresando la multiplicación como una adición de sumandos iguales,

demostrar que comprenden la división en el contexto de hasta 10×10 , representando y explicando la división como repartición y agrupación en partes iguales, creando y resolviendo problemas en dichos contextos, expresando la división como una sustracción repetida, aplicando la relación inversa entre la división y la multiplicación.

Cuarto Básico: Demostrar que comprenden la multiplicación de números de tres dígitos por números de un dígito, empleando tablas de multiplicar, estimando productos, usando la propiedad distributiva, aplicando el algoritmo de la multiplicación, resolviendo problemas rutinarios. Demostrar que comprenden la división con dividendos de dos dígitos y divisores de un dígito, usando estrategias para dividir, utilizando la relación entre la multiplicación y la división, aplican el algoritmo de la división y estrategia de descomposición del dividendo.

Quinto Básico: Aplicar estrategias de cálculo mental para la multiplicación, demostrar que comprenden la multiplicación de números naturales de dos dígitos, demostrar que comprenden la división con dividendos de tres dígitos y divisores de un dígito, resolviendo problemas rutinarios y no rutinarios que impliquen las cuatro operaciones y combinaciones de ellas.

Sexto Básico: Demostrar que comprenden los factores y los múltiplos, realizar cálculos que involucren las cuatro operaciones en el contexto de la resolución de problemas.

Ante lo expuesto algunas observaciones, las Bases Curriculares chilenas proponen abordar la multiplicación y división de manera simultánea; no así en otros países, lo que limita el tiempo para una profundización del significado de multiplicación, debiendo centrar la atención del estudiante en la relación entre ambas operaciones. Se aprecia una introducción temprana de ciertos conceptos, dejando poco espacio para la construcción de conceptos, o para establecer relaciones que surjan de los propios estudiantes. Citando a Isoda y Olfos (2009) “por un lado aún no se conoce la multiplicación y por otro ya se conocen los múltiplos de 10, 100 y 1000” (p.56). Además, se aprecia poco espacio para el desarrollo de las propias estrategias o la elección de algunas, en cambio la propuesta es que los estudiantes practiquen un gran número de estrategias. Finalmente se observa la introducción de la resolución de problemas a lo largo de los cuatro cursos, con claro énfasis en los cursos superiores, quinto y sexto año de Educación Básica.

2.4 ASPECTOS VALORATIVOS DE LOS PROFESORES HACIA LA RPM E INVENCIÓN DE PROBLEMAS.

Como ha quedado de manifiesto, resolver e inventar problemas no implican solo aspectos cognitivos, sino que también considera elementos afectivos por parte de los estudiantes cuando se enfrentan a estas actividades, y de acuerdo a los modelos de resolución de problemas tratados (Pólya, 1979; Blanco, Cárdenas y Caballero, 2015) necesariamente las actividades de RPM e IP involucran la participación del profesor.

Por otra parte, es ampliamente aceptado que las creencias de los profesores, tiene una implicancia sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje, de la misma manera que tienen significancia sobre las materias concretas (Donoso, Rico y Castro, 2016).

Así, por una parte, se tiene que en las actividades relacionadas a la RPM la participación y mediación del profesor es fundamental, y por otra, el quehacer del docente está marcado por sus creencias sobre el contenido que enseña. Además, resulta muy interesante el aporte de Thompson (1992), quien aboga para que los investigadores no separen el estudio de las creencias de los profesores, del conocimiento de los mismos. Teniendo en cuenta estas consideraciones, para efectos de fraguar una investigación más completa y profunda también se ha decidido incluir las apreciaciones que tienen los profesores de matemática que estén a cargo de los cursos participantes hacia la invención de problemas.

Como ha sido abordado a lo largo de este capítulo la RPM e IP son actividades relativamente nuevas, al menos su consideración e inclusión dentro de los currículos, ya que implican una nueva manera de concebir la matemática escolar. Como lo exponen Felmer y Perdomo (2016) en matemáticas y ciencias existe una tendencia de traer el trabajo de matemáticos al interior de la escuela, insertando prácticas como representar, conjeturar, definir, argumentar, probar, comunicar, etc., en general se invita a los estudiantes a trabajar de forma similar a como lo hacen matemáticos y científicos, y la resolución de problemas es la manera más difundida para lograrlo. Como se aprecia, la visión que tiene el profesor especialmente sobre la invención de problemas, sin duda resulta un factor que debe ser estudiado para comprender el desempeño de los estudiantes frente a la actividad de crear problemas matemáticos multiplicativos.

En esta investigación Felmer *et al.*, (2014) indica que la actividad de resolución de problemas no ha sido ampliamente abordada en las salas de clases chilenas por los docentes noveles de la muestra, lo que se condice con los resultados logrados por los estudiantes chilenos antes expuestos (TERCE, PISA). Sin embargo, un estudio similar realizado por Giaconi, Felmer, Peri y Espinoza, (2015) en que se aborda la visión de los docentes respecto a sus prácticas y dificultades en la resolución de problemas, recoge que existe una actitud muy favorable hacia la RP, a la vez que los profesores muestran una necesidad de desarrollar capacidades para mejorar la implementación de dicha actividad en el aula.

Como se evidencia la RPM e IP son materias sobre las cuales todavía no está todo dicho, por una parte, son un componente importante dentro de esta nueva propuesta de hacer matemática en el aula, y por otra, profesores presentan una visión instrumentalista (Donoso, Rico y Castro, 2016). A su vez, Felmer *et al.* (2014) aprecian falta de preparación durante el proceso de formación inicial de los docentes chilenos sobre RPM, misma conclusión obtenida por Giaconi, Felmer, Peri y Espinoza, (2015).

Para finalizar, tal y como indican Donoso, Rico y Espinoza (2016), los maestros se involucran con aquellas actividades que estén en línea con sus creencias, y se inhiben si sus creencias y concepciones sobre la matemática y su enseñanza, no coinciden (p.91) Por ello existe acuerdo (Bryan, 2003; Callejo y Vila, 2003; Pajares, 1992) en que “el desempeño del profesor está determinado por las creencias y concepciones que sostiene sobre la enseñanza de un tema concreto, como también el alcance y la trascendencia de los conocimientos a enseñar sobre dicho tema, afectando su quehacer diario” (p.78).

Estas dos líneas de investigaciones confrontadas; primero, la directa influencia de las concepciones de los profesores en su quehacer en el aula, en segundo lugar, el desempeño que han mostrado algunos profesores jóvenes frente a la RP, confirma la importancia de contemplar en este estudio, las valoraciones de los profesores hacia la invención de problemas. Debido a los antecedentes revisados, tanto el conocimiento como concepciones de los docentes están en juego a la hora de promover o no esta habilidad en sus estudiantes, razón por la que idealmente se espera contar con la participación de profesores que estén a cargo de la formación matemática de los estudiantes participantes del estudio para que brinden sus apreciaciones.

2.5 RESUMEN DEL CAPÍTULO

Las numerosas investigaciones consultadas se han organizado en cuatro grandes áreas: se comienza por la resolución de problemas; en estos apartados se ha buscado dar al lector una comprensión histórica del surgimiento y cómo se fue conformando esta línea investigativa, junto con sentar el marco teórico que sustenta el segundo apartado; invención de problemas, con un enfoque más práctico.

El foco está puesto en los beneficios que conlleva la inclusión de esta actividad al aula, como también abordar los múltiples propósitos con los que se emplea la IP, además de indicar las distintas clasificaciones que han realizado otros autores, para valorar los enunciados elaborados por estudiantes. De este último punto se levantan los criterios para el posterior análisis de los elementos propios del enunciado, tales como la complejidad matemática, la clasificación para identificar a un enunciado como problema matemático y el tipo de contexto implicado.

En el tercer apartado y desde la vereda de la matemática educativa, se ha concentrado todo lo relativo al concepto de multiplicación, basado en la estructura operatoria, se diferencian aspectos claves del concepto como el significado y las situaciones multiplicativas, para comprender la posterior clasificación de tipos de problemas multiplicativos, igualmente se exponen aspectos generales a considerar sobre el aprendizaje de este concepto y un resumen de cómo se aborda en el currículo nacional. Finalmente, el último apartado de menor extensión, busca exponer el quehacer del profesor en el aula el cual se determina según sus concepciones, si bien no es foco de este estudio estudiar el quehacer del profesor en el aula, es un punto que interesa contemplar, por cuanto los enunciados que presentan los estudiantes son reflejo de sus experiencias matemáticas escolares. Por lo tanto, para el estudio y comprensión cualitativa de los enunciados es indispensable profundizar, aunque sea levemente, en las apreciaciones del profesor hacia la IP. Al abarcar estos contenidos se tiene una sólida base para lograr el objetivo general de caracterizar las producciones enunciadas por estudiantes de Sexto Año Básico, a través de la invención de problemas matemáticos multiplicativos.

CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

Una vez enunciado el problema de investigación, los objetivos del estudio y el marco teórico a través del cual se estudiará el problema del estudio, en el presente capítulo se expone la perspectiva metodológica que guía el trabajo. Específicamente, se presenta el método seguido en la recogida de información, las categorías de análisis definidas, las fases de elaboración de los instrumentos, la codificación de las producciones de los estudiantes, y por último se detalla el esquema que permite caracterizar las tareas matemáticas creadas por estudiantes de Sexto Año Básico de tres colegios de la región de Antofagasta.

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

La investigación corresponde a un estudio fundamentado en la perspectiva cualitativa de tipo descriptiva, en la cual se pretende caracterizar y describir los problemas matemáticos multiplicativos que inventa un grupo de estudiantes.

Siguiendo esta lógica descriptiva se busca especificar las propiedades importantes de cualquier fenómeno que sea sometido a análisis (Dankhe, 1986). En este caso se pretende describir y caracterizar las situaciones multiplicativas creadas por los estudiantes ante una tarea de inventar problemas multiplicativos, de acuerdo a las variables presentes en los enunciados; principalmente relacionadas al tipo de contexto, complejidad matemática y tipos de problemas multiplicativos.

Asimismo, con el fin de comprender mejor la complejidad del fenómeno estudiado se emplearán varias fuentes de información y métodos para recolectar los datos, considerando que: “[...] En la indagación cualitativa poseemos una mayor riqueza, amplitud y profundidad de datos si provienen de diferentes actores del proceso, de distintas fuentes y de una mayor variedad de formas de recolección” (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 417). En consecuencia, el proceso se divide en dos fases, para la primera intervención (considerada inmersión inicial) en que se diseña un instrumento consignado como herramienta principal para la recolección de datos. Para la segunda fase de esta investigación, en conjunto con el instrumento elaborado y validado, se lleva a cabo una entrevista estructurada con los profesores de matemáticas vinculados a los grupos de

estudiantes sujetos informante del estudio, para indagar sobre las valoraciones que tiene hacia la invención de problemas.

3.2 UNIDAD DE ANÁLISIS

Dadas las características de la investigación, la unidad de análisis corresponde a los enunciados o producciones realizadas por los estudiantes, con el fin de mostrar distintas perspectivas y documentar la diversidad en los enunciados creados. Para localizar posteriormente diferencias y coincidencias, patrones y particularidades, se ha optado por seleccionar a los participantes siguiendo lo que se conoce en investigación cualitativa como muestra no probabilística: *diversas o de máxima variación* (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Por esta razón, los estudiantes provienen de tres colegios de la comuna de Antofagasta que representen los tres tipos de administración económica (particular, particular-subsidiado y municipal), solicitándose un solo curso para el nivel de sexto año básico de acuerdo a los criterios de disponibilidad horaria. El número de los participantes se establece de acuerdo a la cantidad de alumnos presente el día de la intervención, ya que se aplica el instrumento solo el día y horario indicado por cada colegio. El rango etario de los participantes no es excluyente, pudiéndose encontrar alumnos menores o mayores a la media de 11 años.

