

USO ALTERNATIVO DE ARGUMENTOS COMBINATORIOS MEDIANTE HISTORIETAS COMBINATORIAS

Larrahondo Loba, Mayra Alejandra
mayra.larrahondo@correounivalle.edu.co
Universidad del Valle (Colombia)

RESUMEN

La Combinatoria ha sido desplazada poco a poco del ámbito educativo por parte de los profesores, ya sea por falta de conocimiento de este concepto o por limitaciones de tiempo. Este documento es producto del capítulo III del trabajo de grado “Análisis Histórico-Epistemológico de los Argumentos Combinatorios para la Solución de Problemas de Conteo”, cuya pregunta problema es ¿cómo se han usado los argumentos combinatorios para la solución de problemas de conteo a través de un estudio histórico-epistemológico? Y una forma de responderla es mediante el uso alternativo de la combinatoria en “historietas”, cuyas moralejas serán sus equivalentes resultados, de tal forma que se puedan generar pautas para la enseñanza de la Combinatoria en la Educación Básica y Media.

PALABRAS CLAVE

Argumentos Combinatorios, Historietas, Educación Matemática.

INTRODUCCIÓN

Esta propuesta fue realizada por la poca inclusión en el aula que ha tenido el tema de combinatoria nivel de la educación colombiana, ya sea por falta de formación del docente o porque se dificulta a los estudiantes el aprendizaje. Sin embargo aunque cuando la combinatoria es abordada en el aula, se hace énfasis en la fórmula, dejando de lado la conceptualización y la argumentación; siendo de gran importancia la argumentación porque tanto un buen cuento como una buena cuenta deben estar siempre respaldados por un buen argumento.

Una gran parte de los estudiantes asocian la combinatoria con experiencias negativas, hallando permutaciones y combinaciones y al final confundiéndolas entre sí, otra parte de ellos, se podría decir que no la conocen. Además, el mismo ambiente social hace que la Combinatoria sea explicada solamente desde la teoría, sabiendo que existe un contexto adecuado para cada situación y no hay nada más entendible que un problema diseñado o modificado para un contexto en particular. Explicar y resolver problemas mediante situaciones de contexto da respuesta a una pregunta que es muy común entre los estudiantes ¿esto para qué me sirve en la vida? Campos del conocimiento tan complejos necesitan estudiar la historia que les precede para conocer su complejidad y en qué se les dificultó a los historiadores para su aprendizaje y conceptualización.

Con el uso de las Historietas Combinatorias [HC] se pretende innovar en el aula de clase utilizando el contexto del estudiante. Estas historietas se atribuyen a dos maestras insignes de la Matemática Recreativa, Martha Sved y Doris Schattschneider.

Este trabajo es realizado con el fin de generar pautas que permitan que la Combinatoria sea puesta en acto dentro de la Educación Matemática haciendo uso de la explicación de las HC, cuya moraleja implica la utilización de Argumentos Combinatorios para su respuesta. Las HC ayudan a que los estudiantes conceptualicen y apliquen los Argumentos Combinatorios en su vida diaria, con lo cual se concibe que sirvan como constructo de las pautas que se pretenden generar.

MARCO DE REFERENCIA

Para poder abordar este tema se debe conocer la definición de Combinatoria, para ello se toma como referente a Ross (2010) quien define:

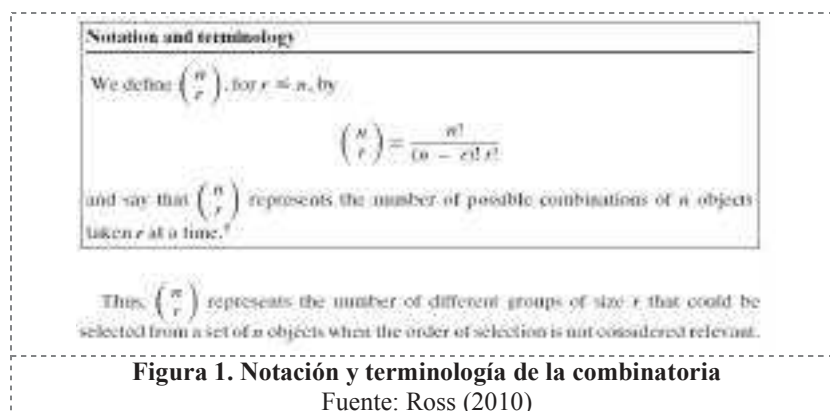


Figura 1. Notación y terminología de la combinatoria

Fuente: Ross (2010)

Para lograr hacer una distinción entre Combinatoria y Argumentos Combinatorios se recurre al libro Matemática Discreta y sus Aplicaciones de Rosen (2004):

El número de r-combinaciones de un conjunto de n elementos, donde n es un entero no negativo y r es un entero tal que $0 \leq r \leq n$, es:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Una demostración combinatoria [argumento combinatorio] es una demostración que utiliza argumentos de recuento para probar un teorema en lugar de otros métodos tales como las técnicas algebraicas (Rosen, 2004, p. 300).