3.3 DISEÑO DE INSTRUMENTOS

A partir de la amplia diversidad de modelos para abordar la IP en el aula, se ha elegido la situación descrita por los autores Stoyanova (1998) junto a los aportes de Blanco, Cárdenas y Caballero (2015); es decir, se presentan situaciones semi estructuradas de invención de problemas a estudiantes de Sexto Año de Educación Básica. Estas consisten en entregar información cuantitativa de base, en este caso se incluyen imágenes con el fin de facilitar la actividad de inventar problemas, los estudiantes deben crear un problema con base en la información entregada que se resuelva empleando necesaria pero no exclusivamente la operación de multiplicación. Los estudiantes al resolver las situaciones tienen completa libertad para abordar el instrumento por la imagen que les resulte más accesible.

A continuación, se muestra en la Tabla 2 las imágenes con las cuales se conforman los instrumentos de aplicación, las cuales se presentan en diversos contextos y además entregan

información cuantitativa. En los Anexos 1 y 2 se puede acceder a los instrumentos aplicados para la primera y segunda fase respectivamente.

Tabla 2.

Situaciones libres: imágenes con información de base presentadas en Actividad Piloto.

Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4	Situación 5
				<p>La siguiente figura ha sido dividida en cuadrados iguales:</p> 

Además, con el fin de poder conocer cuáles son las valoraciones que tienen algunos profesores de la región sobre la invención de problemas, se construye una entrevista estructurada la cual considera las tipologías de preguntas descritas por los autores Grinnel, Williams y Unrau (2009) en Metodología de la Investigación; preguntas de tipo: generales (antecedentes y opinión), preguntas de ejemplificar, conocimiento y de contraste.

El instrumento está orientado a los profesores de matemática que trabajan actualmente con el grupo de estudiantes que realiza la actividad de invención de problemas, con la intención de conocer sus apreciaciones de forma general sobre la resolución de problemas y de modo más específico respecto a la actividad de inventar problemas matemáticos. El guión de la entrevista está disponible en Anexo 3.

3.4 FASES DE APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

La aplicación del instrumento se realiza en dos instancias distintas, cada una de estas intervenciones persiguen objetivos particulares. En primer lugar, se aplica un instrumento a un grupo de estudiantes con talento académico en período no escolar –de ahora en adelante llamada: actividad Piloto– la cual tuvo dos propósitos; el primero, identificar y validar las situaciones más adecuadas como reactivos; es decir, aquellas que resulten accesibles a los estudiantes obteniéndose alta tasa de respuesta, y que a su vez favorezcan la creación de enunciados con la mayor diversidad de contextos, tipos de problemas y complejidad matemática. El segundo objetivo de la Actividad Piloto, es permitir proyectar ajustes con

base en los datos recogidos. Así, por una parte, fue posible modificar el instrumento reconsiderando tanto la cantidad y tipo de imágenes empleadas, como algunas modificaciones a las categorías de análisis que pretenden mejorar el posterior proceso de caracterización de las tareas matemáticas. Igualmente, permite tomar medidas en cuanto a la organización que se necesita llevar al aula (consideración del tiempo, materiales, rol de la investigadora, entre otros). Por último, dada la posibilidad de mejoras al instrumento se constituye como una instancia de validación del mismo.

Posteriormente, una vez iniciado el período escolar se tomó contacto con los colegios para llevar a cabo la segunda fase de la investigación, en la cual se aplica el nuevo instrumento con las respectivas modificaciones y se realizan las entrevistas a los profesores de matemáticas. A continuación, se presenta un esquema resumen (Figura 2) del proceso llevado a cabo para la recolección de los datos y se describe dicho proceso en el siguiente subapartado.



Figura 2. Esquema de las fases de la investigación y aplicación del instrumento.

3.4.1 Aplicación etapa 1: actividad Piloto

El total de participantes fue de 29 estudiantes, divididos en dos grupos de trabajo (jornada mañana y tarde), los cuales por ser asistentes regulares al Programa de Talento Académico de la comuna se encontraban convocados a su clase regular, una vez iniciada la jornada se les indica que participarán en una actividad extraordinaria de creación de problemas matemáticos. Previo al desarrollo del instrumento se proyecta un video explicativo/recordatorio sobre ¿Qué es un problema matemático?, el cual con lenguaje

sencillo indicaba 4 elementos que debe incluir un enunciado para ser problema matemático; historia o enunciado escrito, datos conocidos (cantidades), intención de averiguar (pregunta), una meta (obtener resultado a través de una o varias operaciones matemáticas). Una vez dadas las instrucciones de crear y resolver un problema usando la multiplicación y con total acceso a manifestar consultas, dudas y/o pedir ayuda, los estudiantes de ambas jornadas dispusieron de 60 minutos para la creación de 5 problemas matemáticos, por lo que se esperaban 145 enunciados.

Finalmente, se obtienen 81 problemas matemáticos, identificados así por poseer un enunciado verbal coherente con intención de averiguar algo a través de una pregunta explícita y que incluye datos cuantitativos. Del total de producciones 39 no logran ser clasificadas como tal, así 24 situaciones no fueron abordadas y algunos enunciados resultaron ilegibles.

3.4.1.1 Análisis actividad Piloto

Dado el marco cualitativo en el que se posiciona este trabajo, una vez obtenidas las primeras evidencias (tareas matemáticas) comenzó el levantamiento más fino de categorías que viene a complementar los criterios que se habían estimado inicialmente y que se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3.

Categorías de análisis y criterios aplicados.

Categoría	Descriptor
No es problema matemático	<ol style="list-style-type: none"> 1. Incoherencia del enunciado verbal 2. Información cuantitativa incompleta 3. No presenta intención de averiguar 4. Ejercicio (operación)
Tipos de contextos	<ul style="list-style-type: none"> • Personal Amigos, familia, compra, dulces, etc.
	<ul style="list-style-type: none"> • Educativo - Laboral Escolar, transporte, cobre, industria, matemático
	<ul style="list-style-type: none"> • Social Almacén, farmacia, transporte
	<ul style="list-style-type: none"> • Científico No evidenciado
Niveles de complejidad matemática	<ul style="list-style-type: none"> • Reproducción Se resuelve de forma directa
	<ul style="list-style-type: none"> • Conexión Conecta con otro contenido matemático o estructura
Tipos de problemas	Reflexión
	Proporcionalidad Relación directa entre

Tabla 3.
Categorías de análisis y criterios aplicados.

Categoría	Descriptor		
matemáticos	simple	cantidades de distinta magnitud.	
	Comparación	Establece relación de (doble, triple, tantas veces más, etc.) entre dos, de las tres cantidades implicadas	
	Producto cartesiano	Combinación, área o matriz	
	No multiplicativo	Ausencia de la estructura multiplicativa	
	Operacional	Ejercicio carente de enunciado o contexto	

A partir de los criterios recién expuestos se da paso a la elaboración de una matriz descriptiva (Figura 3), con ella la información fue codificada correlativamente hasta el enunciado 145 y cada enunciado fue analizado de acuerdo a las categorías descritas.

SUJETO	Nº SITUACIÓN	EDAD	NIVEL EDUCATIVO	PROBLEMA MATEMÁTICO	NO PROBLEMA	CONTEXTO	TIPO DE CONTEXTO	RELACIÓN IMAGEN-ENUNCIADO	COMPLEJIDAD MATEMÁTICA	NÚMERO ETAPAS	TIPOS DE PROBLEMAS
1M	1	12	6	1			2 INDUSTRIA	1	2	3	1
2M	1	13	7	1			2 MATEMÁTICO	1	1	1	3
4M	1	13	7	1			2 COBRE	1	1	1	3
6M	1	13	7	1			2 COBRE	1	1	1	1

Figura 3. Matriz de análisis usada en Actividad Piloto

Primero se identificaron los sujetos según la jornada, número de situación, edad y nivel educativo. Luego se discrimina si el enunciado es o no problema matemático o el estudiante no responde, para el caso de los enunciados considerados no problemas matemáticos se especifica atendiendo a una de las cuatro razones expuestas en la Tabla 3. Para lograr identificar los tipos de contextos se realizó una clasificación según tema al que aludía el enunciado, a modo de ejemplo; si el tema implicaba el cobre se asignaba al tipo: educativo/laboral, mientras que si incluía amigos al contexto personal. Además, se identificó si el estudiante planteaba un problema en relación con la información presentada en la imagen, para pesquisar que tan relevante le resultó esta. En cuanto a la complejidad matemática los enunciados se clasificaron según: 1. Reproducción, 2. Conexión y 3. Reflexión. Buscando profundizar más sobre esta categoría se clasificaron los enunciados de acuerdo al número de etapas necesarias para la resolución del problema, esto fue posible solo cuando el propio estudiante desarrolló su problema. Por último, todos los enunciados

se clasificaron según; tipo de problema matemático multiplicativo, enunciados no multiplicativos para aquellos que presentaban problemas aditivos, y operacionales para aquellos enunciados que tenían elementos de un problema matemático, pero que resultaron incompletos.

3.4.1.2 Análisis y resultados actividad Piloto

Para fines interpretativos se consideró a los 29 participantes incluidos aquellos que desarrollaron solo algunas de las situaciones o ninguna. Se debe tener en consideración que el propósito de este primer análisis es identificar las imágenes que resulten más favorables; es decir, aquellas que tengan mayor índice de respuesta, y permitan crear enunciados en diversidad de contextos como también problemas multiplicativos que apunten a diversas situaciones multiplicativas, por esta razón para el análisis solo se consideran aquellos problemas clasificados como matemáticos y multiplicativos simultáneamente, presentándose cada variable (tipo de contexto, tipo de problema multiplicativo e índice de respuesta) en relación a cada situación o imagen presentada.

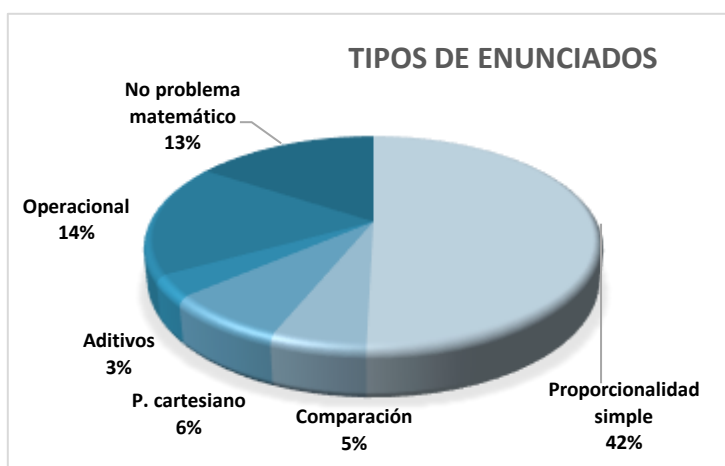


Figura 4. Representación tipos de enunciados obtenidos en Actividad Piloto.

Cabe señalar que, de las 145 producciones obtenidas 77 corresponden a problemas matemáticos multiplicativos (proporcionalidad simple, producto cartesiano y comparación), 24 situaciones no fueron abordadas por los estudiantes, mientras que de los 44 enunciados restantes; 4 corresponden a estructura aditiva, 19 no son problema matemático y 21 enunciados son considerados operacionales, como se ilustra en la Figura 4.

Esta última categoría surge para aquellos 21 enunciados (14%) que aun cuando presentan una multiplicación no logran relacionar los datos con situaciones multiplicativas contextualizadas a su vez presentan la intención explícita de operar las cantidades, como se aprecia en el ejemplo de la Figura 5.

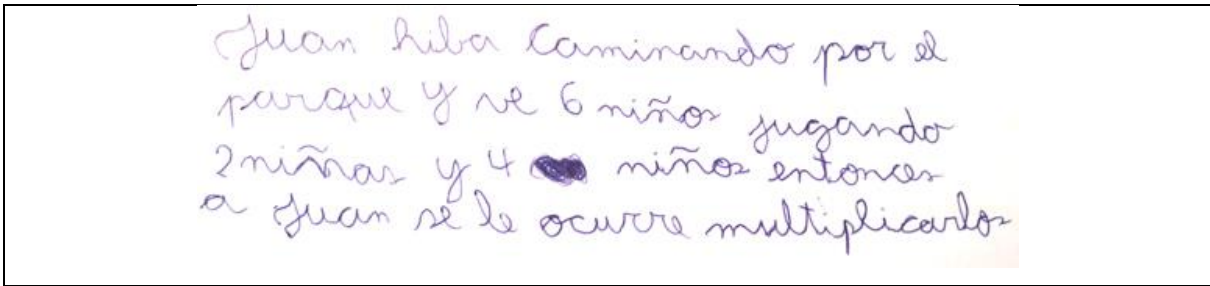


Figura 5. Ejemplo enunciado tipo operacional.

3.4.1.3 Selección de imágenes para el instrumento final

De los cuatro tipos de contextos propuestos por PISA, los estudiantes han elaborado problemas en tres de estos: personal, social y laboral, ninguno en un contexto científico. Del total de 77 problemas inventados, 33 problemas son en contexto personal, tales como amigos, hermanos, compra, juegos, parque, entre otros. Así, 37 problemas aluden a contextos educativo/laboral, haciendo mención a: farmacia, remedios, transporte y otros se quedan solo en un contexto matemático por lo que se clasificaron como escolares. En el contexto social son planteadas 7 producciones que hacen referencia a: almacén, hospital y transporte.

Es necesario destacar que aun cuando coincide el nombre de la clasificación, como ocurre con un ejemplo de transporte, el enunciado del problema entrega elementos que permiten realizar la diferenciación del contexto, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Tabla 4.
Diferenciación de problemas a partir de enunciado.

Transporte - Contexto social	Transporte - Contexto Laboral
Si en 1 micro hay 14 asientos ¿cuántos asientos hay en 56 micros?	En un tren que transporta carbón hay 20 vagones con 50 laminas cada uno ¿cuántas laminas hay en total?

El primer enunciado hace alusión a un medio de transporte destinado a personas, vinculado al contexto social. Mientras que el segundo ejemplo alude al tren de carga y vagones, situación claramente vinculada a la primera imagen presentada en el instrumento, y que es propia de un contexto laboral.

De esta manera, y de acuerdo a los datos que se presentan en la *Figura 6*, la situación 1 no admitió ningún contexto personal, mientras que la situación 3 no llevó a generar enunciados en contexto Social.

Por su parte, las situaciones 2 y 4 permitieron a los estudiantes plantear problemas situados en tres de los cuatro tipos de

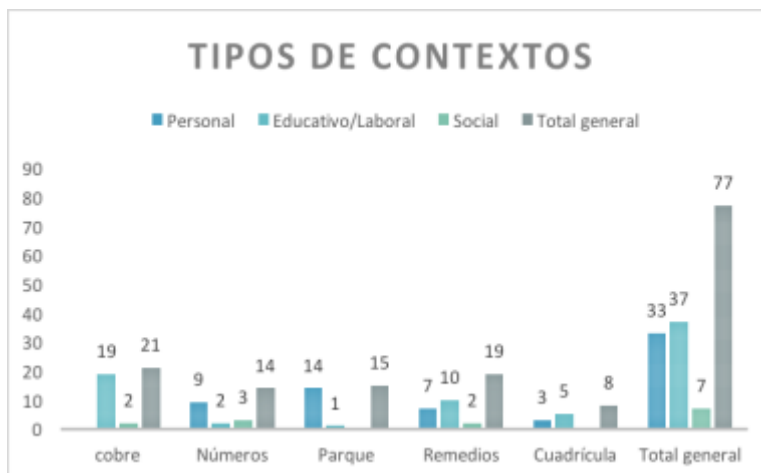


Figura 6. Tipos de contextos presentados según cada situación.

contextos definidos por PISA. Cabe mencionar que el único contexto presente en las cinco situaciones es el Educativo/Laboral, aunque en un bajo porcentaje de enunciados (17%). Por tanto, las imágenes que refieren al Cobre, Parque y Cuadrícula, no han resultado apropiadas por excluir algunos contextos. Los enunciados creados a partir de estas imágenes hacen referencia exclusiva al contexto más simple y directo que evoca la lámina. Tras el análisis se evidencia que las situaciones que presentan mayor variedad de contextos son la número 2 y 4.

Al mismo tiempo se analizaron los tipos de problemas multiplicativos creados, según las relaciones semánticas expresas en cada enunciado, sean de proporcionalidad simple, comparación o producto cartesiano.

De acuerdo al gráfico 7 destacan aquellos problemas con relaciones y operaciones directas y simples entre las cantidades, representando el 79% del total los de proporcionalidad simple.

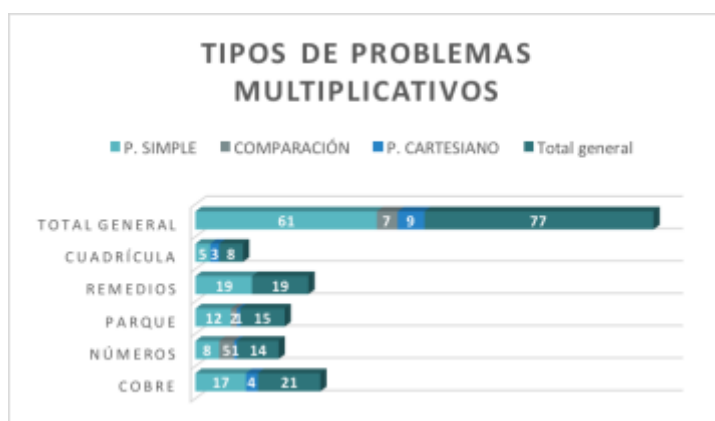


Figura 7. Tipos de problemas multiplicativos por situación.

Asimismo, se identifica que para las imágenes *Cobre* y *Parque* los estudiantes plantean los tres tipos de problemas multiplicativos; proporcionalidad simple,

comparación y producto cartesiano. Destaca que en la situación *Remedios* solo se plantearon problemas de tipo proporcionalidad simple, por lo tanto, esta imagen no resulta favorable desde la diversidad de tipos de problemas, como sí lo era desde el punto de vista del contexto. Por último, la imagen Cuadrícula presenta enunciados del tipo proporcionalidad simple y producto cartesiano, sin embargo, durante la experiencia de aplicación se constató que para los estudiantes resultó ser una imagen conflictiva, era observable la angustia o trabas al abordarla, por lo cual, no fue facilitadora para la creación de problemas matemáticos. Considerando lo anterior, las situaciones 2 y 3 destacan por favorecer la creación de los tres tipos de problemas multiplicativos.

Finalmente, en cuanto a la complejidad matemática de las producciones, solo se obtienen problemas de reproducción (82%) y de conexión (18%), ninguno de los problemas pudo ser catalogado del tipo más complejo; reflexión.

Prevaleciendo los problemas directos en los cuales no se establecen un número mayor de relaciones entre las cantidades. Además, el lenguaje empleado suele ser simple con pocos términos propios del lenguaje matemático.

Basado en los resultados obtenidos, la imagen asociada al Cobre si bien es la única que propicia la mayor cantidad de problemas lo hace concentrada en un solo contexto y tipo de problema. Así mismo, la imagen de Cuadrícula no resulta apropiada particularmente por presentar muy bajo índice de respuesta, además de no favorecer la diversidad de contextos ni de tipos de problemas.

Finalmente se presentan los resultados logrados en las variables señaladas anteriormente, en relación a cada imagen presentada ver Tabla 5, de esta manera la imagen Números y Remedios presentan mayor diversidad de contextos. Sin embargo, Números además presenta diversidad de tipos de problemas, no así la de Remedios que se concentra en un solo tipo. Por último, los enunciados asociados a la imagen Parque se concentran en el contexto personal, pero logra presentar diversidad de tipos de problemas, además de mantener una tasa de respuesta superior a la de Números.

En síntesis, la Tabla 5 condensa las situaciones más destacadas que resultaron de la aplicación piloto. Es posible afirmar que la imagen de Números resulta favorable para ser presentada en una nueva actividad de invención de problemas, por su alto índice de respuestas y diversidad tanto de contextos como de tipos de problemas multiplicativos.

Tabla 5.
Resumen situaciones idóneas.

	CONTEXTOS	TIPOS DE PROBLEMAS	% RESPUESTA
1. COBRE			
2. NÚMEROS	✓	✓	14
3. PARQUE		✓	15
4. REMEDIOS	✓		19
5. CUADRÍCULA			

Para estudiar los contextos, tipos de problemas y las conexiones que surgen a partir de la invención de problemas, se consideran las situaciones de Números (2) y la de Remedios (4) por la riqueza obtenida en las tres dimensiones evaluadas en el estudio Piloto. Correspondiendo a dos situaciones que pueden permitir una caracterización de las tareas matemáticas multiplicativas que prevalecen en estudiantes que han adquirido destrezas de multiplicación.

3.4.2 Decisiones finales a partir de Actividad Piloto

Como consecuencia de esta primera etapa de intervención se ha considerado realizar ajustes tanto al instrumento como a la matriz de análisis empleada, con el fin de extraer la mayor cantidad de información relevante de la segunda etapa de este estudio; aplicación a colegios.

En cuanto al instrumento, principalmente se decide disminuir a dos el número de imágenes a incluir en la construcción del nuevo instrumento, considerando que el tiempo requerido por los estudiantes con talento académico fue mayor al esperado para responder cinco situaciones, a esto se suma que las condiciones del aula podrían incrementar el tiempo requerido (mayor número de alumnos por sala, menor concentración, imprevistos técnicos, etc.).

En cuanto a las variables a estudiar, continúa siendo foco de análisis si el enunciado es problema o no, el tipo de contexto, tipos de problemas multiplicativos y complejidad matemática, pero se decide modificar la forma en que se organizan estos criterios, con el fin de realizar el análisis de manera más eficiente.

Esta vez se cambia la modalidad y se pretende establecer las categorías de antemano. A modo de ejemplo, se reestructura la clasificación para los tipos de problemas multiplicativos descrita en el capítulo anterior, permitiendo identificar con mayor detalle los enunciados que sean problema matemático multiplicativo, al incluir subcategorías antes no contempladas. Mientras que los enunciados considerados operacionales, es decir aquellos en que explícitamente se pide hallar un producto, son clasificados como no problema matemático, dejando la categoría tipos de problemas exclusivamente para los problemas multiplicativos. Para la intervención realizada a colegios se consideran los enunciados siguiendo la secuencia indicada por los cuadros de color de la Figura 8. Es decir, solo se estudiarán las variables señaladas para los enunciados que sean problema matemático multiplicativo.



Figura 8. Esquema resumen de cómo se clasifica los enunciados.

3.4.3 Validación del instrumento por expertos del área de la matemática

En el marco de una actividad académica realizada en la Escuela de Educación de la UCN que tuvo como invitado al catedrático de la Universidad de Huelva (Andalucía, España), José Carrillo especializado en el área de la Didáctica de la Matemática, se presentó la oportunidad de exponerle el trabajo realizado con el fin de recibir contribuciones a la investigación. Entre varios de los aportes realizados recomienda incluir al instrumento una situación libre sin información de base, con el objetivo de obtener enunciados no asociados a contextos determinados y así evidenciar con mayor limpieza los contextos que emergen por parte de los estudiantes. Adicionalmente, el instrumento finalizado fue dado a conocer a profesores especialistas en matemática con el fin de validarlo, comentándose mayormente aspectos de formato del instrumento y destacándose el tipo de situaciones.

3.4.4 Categorías de análisis

Considerando la revisión de la literatura y las variables que han sido empleadas por los autores Puig y Cerdán (1988); Castro, Rico y Castro (1995); Castro y Ruíz (2011); Ayllón (2012); Espinoza, Lupiañez, y Segovia (2015) para el análisis de enunciados planteados por estudiantes, se busca identificar características relevantes tanto de los problemas creados como de los conocimientos vinculados a la multiplicación que tienen los estudiantes. Con el fin de aportar información sobre aspectos relacionados al conocimiento sobre planteamiento de problemas y valoración de las producciones.

A pesar que las clasificaciones varían dependiendo del autor es posible encontrar elementos fundamentales en común, por lo que ha sido posible elaborar una matriz original atendiendo al propósito del estudio; se incluyen categorías relacionadas al estudio de la complejidad matemática del problema, la estructura multiplicativa semántica y sintáctica de los mismos junto a tipos de contextos y sus respectivas variables resumidas en la Tabla 6.

Tabla 6.

Matriz de análisis de los problemas según tipos de variables.

Categorías de análisis		Tipos de variables			
Estructura sintáctica	El enunciado es o no un problema.				
Complejidad matemática	Reproducción	Conexión		Reflexión	
Tipos de contextos	Personal	Educativo	Social		Científico
Cómo resuelve	Correcto	Incorrecto	Correcto aditivamente	Incorrecto aditivamente	No resuelve
Estructura multiplicativa semántica	Proporcionalidad simple	Comparación	Igualación	Producto cartesiano	Problema de más de una etapa
	Multiplicación	Aumento		Combinación	Se aplica la misma clasificación para cada proposición.
	División partitiva	Disminución		Producto de medidas	
División cuotitiva					

En la Tabla 6, se exponen los criterios con los cuales se realiza la categorización de los problemas matemáticos multiplicativos (PMM) inventados, se recogen los elementos que han sido ampliamente expuestas en el apartado de Marco Teórico y se reorganizan a partir

de la primera experiencia de aplicación y análisis durante la Actividad Piloto. Teniendo en cuenta la clasificación propuesta por Castro y Ruíz (2011), al estudiar la variable tipo de problema multiplicativo, se ha decidido codificar separadamente aquellos problemas que son de una etapa es decir que requieren solo de una operación para ser resueltos, de los de más de una etapa, esos problemas que emplean para su resolución dos o más operaciones pertenecientes a la estructura multiplicativa. En la Figura 9 se presenta un ejemplo de proceso de codificación realizado para aquellos enunciados identificados como problemas multiplicativos. Este problema ha sido clasificado como multiplicativo de dos o más etapas.

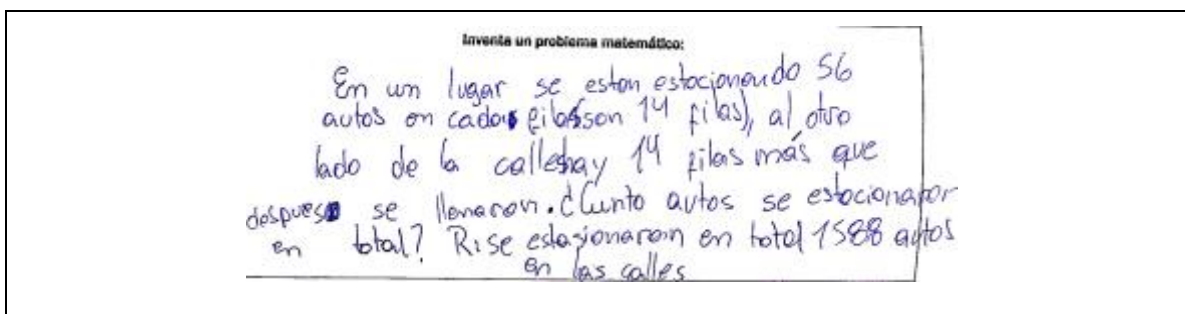


Figura 9. Ejemplo (B16) problema matemático multiplicativo de dos etapas.

Primero se aíslan las proposiciones presentes en el enunciado para identificar a qué tipo de problema multiplicativo corresponden, de acuerdo a las relaciones semánticas multiplicativas presentes en cada proposición. Además se estudia la complejidad matemática del enunciado de acuerdo al tipo de operaciones presentes, y se especifica si estas se relacionan con algún otro contenido matemático. Luego, para determinar el tipo de contexto se identifican algunas variables como; la acción que se realiza (compra, venta, visita médica, etc.), o el tema central (tecnología, amigos, juguetes, comida, remedios, entre otros) y si no resulta viable esta asignación se recurre a tópicos más generales como identificar el lugar descrito (supermercado, colegio, farmacia).

Finalmente, se establecen cinco categorías para determinar la forma en que el estudiante aborda el problema inventado; multiplicativamente: puede ser correcto o incorrecto; aditivamente: correcto o incorrecto; o no resuelve. Este último criterio se introduce solo a partir del análisis de los primeros enunciados, principalmente porque frente a problemas complejos algunos estudiantes resuelven incorrectamente, situación que pareció interesante de profundizar. Este proceso se resume en la siguiente tabla.

Tabla 7.
Resumen del proceso de codificación para el problema multiplicativo B16.

Etapas	Proposición	Tipo problema	de	Qué implica	Operación
1ra etapa	56 autos en cada fila (son 14 filas)	Producto cartesiano medida	de	Se organizan los elementos en una matriz (filas y columnas)	$56 \times 14 = 784$
2da etapa	Hay 14 filas más que se llenaron. (de autos)	Proporcionalidad simple de multiplicación	de	Operación simple y directa	$784 \times 2 = 1568$
Tipo de contexto		Social			
Detalle contexto		Plazas de estacionamientos			
Complejidad matemática		Reflexión			
Cómo resuelve		Incorrecto multiplicativamente			

Teniendo en cuenta que el análisis cualitativo es un proceso cíclico y una actividad reflexiva, ha sido posible fragmentar los datos y dividirlos en unidades significativas, siempre manteniendo una conexión con el total. Permitiendo organizar los datos en un sistema derivado de ellos mismos, de esta manera la codificación que se mostraba (deductivo-inductivo), responde a criterios cualitativos en donde las categorías empleadas inicialmente devienen de trabajos previos para organizar la información, utilizando conceptos teóricos del marco conceptual, posteriormente se procede a la elaboración y/o ajuste de las categorías elaboradas a los datos y no viceversa (Coffey y Atkinson, 2003).

Por otra parte, y como se anticipó el inicio de este capítulo la entrevista surge solo con el fin de complementar los datos y de considerar a todos los actores del proceso, es por esto que resultan un aporte las valoraciones de los profesores que han guiado el proceso de aprendizaje de la multiplicación y posiblemente el de la resolución de problemas.

Para realizar análisis de contenido por pregunta, el guion de entrevista fue confeccionado considerando tres categorías las que se relacionan con tipos de preguntas específicas; Información general la cual incluye preguntas de antecedentes y de opinión; luego la categoría resolución de problemas integra preguntas de opinión y para ejemplificar, por último, la categoría invención de problemas contempla preguntas de conocimiento, ejemplificar y de contraste.

Por último, considerando que el volumen de datos es reducido y por tratarse de material escrito con preguntas cortas y abiertas, se decide realizar el análisis de contenido por pregunta de manera manual, para ello se consideran las tres dimensiones generales establecidas previamente durante el proceso de elaboración de la entrevista; antecedentes, resolución de problemas e invención de problemas, luego se examina el texto y destacan segmentos o unidades con el propósito de identificar las ideas o temas comunes. (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis que se presenta a continuación es en base a la información obtenida durante la segunda intervención realizada en tres colegios de la comuna de Antofagasta; identificados como: Municipal (A), Particular Subvencionado (B) y Particular (C) en los cuales participaron 109 estudiantes de sexto año básico, con ello se esperaba obtener 327 enunciados. Se realiza una primera clasificación general y se identifican los tipos de enunciados obtenidos.

A partir de los datos obtenidos de los tres colegios (ver figura 10) se decide generar tres categorías principales para organizar los tipos de enunciados; en primer lugar, un 34% de los enunciados se identifican como

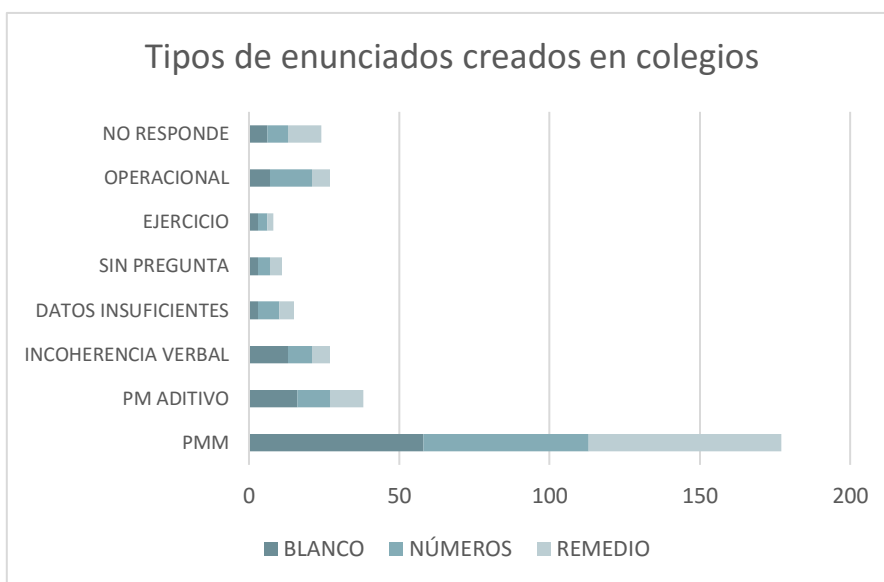


Figura 10. Clasificación general de los enunciados obtenidos en colegios para cada situación.

no problema matemático, clasificados de esta manera por presentar alguna de las siguientes características; ser un ejercicio, operacional, presentar ausencia de pregunta, datos insuficientes, o incoherencia verbal. Dentro de esta misma categoría se ha incluido el 7% de enunciados que no fueron abordados.

La segunda categoría corresponde a problemas matemáticos relacionados con la estructura aditiva (12%) los cuales al igual que los *No problemas* tampoco son estudiados.

Por último, la tercera categoría corresponde a los enunciados que sí son problema multiplicativo, clasificados de esta manera por cumplir con las características descritas por los autores Ayllón, Castro y Molina (2008) tratados en el marco teórico, se obtiene que de los 327 enunciados esperados un 54% corresponden a PMM, los que constituyen las

unidades de análisis en este estudio de los que se pretende identificar, conocer y describir el tipo de componentes que presentan.

Del mismo modo, y ahora desde el punto de vista de los participantes, el análisis arroja que el 27% de ellos consigue desarrollar la tarea completa, es decir inventar PMM para las tres situaciones ofrecidas, por su parte el 30% lo hace para dos situaciones, mientras que el 22% logra crear PMM solo para una de las situaciones, por último, se obtiene que un 21% de los 109 estudiantes no logra realizar parcial o totalmente la tarea.

En esta primera panorámica, es relevante señalar que para los 86 estudiantes que logran inventar uno o más problemas multiplicativos no existió preferencia o dificultad frente a las 3 situaciones presentadas, esto se deduce a partir de los porcentajes de respuesta los cuales resultan bastante similares; 32% se alcanza en situación 1 (sin información cuantitativa de base); 31% Situación 2 (imagen de remedio) y 36% para la Situación 3 (imagen de números).

Para concluir este primer análisis se aclara que no habrá mayor desglose de diferencias por colegios, salvo indicar el número de problemas multiplicativos que han creado los estudiantes. Considerar que se solicitó a los estudiantes crear problemas multiplicativos, por ello se no se consideran los problemas aditivos, como tampoco aquellos problemas llamados operacionales. En la Tabla 8 se presenta el número de PMM creados por los estudiantes.

Tabla 8.
Número de PMM creados por estudiantes según colegios.

Colegio	Nº de estudiantes	Nº de PMM esperados	Nº inventados.	PMM	Porcentaje de logro.
A	44	132	60		34%
B	35	105	64		36%
C	30	90	53		30%

A continuación, se exponen los resultados organizados de la siguiente manera: para la variable tipos de problemas se tratan separadamente los resultados según sean problemas de una etapa o más de una etapa, luego tanto la complejidad matemática como los tipos de

contextos se analizan considerando los datos correspondientes a los 177 problemas multiplicativos.

4.1 CARACTERIZACIÓN TIPOS DE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS

Resultados según tipos de problemas multiplicativos de una etapa

Como se señala en el marco teórico y luego se especifica en la metodología, se han establecido ocho categorías específicas para identificar a qué tipo de problema multiplicativo aluden las proposiciones del enunciado. Así de un total de 130 problemas multiplicativos de una etapa, creados por estudiantes de los colegios A, B y C, el 81% de estos corresponde al tipo proporcionalidad simple de multiplicación la cual se caracteriza por presentar una multiplicación simple y directa, por otro lado, el 18% de los problemas llevan a emplear la división como operación para su resolución, específicamente 15 son del tipo partitiva y 8 del tipo cuotitiva o de medida. Solo un problema presenta una comparación por aumento, lo cual desde el punto de vista semántico implica mayor complejidad. En la Tabla 9 se presentan ejemplos de las producciones en las categorías halladas.

Tabla 9.

Ejemplos de los tipos de problemas multiplicativos de una etapa.

Proporcionalidad simple de multiplicación	Proporcionalidad simple partitiva
Diego come 2 barras de chocolate al día durante el mes de febrero. ¿Cuántos comió en el mes?	Jose quiere repartir sus 58 auritos en 14 cajas. ¿Cuántos auritos le caben en cada caja?
Proporcionalidad simple cuotitiva	Comparación por aumento
En un curso hay 56 Alumnos, si la profesora los divide en grupos de 4 alumnos cada uno ¿cuántos grupos hay?	Juan tiene 56 laminas y su amigo James tiene 14 veces las laminas de Juan, ¿Cuántas laminas tiene James?

Del abanico de posibilidades para crear un problema multiplicativo los estudiantes en esta oportunidad abarcan solo la mitad, la que a su vez es ampliamente liderada por el tipo proporcionalidad simple de multiplicación.

En último lugar, es interesante destacar que en promedio el porcentaje de creación fue de 43 problemas para cada una de las tres situaciones que conformaron el reactivo, no existe alguna situación que haya presentado importante baja de respuesta, a pesar que en la primera situación no se ofrecía información cuantitativa de base a diferencia de las otras dos. Sin embargo, es necesario agregar que fue frecuente observar a los estudiantes comenzar por las otras situaciones y esa dejarla para el final, dado que era algo esperado y permitido para evitar generar frustración en los estudiantes, es un dato que solo se observó y no cuantificó. Lo anterior revela que aquellos estudiantes capaces de inventar problemas multiplicativos, lo hacen independiente de la estrategia empleada para inducir el proceso.

Resultados según tipo de problemas multiplicativos de dos etapas

Con el fin de obtener mayor detalle sobre los 47 problemas creados de dos etapas, (considerar que cada enunciado presenta dos operaciones) primero se aísla y luego se aplica a cada proposición la clasificación tipo de problema multiplicativo según estructura semántica (Castro y Ruíz, 2011) del mismo modo que se ejemplificó en el capítulo anterior (ver Tabla 7).

Como se observa en la Figura 11 los problemas de dos etapas también presentan con mayor frecuencia el tipo proporcionalidad simple multiplicativa independiente si es en la primera o segunda proposición, vale decir, que de las 94 proposiciones estudiadas el 55% de estas presentan relaciones de multiplicación directas o de baja complejidad.



Figura 11. Tipo de problemas multiplicativos para cada proposición.

Adicionalmente destaca que para la segunda proposición los estudiantes emplean relaciones aditivas, las que se emplean como complementos en el planteamiento de sus problemas, por

esta razón ha sido considerado como dato estadístico, aun cuando no pertenecen a la estructura estudiada.

Es necesario aclarar que tal como se expuso en el marco teórico, la clasificación de tipo de problema multiplicativo es una variable que, por una parte, permite clasificar los problemas multiplicativos según las relaciones semánticas presentes, pero, al mismo tiempo resulta un indicador de la complejidad matemática del enunciado. Por ejemplo; los problemas clasificados del tipo producto cartesiano en el que las relaciones entre las cantidades implican una combinación adquieren mayor complejidad matemática, por sobre aquellos en los que la operación multiplicativa se presenta directa entre dos cantidades como el tipo proporcionalidad simple multiplicativa.

Por esta razón, aun cuando los estudiantes crean problemas de dos etapas, los cuales de acuerdo a la literatura revisada se asignan de mayor complejidad matemática, es pertinente desglosar los resultados antes de asignarlos inmediatamente como problemas de mayor complejidad, ya que, tal como se ha visto en esta oportunidad; el 60% de los problemas no resultan complejos por presentar relaciones semánticas de mayor nivel, como las de comparación (presente en un 5%), combinación (0%) o producto cartesiano (2%), sino que se mantienen en relaciones multiplicativas directas u operacionales, en consecuencia los enunciados están siendo asignados como problemas más complejos exclusivamente por poseer dos proposiciones (operaciones), perteneciendo a la categoría de dos o más etapas.

Para concluir, los resultados muestran que la proporcionalidad simple multiplicativa es el tipo de problema más presente entre los estudiantes, más de la mitad de los problemas ya sean de una o dos etapas, generan enunciados usando relaciones semánticas simples y directas entre sus cantidades, por ende, resultan de menor complejidad matemática. Además, la operación de división aun cuando es parte de la estructura multiplicativa, está presente en menor cantidad 18% y 13% para los problemas de una etapa o dos etapas respectivamente. Por último, los tipos de problemas de mayor complejidad desde el punto de vista semántico; comparación y producto cartesiano con sus respectivas sub clases están presentes mínimamente, solo se describe un problema de tipo comparativo por aumento para los de una etapa, mientras que la presencia de estos aumenta levemente a un 7% en aquellos problemas de dos etapas los cuales de por sí son considerados más complejos como se explicó anteriormente.

Resultados según complejidad matemática

Para el análisis de esta variable se considera la totalidad de PMM obtenidos, a los cuales se aplican los criterios que se recogen en PISA (2012) expuestos en el segundo capítulo, los que clasifican el problema de acuerdo a la complejidad matemática según reproducción, conexión o reflexión.

De acuerdo a los resultados que se presentan en la Figura 12, se aprecia que en su mayoría los problemas presentan baja complejidad matemática, se caracterizan por involucrar operaciones de multiplicación o división de tipo directas, las cantidades que intervienen son bajas y son característicos de este nivel de complejidad los problemas del tipo proporcionalidad simple, ya sea multiplicativa, partitiva o cuotitiva.

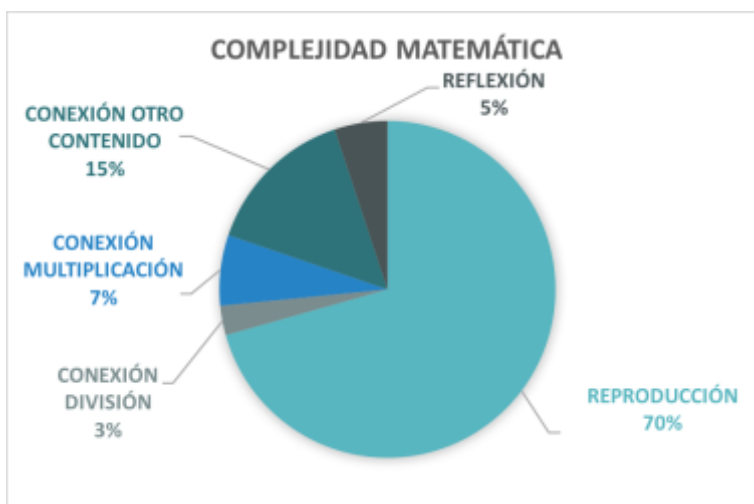


Figura 12. Clasificación de lo PMM según complejidad matemática

Por otra parte, aquellos problemas de conexión que implican mediana complejidad representan el 25% del total de PMM, de acuerdo a la definición establecida en el marco teórico se clasificaron bajo estos dos criterios; primero, si en el enunciado se alude a otro contenido matemático en segundo lugar, y de acuerdo a la bibliografía consultada aquellos problemas que presentan dos etapas -aquellos que de su enunciado se desprenden dos o más operaciones a realizar- inmediatamente se consideran de mayor complejidad. Obteniendo que los PMM de una etapa pueden ser de reproducción o reflexión, en cambio, PMM de dos etapas solo pueden ser clasificados de conexión o reflexión, ya que la reproducción está en un nivel inferior de complejidad. En este caso, se diferenció el tipo de conexión dependiendo si el enunciado se relaciona con la multiplicación, división u otro contenido matemático, ya sea para la primera o segunda proposición.

Así, en esta aplicación a colegios se obtiene que la conexión con otro contenido matemático está presente en el 15% de los enunciados, cabe precisar que, de este valor 23 enunciados conectan con la estructura aditiva mientras que solo 3 problemas conectan con otro contenido matemático específicamente área, volumen y mínimo común múltiplo.

En el siguiente ejemplo (Figura 13) se aprecian las dos proposiciones multiplicativas del tipo producto cartesiano de medida, de las operaciones implicadas, la primera es multiplicativa y la otra aditiva.

En un hospital se construyó una sala de pediatría de 35 metros por 20 m. también se hizo un lugar para Kinesioterapia de 4 metros por 10 m. ¿Cuántos metros tienen esos espacios en total?

Figura 13. Asignación de problema según complejidad matemática del tipo conexión.

En consecuencia, este problema es clasificado de conexión por referir al contenido de área además de involucrar más de una operación.

Por último, 9 enunciados se identificaron en el mayor nivel de complejidad matemática; reflexión, los que presentan relaciones no directas y poco explícitas entre las cantidades. Además, estos problemas se caracterizan por entregar en el enunciado alguna condición, la cual no permite resolver el problema de manera inmediata, complejizándolo. También fue posible identificar la pregunta como un elemento que asigna complejidad, en vez de ser explícitas, solicitan más conclusiones o se presentan más rebuscadas, por ejemplo; ¿cuánto consume en un año?, ¿cada cuánto se le agota un frasco? ¿Le va a faltar o sobrar dinero? Lo anterior se evidencia en la Figura 14.

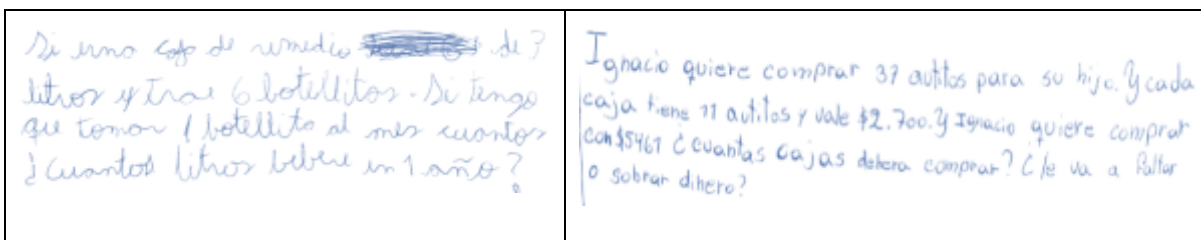


Figura 14. Asignación de problemas según complejidad matemática del tipo reflexión.

Resultados según cómo resuelve

Si bien no es parte esencial del objetivo, ya que el interés radica en la capacidad para inventar problemas de multiplicación, se planteó adicionalmente explorar sobre la

capacidad de resolución a los propios problemas inventados. Considerando el hecho de que como parte natural del proceso de invención de problemas resulta favorable para los estudiantes resolver y comprobar los problemas, con el fin de realizar diversos ajustes ya sea sobre las cantidades, las relaciones entre estas, la pregunta del problema, entre otros. Con esto el inventor se asegura que su problema es viable.

Los resultados muestran que de los 177 problemas que han inventado los estudiantes, logran responder correctamente a través de la estructura multiplicativa el 78% de estos, mientras que solo un 16% lo hace incorrectamente. Por otra parte, si bien en el contexto de esta tarea no se pedía trabajar con la estructura aditiva, igualmente un 2% de los estudiantes recurren a esta estructura para resolver sus problemas, es decir existe un porcentaje mínimo de estudiantes que si bien es capaz de crear problemas multiplicativos no logra operar en esta estructura y recurren a la estructura aditiva. Por último, un 3% de estudiantes que sí inventa un PMM no aborda la sección de resolución.

Resultados según tipos de contextos

En cuanto a la clasificación realizada para determinar los tipos de contextos se consideran las categorías descritas por PISA (2006, 2012) y expuestas en el marco teórico, además en el apartado metodológico se amplía y ejemplifica el modo en que los enunciados se asignan a las cuatro categorías. Pero en resumen se identifica el tema a través de una lectura general que permita identificar una categoría que englobe al enunciado, por ejemplo; supermercado, aula de clases, hospital, farmacia, etc. Solo cuando esto se dificulta, porque el enunciado no entrega dicha información se recurre a otros elementos como identificar la acción que se realiza (compra de remedios, venta de productos, fabricación de productos) o identificando los sujetos (amigos, compañeros de curso, familia, animales, etc.).

Con esta información se asignan al contexto personal, educativo/laboral, social y científico. En esta oportunidad el 69% de los problemas multiplicativos presentó un enunciado en contexto personal, el 17% lo hizo en contextos educativo o laboral, mientras que el 14% restante inventó sus problemas en contextos sociales, ninguno de los problemas pudo ser asignado al contexto científico.

En la Tabla 10 se aprecian algunos ejemplos de los temas que se incluyó en las tres categorías descritas.

Tabla 10.

Detalle de tipos de contextos.

Personal	Educativo/Laboral	Social
Sueldo	Aula	Banco
Natación	Escuela de canto	Bandas de música
Compra comida	Materiales escolares	Cine
Compra remedio	Revista escolar	Hospital
Mesada	Almacén	Municipalidad
Amigos	Empresa	Parada de buses
Tecnología	Restaurante	Supermercado
Juguetes	Universidad	Grupo Scout

Al mismo tiempo, se estudian los tipos de contextos creados para cada una de las tres situaciones presentadas en el instrumento. En la Figura 15 se aprecia que para las tres situaciones predomina ampliamente el contexto personal.

Pero destaca el hecho de que sea en la situación 3 (números) donde se producen un mayor porcentaje de problemas en dicho contexto.

Esta información resulta relevante, ante una situación numérica desprovista de contexto, el 85% de los estudiantes le otorga significado al relacionarlas

con contextos personales. Para el caso de la situación número 2 (remedios) un 60% y 25% de los estudiantes generan problemas en contexto personal y educativo/laboral respectivamente, solo un 14% relaciona la imagen con contextos sociales.

Se decide exponer al final los resultados para la situación 1, porque toca explayarse en algunos puntos importantes. Primero destacar que esta situación no ofrecía ninguna

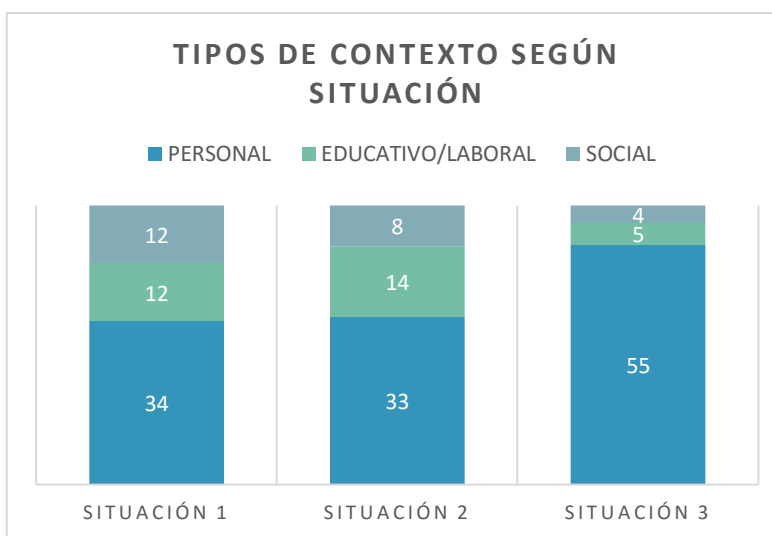


Figura 15. Tipos de contextos de acuerdo a cada situación, para los PMM.

información numérica de base, de hecho, se asignó un espacio en blanco con el encabezado: inventa un problema matemático. Y como ya ha sido señalado existió predominancia del contexto personal para las tres situaciones, en esta en particular corresponde al 59% de los enunciados. Sin embargo, llama la atención que al considerar solo los resultados de los contextos sociales para las tres situaciones aquella que no ofrece ningún dato, ha alcanzado el 50% de problemas en contextos de tipo sociales, frente a un 33% para la situación 2 y un 17% en la situación 3. Además, solo ésta situación desprovista de datos permitió mayor homogeneidad entre los tres tipos de contextos empleados por los estudiantes, siempre teniendo en cuenta que el contexto personal es el predominante para todas las situaciones.

4.2 ANÁLISIS ENTREVISTA A PROFESORES DE MATEMÁTICA DE COLEGIO A, B Y C

Las entrevistas se tratan usando el método de análisis de contenido por pregunta, manteniendo como categorías generales las dimensiones preestablecidas al elaborar el guion, estas son: antecedentes, resolución de problemas e invención de problemas. Luego se identifican los temas comunes que exponen los tres profesores, para cada dimensión.

Es preciso señalar que para los efectos del estudio se considera que la diferenciación por género no contribuye, por lo tanto, los profesores son identificados con la misma letra del colegio al cual pertenecen y se emplea el término profesor por convención.

A continuación, en la Tabla 11 se presentan las preguntas realizadas y se detalla de qué tipo son, siguiendo la misma estructura que se les presentó a los entrevistados, se completa el cuadro con las respuestas expresadas por los profesores.

Tabla 11.
Antecedentes profesores entrevistados

	Profesor A	Profesor B	Profesor C
Años de experiencia	3	30	15
Pregunta de opinión sobre la actividad			
¿Cree que sus estudiantes inventen PMM?	Seguro	Inseguro	Seguro
Pregunta de ejemplificar y opinión acerca de la RP			
¿Ha considerado la RPM en sus clases? ¿De qué manera?	Sí, asociados a lo cotidiano	Sí, asociados al contenido	Sí, asociados a la investigación

Tabla 11.
Antecedentes profesores entrevistados

	Profesor A	Profesor B	Profesor C
Años de experiencia	3	30	15
¿Considera la RPM importante para el proceso de enseñanza aprendizaje?	Sí, permite razonar de forma más activa	Sí, desarrolla el pensamiento matemático	Sí, favorece la autonomía
Pregunta de conocimiento, ejemplificar y contraste sobre la IP			
¿Conoce el tema de la IP?	No	Sí	Sí
¿De qué manera lo ha trabajado en sus clases?	–	Estudiantes crean problemas de sumas y restas	Estudiantes proponen sus ejemplos
¿Ha considerado la reformulación de problemas?	No	No	No
Para la enseñanza de la multiplicación se concentra en el algoritmo o RPM.	Algoritmo	Ambos	Ambos

En términos generales se puede indicar que los tres profesores son conscientes de la línea educativa que introduce la resolución de problemas al aula para la enseñanza específica de la matemática, en efecto todos declaran emplearla para el desarrollo de sus clases.

A partir de las descripciones que los profesores realizan sobre cómo trabajan la RP en sus clases y siguiendo la descripción que realizan los autores Blanco, Cárdenas y Caballero (2015), quienes describen las diferentes acepciones sobre el modo en que se emplea la RP es posible indicar que para el caso de los Profesor A y B tienen un enfoque tradicional definido como *Enseñanza para la resolución de problemas*, en dónde los estudiantes aplican sus conocimientos en la resolución de problemas al final de la introducción a algún concepto o término de capítulos o lecciones. Mientras que, de acuerdo al trabajo descrito por el Profesor C se relaciona con la *Enseñanza sobre la resolución de problemas* método más complejo en la que esta actividad adquiere un rol más central, se favorece la reflexión y discusión sobre el propio proceso. Ninguna de las prácticas ejemplificadas por los profesores podría relacionarse con el uso de la *Enseñanza vía resolución de problemas*, en dónde a través de problemas iniciales se generan y consolidan los conocimientos matemáticos favoreciendo la construcción de estos, cabe señalar que este enfoque tampoco

está presente en el currículo nacional, al menos para la enseñanza de la multiplicación, como se ha podido constatar tras el análisis curricular realizado.

Para cerrar las preguntas sobre este tema se les consulta por la importancia que le otorgan a la RP para el proceso de enseñanza-aprendizaje, ante lo cual todos están de acuerdo resulta importante y cada cual le asigna una razón particular. Pero lo destacable es que todas sus razones en mayor o menor medida sí se relacionan con lo expuesto por los expertos en la materia, es decir los estos profesores tienen conciencia sobre los beneficios y aportes que trae la práctica de esta actividad.

En otro punto, al preguntárseles por la invención de problemas tema central para la investigación, el profesor del colegio A declara no conocerla y en su respuesta a la pregunta ejemplificadora no aborda el tema tratado, por esta razón no es considerada. En cambio, los profesores B y C quienes solicitan mayor información, al explicarles y ejemplificar en qué consiste la invención, el primero añade utilizarla poco, y el segundo señala que es parte de su práctica diaria. Para profundizar más sobre este tema, se les pregunta por la reformulación de problemas, una modalidad particular de trabajar la invención de problemas, ante la cual los tres profesores declaran no conocerla.

Por último, era importante conocer cuál es la forma de enseñanza que utilizan para abordar la multiplicación, se les presenta una pregunta de contraste en la cual debían seleccionar su preferencia sobre la RP o la enseñanza el algoritmo de acuerdo a sus prácticas, el profesor A declara el uso del algoritmo como estrategia de enseñanza, y los profesores B y C indican utilizar ambas estrategias. Las tres respuestas resultan congruentes con lo expuesto a lo largo de la entrevista, ha quedado claro que si bien dos profesores manifiestan en esta última respuesta usar la RP cada uno lo hace con enfoques distintos.

Finalmente, las respuestas de los profesores muestran lo que ya ha sido apreciado por otros autores (Donoso, Rico y Castro, 2016; Felmer *et al.*, 2014), los profesores conocen esta línea educativa y en alguna medida están conscientes de los aportes que trae al proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática, pero no lo abordan como una práctica regular en sus clases, y si lo hacen es desde el enfoque tradicional *Enseñanza para la resolución de problemas* al emplearlo como medio para practicar los conocimientos matemáticos adquiridos durante la lección.

En cuanto a la invención de problemas, se aprecia que el conocimiento de los profesores es escaso sobre este modelo para el aprendizaje de la matemática, dejando de lado algunas estrategias específicas como la reformulación de problemas.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Continuando con el estilo llevado hasta ahora, las conclusiones se presentan organizadas en el orden de las temáticas tratadas. En primer lugar y para concluir el objetivo planteado en un inicio: caracterizar los problemas matemáticos multiplicativos a partir de variables determinadas, se describen las principales características halladas en los enunciados planteados por los estudiantes. Luego se presentan evidencias sobre las habilidades de invención de problemas que presentaron los tres grupos de estudiantes.

Para tratar las características de los problemas multiplicativos se atenderán a los objetivos específicos que fueron consignados en el Capítulo 1:

- Identificar y describir los tipos de tareas multiplicativas desarrolladas por los estudiantes, a través de la creación de problemas matemáticos.

De los análisis se desprende que la gran mayoría de los enunciados corresponde al tipo proporcionalidad simple multiplicativa; es decir, son enunciados de la forma $a \times b = ?$, en el cual dos cantidades se operan para hallar el valor de la tercera; por ello, las relaciones semánticas entre dichas cantidades se describen como simples y directas. Esto es independiente del número de etapas (cantidad de operaciones) que incluya el problema, como se apreció el 81% de los enunciados de una etapa corresponde a este tipo de problemas.

Por su parte, para el caso de los problemas de dos o más etapas en la que el enunciado presenta por lo general dos proposiciones, se identifica en la primera un 60% de operaciones con la forma descrita, asignándose el tipo proporcionalidad simple multiplicativa, mientras que para la segunda proposición se evidenció que, además de presentar el 51% de operaciones con este mismo formato, los estudiantes recurren a la estructura aditiva para aportarle dificultad a sus problemas.

Finalmente, estos resultados muestran que los estudiantes tienen integrado un solo modelo de problema multiplicativo, el más simple. De hecho, la variante que se identifica en segundo lugar, para crear problemas de multiplicación es la división. El porcentaje en que

se emplea es muy inferior y no alcanza el 20%, ya sean problemas de una o más etapas. Aunque resulta destacable que ese porcentaje de estudiantes sí tiene presente la relación inversa entre la multiplicación y división.

Por último, es necesario indicar la necesidad de presentar todos los tipos de problemas multiplicativos descritos, en pos de consolidar el concepto de multiplicación íntegramente. Hoy día este grupo de estudiantes no es capaz de relacionar las cantidades multiplicativamente en situaciones más complejas como; la comparación, producto cartesiano de medida y combinación e igualación.

- Identificar y describir niveles de complejidad de tareas multiplicativas que desarrollan los estudiantes, a través de la creación de problemas matemáticos.

En cuanto a estas cualidades los resultados muestran que los estudiantes en su mayoría (70%) producen problemas de reproducción, es decir de baja complejidad matemática de los problemas formulados. Esto se debe a que los problemas incluyen una sola operación de tipo directa, ya sea de multiplicación o división. Por otra parte, un 25% de los estudiantes sí logra crear problemas más complejos, ya sea porque incluyeron más de una etapa en su problema o establecen relaciones intramatemáticas.

Sobre la presencia de otros contenidos matemáticos, es necesario destacar que en su amplia mayoría se estableció conexiones con la estructura aditiva, y no se evidencia la presencia de una diversidad de contenidos. El máximo nivel de complejidad fue alcanzado por la minoría de los estudiantes. Aunque, de acuerdo a la literatura revisada, en otras intervenciones de invención de problemas se les ha propuesto a los estudiantes crear problemas que sean difíciles de resolver, en esta oportunidad se decidió omitir esta instrucción, por lo que se desconoce si los estudiantes hubieran manifestado mayor complejidad en sus producciones.

- Identificar y describir los contextos de tareas multiplicativas que desarrollan los estudiantes, a través de la creación de problemas matemáticos.

Los estudiantes han inventado el mayor número de problemas en contextos personales, en segundo lugar, inventan problemas relacionados a contextos educativo/laboral y en última instancia presentan enunciados en contextos sociales. Aunque esto podría haberse visto influenciado por la selección de las situaciones ofrecidas, llama la atención que ante la

situación que no ofrecía datos de ningún tipo, los estudiantes hayan aumentado la producción en el contexto social. Lo cual podría indicar interés por parte de los estudiantes frente a otros contextos más allá del personal. No hay que perder de vista, que la mayoría de las producciones son de reproducción y del tipo proporcionalidad simple, por ende, es de esperarse que la mayoría de los problemas pueden ser parte de una internalización de la operación multiplicativa y reproducción de situaciones en contextos elementales. Sin embargo, la situación que entregaba completa libertad para inventar un problema, es la que presenta mayor diversidad de contextos, esto podría indicar disposición para trabajar los conceptos matemáticos en otros contextos. De hecho, destacan varios contextos relevantes como la tecnología, sueldos, universidad, hospital, municipalidad, banco, entre otros, lo cual indica que los estudiantes tienen un sentido funcional de la operación de matemática y de la multiplicación más específicamente. Ahora, convendría abrir más las fronteras y relacionar este contenido a contextos científicos, el cual estuvo completamente ausente en los enunciados.

En cuanto a las recomendaciones, principalmente se destaca la necesidad de que el profesor a cargo de la enseñanza de la matemática debe ofrecer a los estudiantes variedad, riqueza y complejidad en los ejemplos que les presenta, entendiendo que esta simple acción es la pauta para el posterior quehacer del estudiante. Como muestran los resultados es poco probable que los estudiantes inventen problemas complejos y en contextos científicos, si la enseñanza se está realizando con base en problemas de baja complejidad matemática y en contextos mayoritariamente personales.

Es aceptable, incluso otros estudios así lo recomiendan, comenzar la enseñanza de un contenido, para un nivel escolar temprano, a partir de situaciones familiares y próximas al estudiante (contexto personal), pero en la medida que se avanza en edad resulta desfavorable no introducir contextos laborales, sociales y científicos. Así como no avanzar en la complejidad matemática lo cual resulta imprescindible para lograr una apropiación completa del concepto. Retomando a Orozco (1996), es igualmente importante para que el aprendizaje de la multiplicación se consolide, dejar atrás el uso de la suma repetida para su resolución, este proceso se puede favorecer aumentando las cantidades e introduciendo problemas multiplicativos del tipo no directo, como los de comparación y producto cartesiano.

Por último, se añaden algunas observaciones sobre las habilidades de invención de problemas que presentaron los tres grupos de estudiantes, en base al número de problemas matemáticos obtenidos, se indica en términos generales que el 54% de los estudiantes logra la tarea de inventar problemas con la condición solicitada de ser multiplicativos. Estos resultados son alentadores al considerar que es una actividad realizada con poca frecuencia por los estudiantes, de acuerdo a lo reportado por sus profesores. Sin embargo, esta mirada optimista contrasta con los porcentajes de logro alcanzados según los colegios, en que todos se mantienen bajo el 40%. Pero, considerando que los tres profesores manifiestan uso poco frecuente de la invención de problemas, la que además no es abordada de acuerdo a los métodos que recomiendan los expertos, los resultados son positivos, esto podría indicar que los estudiantes estarían receptivos frente a actividades de este tipo.

En relación a esto último, resulta destacable que en las tres oportunidades de aplicación del instrumento a los alumnos de los colegios A, B y C, no se produce ningún acontecimiento importante de rechazo o frustración ante la actividad propuesta. En segundo lugar, destaca el desafío y motivación que implicó para los estudiantes conseguir inventar problemas, esto se desprende del bajo porcentaje (7%) que no responde a la tarea. Dato que además se complementa con el porcentaje de respuestas que va en relación a la tarea principal de crear en las que se incluyen: enunciados operacionales (8%) los que aun cuando no logran ser considerados problema matemático por presentar ausencia de pregunta, datos o incoherencia verbal manifiestan la intención de crear uno, y aquellos problemas matemáticos aditivos (11%) que igualmente ponen de manifiesto una actitud de interés y compromiso por parte del estudiante de dar respuesta a lo solicitado.

Finalmente, se aprecia el potencial creativo de los estudiantes para desarrollar la tarea. Han figurado problemas en contextos y complejidad interesantes, lo cual sugiere que los estudiantes de este nivel educativo están plenamente capacitados para abordar la tarea de invención de problemas, y que con la práctica regular posiblemente complejicen sus problemas, para ello, es necesario discutir, compartir los problemas, generar instancias de análisis grupales sobre los enunciados, o de intercambio para trabajar en su resolución.

Las posibilidades de práctica educativa en este tema son bastante amplias, tal como han sido reportadas, lo importante es que los profesores la incluyan como parte de su quehacer matemático y pase de ser considerada como una actividad poco frecuentada, a una actividad

central la cual permita el aprendizaje de múltiples contenidos matemáticos. Por ejemplo, este tema ya ha sido estudiado para las fracciones, ahora se presentó para la multiplicación, teniéndose precedentes de su importancia en el aula. Al margen del contenido, sin duda entrega información relevante al profesor sobre el nivel de aprendizaje de sus estudiantes tal como se evidenció en este estudio, a la vez que estos se mantienen motivados como se pudo observar y como ha sido reportado en otras investigaciones.

5.1 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Al momento de plantear a los estudiantes una actividad de invención de problemas era evidentemente necesario que estos tuvieran un marco de conocimiento claro sobre qué es un problema matemático. Este aspecto se intentó subsanar presentando como introducción a la actividad un breve video en el cual se resumen las principales características para que un enunciado sea un problema. Lo cual no fue suficiente, de acuerdo a la cantidad de problemas que no fueron sujeto de análisis, justamente por no ser un problema matemático. Por lo tanto, existe una necesidad de hacer una inducción con mayor profundidad sobre qué es un problema matemático, para que los estudiantes estén mejor preparados para inventarlos.

5.2 PROYECCIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Teniendo en cuenta que la invención de problemas es una actividad relativamente nueva y poco contemplada en el currículo son varias las líneas investigativas en el cual se puede profundizar. Directamente relacionado con este estudio, podría emplearse el marco de análisis desarrollado para caracterizar los problemas de división que generen estudiantes de distintos niveles educativos.

Otro punto importante que se evidenció como fuente rica de información, es el estudio de las resoluciones que plantean los estudiantes, las cuales si bien, fueron consideradas de una manera superficial, existen relaciones por profundizar en cuanto al nivel de conocimiento que expresan tanto en la invención de un problema como en la forma que resuelven el mismo problema. Asimismo, las producciones de los estudiantes pueden ser analizadas según las respuestas formuladas, de modo de extraer información sobre el significado de multiplicación que conciben.

Por último, usando las categorías emanadas del trabajo es posible caracterizar problemas vinculados a otros contenidos matemáticos, ya que el estudio del contexto y complejidad matemática son elementos de interés en el ámbito nacional como internacional.

REFERENCIAS

- Agencia Calidad de la Educación (2015). Informe Nacional de Resultados 2013. *Ampliando la Mirada de la Calidad Educativa*. (pp.165-172). Recuperado de archivos.agenciaeducacion.cl/documentos-web/Informe_Nacional_Resultados_Simce2013.pdf.
- Agencia Calidad de la Educación (2014). Apuntes Sobre la Calidad de la Educación. *Análisis de los resultados de la prueba PISA 2012*. Recuperado de archivos.agenciaeducacion.cl/biblioteca_digital_historica/estudios/2014/apuntes15_2014.pdf.
- Alsina, À. (2009). Matemáticas en la educación primaria. En N.Planas y À. Alsina (2009). *Educación matemática y buenas prácticas*. Barcelona: Graó.
- Ayllón, M. F., Gómez, I., y Ballesta-Claver, J. (2016). Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. *Propósitos y Representaciones*, 4(1), 169-218.
- Ayllón, M. F., Gallego, J. L., y Gómez, I. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. Recuperado en: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S018526982016000200051&script=sci_arttext.
- Ayllón, M.F., Castro, E., y Molina, M. (2008). Invención de problemas por alumnos de educación primaria. En Molina, M.; Pérez-Tyteca, P., Fresno, M.A. (eds.), *Investigación en el aula de matemáticas: competencias matemáticas*. Granada: S.A.E.M. Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 225-234. Recuperado en <http://funes.uniandes.edu.co/1576/1/MARUJATHALES2007.pdf>.
- Blanco, L. (2015). Resolución de problemas de matemáticas: aspectos cognitivos y afectivos. En L. Blanco, J. Cárdenas, y A. Caballero. *La resolución de problemas de matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria*, (11-16) Cáceres, España: Universidad de extremadura.
- Blanco, L., y Cárdenas, J. (2013). La resolución de problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, 29(1), 137-156.
- Blanco, L., Cárdenas, J., y Caballero, A. (2015). *La resolución de problemas de matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria*, Cáceres, España: Universidad de extremadura.
- Brown, S. I., y Walter, I. (1990). *The art of problem posing* (2nd ED). Hillsdale, NJ: Labor.
- Castro, E., y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de magisterio sobre la estructura multiplicativa. En Giménez, J., Llinares S., Sánchez,

- M. (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria*. Cuestiones desde la educación matemática (pp.119-141.). Granada: Comares.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo, R., Gómez, B., Camacho, M., Blanco, L. (eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140).Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. España.
- Castro, E. y Ruiz, J. F. (2011). Aritmética de los números naturales. Estructura multiplicativa. En Rico. L, y Segovia. I (eds.), *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. (99-121). Madrid: Pirámide.
- Carrillo, J. (1995). Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. *Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 2(2), 125-143.
- Cruz, M. (2006). La enseñanza de la Matemática a través de la Resolución de Problemas. (Tomo 1). La Habana: Educación Cubana.
- Coffey, A., y Atkinson, P., (2003). Encontrar el sentido a los datos cualitativos, Colombia: Universidad Nacional de Antioquia. Recuperado de <http://www.fceia.unr.edu.ar/geii/maestria/2014/DraSanjurjo/8mas/Amanda%20Coffey,%20Encontrar%20el%20sentido%20a%20los%20datos%20cualitativos.pdf>.
- Donoso, P., Rico, N., y Castro, E., (2016). Creencias y concepciones de profesores chilenos sobre las matemáticas, y su enseñanza y aprendizaje. *Profesorado revista de currículum y formación del profesorado*. 20(2), 76-97.
- Ellerton, N. (1986). Children's made-up mathematics problem and new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261-271.
- Ellerton, N. (2015). Problem posing as an integral component of the mathematics curriculum: a study with prospective an practicing middle-school teachers. In Singer et al. (eds), *Mathematical problem posing* (pp. 514-513). New York: Singer.
- Espinoza, J., Lupiañez, J., y Segovia, I. (2013). Ámbitos de investigación en invención de problemas matemáticos. *Educación Científica Y Tecnológica*, (Edición especial), 187-191.
- Espinoza, J., Lupiañez, J., y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Matemática, Educación e Internet*, 14, 2-14.

- Espinoza, J., Lupiañez, J., y Segovia, I. (2015). Un esquema para analizar los enunciados de los estudiantes en contextos de invención de problemas. *Uniciencia* 9(1) 58-81. Recuperado de <http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/6245/6265>.
- Felmer, P. y Perdomo-Díaz, J. (2016) Novice chilean secondary mathematics teachers as problem solvers. En Felmer, P; Pehkonen, E., y Kilpatrick. J. (eds.) *Posing and solving mathematical problems. Research in Mathematics Education* (287-307). Springer, Cham.
- Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisterna. T., Cea, F., Randolph, V. y Medel, L. (2014). La resolución de problemas en la matemática escolar y el formación inicial docente. (Proyecto FONIDE N°:721209). Santiago, Chile. Recuperado de ciae.uchile.cl/download.php?file=noticias/555_-1410884943.pdf.
- Fernández Bravo, J. A. y Barbarán, J. J. (2015). *Inventar problemas para desarrollar la competencia matemática*. Madrid, España: La muralla.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.
- Giaconi, V., Felmar, P., Peri, A., y Espinoza, C. (2015). *Visión de los docentes respecto a sus prácticas y dificultades en la resolución de problemas*. Recuperado de villarrica.uc.cl/files/matematica/trabjaosnac_int/CN%2009.pdf (Versión Borrador).
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6th ed.). D.F, México: Mc Graw Hill.
- Isoda, M. y Olfos, R. (2009). *La enseñanza de la multiplicación. El estudio de clases y las demandas curriculares*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Kilpatrick, J. (1978) Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (eds.), *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.
- Lester, F.K. (1983). Trends and issues in mathematical problem solving research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts am processes*. London: Academy Press.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: El autor.
- National Council of Mathematics Teachers (NCTM). (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Resron, VA: El autor.
- Noda, A. (2000). *Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del primer ciclo de la ESO y maestros en formación*. Tesis doctoral, Universidad de la Laguna, España.

- Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica. Unidad de Currículum y Evaluación*. Ministerio de Educación: República de Chile.
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, Ciencia y la Cultura (OREALC/UNESCO). (2016). *Aportes para la enseñanza de la matemática*. Santiago, Chile:UNESCO.
- OCDE. (2006). *El programa PISA de la OCDE. Qué es y para qué sirve*. Recuperado de oecd.org/pisa/39730818.pdf.
- OCDE (2012). Programa para la evaluación internacional de alumnos (PISA). Resultados PISA 2012 Resolución de Problemas. Recuperado de oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-PS-results-esp-SPAIN.pdf
- OCDE (2014). Results: Creative Problem Solving: *Students' Skills in Tackling Real-Life Problems*, PISA, OECD. Recuperado de oecd.org/pisa/keyfindings/PISA2012_Overview_ESP-FINAL.pdf
- Orozco, M. (1996). *La estructura multiplicativa*. Recuperado de http://objetos.univalle.edu.co/files/La_estructura_multiplicativa.pdf
- Pino, J. (2015). Tipos de problemas de matemáticas. En Blanco, L., Cárdenas, J., y Caballero, A. (eds.), *La resolución de problemas de matemáticos en la formación inicial de profesores de primaria*, (187-205) Cáceres, España: Universidad de extremadura.
- Pólya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. Granada: Comares.
- Santos, M. (2001). Problem posing and problematization in learning and teaching mathematics. *Adult Education and Development*. 57, 107-121.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *Fort the learning of Mathematics*, 14(1) 19-28.
- Stoyanova, E. (1998). Problem posing in Mathematics classrooms. In A. McIntosh y N. Elleerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. Edit. Cowan University: MASTEC, 164-185
- Vergnaud, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10(2,3). 133-170. Recuperado de http://fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf

ANEXOS

ANEXO 1. INSTRUMENTO APLICADO FASE 1 ACTIVIDAD PILOTO



CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Te invitamos a ser parte de una investigación, creando cinco problemas matemáticos.

Creemos que los estudiantes tienen la capacidad no sólo de resolver problemas, sino también de crearlos... ¿te animas?



PEDAGOGÍA BÁSICA
ESPECIALIDAD
MATEMÁTICA

INVESTIGACIÓN
SOBRE INVENCION
DE PROBLEMAS
MATEMATICOS
MULTIPLICATIVOS

PROFESORAS
NIELKA ROJAS Y
FABIANA
SCATTARÉTICA

DIRIGIDO A
ESTUDIANTES DELTA
TALLER DE VERANO
2017

¡ES MOMENTO DE CREAR!

Nos alegra que desees participar creando y resolviendo cuatro problemas matemáticos usando la multiplicación.

A continuación, te presentamos cuatro imágenes, inspírate en ellas te servirán para crear tus problemas, aunque puedes modificar e inventar los datos que tú quieras.

1. SITUACIÓN



Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:

1

2. SITUACIÓN

14

56

Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:

2

3. SITUACIÓN



Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:

3

4. SITUACIÓN

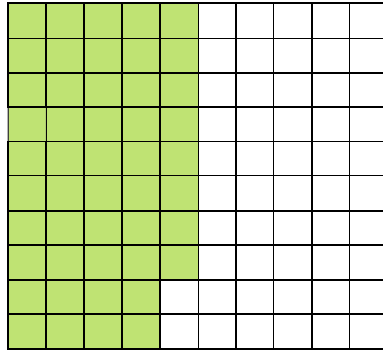


Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:

5. SITUACIÓN

La siguiente figura ha sido dividida en cuadrados iguales:



Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:

5

ANEXO 2. INSTRUMENTO APLICADO DURANTE FASE 2: COLEGIOS



INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA		
PROFESORAS: NIELKA ROJAS - FABIANA SCATTARÉTICA		
COLEGIO:	CURSO:	EDAD:



**TE INVITAMOS
A INVENTAR
PROBLEMAS
MATEMÁTICOS**

¡ES MOMENTO DE CREAR!

Nos alegra que desees participar **creando y resolviendo 3 problemas matemáticos**, el único requisito: es que uses la multiplicación.

Inspírate en las imágenes que se presentan te servirán para crear tus problemas, siempre puedes modificar e inventar los datos que tú quieras.

SITUACIÓN 1

Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:

SITUACIÓN 2



Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:

SITUACIÓN 3

14

56

Inventa un problema matemático:

Escribe aquí los cálculos necesarios para resolver el problema:



Entrevista Invención de problemas

Estimado/a profesor: El objetivo de la presente entrevista es conocer sus ideas generales con respecto a los temas: Resolución de problemas e Invención de problemas matemáticos.
Solicitamos a usted autorización para grabar esta conversación (audio).

Desde ya agradecemos su participación y colaboración.

I. INFORMACIÓN GENERAL

Establecimiento:	
Años de experiencia:	

II. Aborde los siguientes temas en función de su experiencia a cargo de la enseñanza de la asignatura de Matemática.

1. En esta actividad ¿cree usted que sus estudiantes inventen problemas multiplicativos?

III. En cuanto a la Resolución de problemas matemáticos.

2. ¿Ha considerado la R.P.M en sus clases? ¿De qué manera?
3. Considera que la R.P.M es importante para el proceso de enseñanza aprendizaje

IV. En cuanto a la actividad de inventar problemas matemáticos.

4. ¿Conoce el tema de la I.P?
5. ¿De qué manera lo ha trabajado en sus clases?
6. ¿Ha considerado la reformulación de problemas?
7. Para la enseñanza de la multiplicación se concentra en el algoritmo o R.P.M

Muchas gracias por su disponibilidad.