Por otro lado, para abordar el tema de las HC, se toman en cuenta tres artículos: *Combinatorial Mathematics: Research into Practice*, de Sriraman y English (2004); *Combinatorial Analysis and School Mathematics*, de Kapur (1970); y *Counting and recounting* de Sved (1984), los dos primeros tratan acerca de la implementación de la

Combinatoria en el aula y el tercero abordan las HC que son utilizadas para el desarrollo de la propuesta.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

En busca de la solución a la pregunta problema, se encontraron HC donde los Argumentos Combinatorios son usados para abstraer moralejas que contiene dichos argumentos. Estas Historietas son sacadas de un taller que realizan los profesores Arbeláez y Díaz (2013) en el curso de Matemática Recreativa de la Universidad del Valle. A parte de las siete Historietas, se crea una utilizando la estructura del triángulo aritmético de Pascal. A cada una de las HC se les realiza una interpretación con el fin de que el lector sepa de dónde sale cada argumento y cómo se puede ir construyendo la moraleja. Además se generan pautas generales para incluir las HC en el aula, mostrando sus beneficios.

Se aclara que las HC son utilizadas para dar respuesta a la pregunta problema escrita anteriormente, debido a que el trabajo en general es un análisis histórico-epistemológico de los Argumentos Combinatorios en la solución de problemas de conteo.

DESARROLLO

Los problemas combinatorios han encontrado un lugar bastante importante en la historia de las matemáticas; algunos ejemplos históricos que trabajan la combinatoria son los cuadrados mágicos, los problemas de Ramsey, *the walking problem*, el problema de los puntos, entre otros.

Lo innovador de esta propuesta es el uso de las HC. En este artículo solo se presentaran 4 de las 8 Historietas y sin más preámbulos se empezaran a explicar.

HISTORIETA 1: SALUDOS

En el curso existe un alumno que siempre llega tarde. Ya todos los estudiantes se han saludado entre si cuando Juan llega. Al llegar Juan, le toca pasar la mano a cada uno de sus compañeros.

- Moraleja 1: $\text{Saludos}(n) = \text{Saludos}(n - 1) + (n - 1)$
- Interpretación: esta primera historieta es una de las más sencillas. Se toma como n el número de personas a las que se tiene que saludar, luego, los primeros saludos $(n-1)$ equivalen a los saludos que todos los estudiantes han hecho entre si cuando llega Juan; se le suma otro $(n-1)$ porque son los saludos que realiza Juan a sus compañeros cuando él llega.

HISTORIETA 2: BAILE DE FIN DE AÑO LECTIVO

La profesora a cargo de un curso de n niños y m niñas quiere al final del año lectivo organizar un baile. Para ello piensa llevarlo a cabo en tres salones: el salón de los niños, el salón de las niñas y el salón del baile propiamente dicho con una orquesta. La profesora piensa que no es bueno que los niños y niñas estén todo el tiempo juntos, por eso les ha separado. En los recesos de la orquesta los niños tienen la oportunidad de departir entre sí y



las niñas departen entre sí, eso sí separadamente niños de niñas. Solo cuando la orquesta suena los niños salen a buscar sus parejas, y la fiesta dura tanto que todos los niños bailan con todas las niñas.

- Moraleja: $\binom{n+m}{2} = \binom{n}{2} + \binom{m}{2} + (n \times m)$
- Interpretación: Entiéndase $\binom{n+m}{2}$ como el conjunto de niños más niñas; luego al conjunto de solo niños n se le atribuye $\binom{n}{2}$ debido a que solo los niños departen entre sí, y al conjunto de las niñas m se le atribuye $\binom{m}{2}$ por las mismas razones. Cuando suena la orquesta y los niños bailan con las niñas, se le ha representado por medio de $(n \times m)$.

HISTORIETA 3: JUGANDO FÚTBOL

Juan es un excelente jugador de fútbol. Reconocido por todo el grupo. La maestra quiere armar un torneo en el cual todos los n estudiantes tengan la oportunidad de conocerse y de jugar entre sí en equipos de k jugadores. Todos van a querer jugar con Juan. La maestra piensa: la primera parte de los torneos los jugaremos sin Juan y al final, cuando los jugadores se hayan entrenado lo suficiente, meteremos a Juan.

- Moraleja: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- Interpretación: Por definición de combinatoria, tenemos que $\binom{n}{k}$ representa el número de estudiantes n combinado con la cantidad de equipos de k jugadores. La primera parte equivale a que los demás estudiantes jueguen sin Juan en equipos de k jugadores: $\binom{n-1}{k}$, al cual se le suma una segunda parte que es donde Juan juega $\binom{n-1}{k-1}$.

HISTORIETA 4: JUGANDO CON EL TRIÁNGULO

En un curso de matemáticas, la profesora decide organizar a los estudiantes en dos grupos. A los estudiantes del primer grupo les asigna camisetas de color azul, les dice que ellos representan a los números naturales positivos y que ella les asigna sus números. En consecuencia, a los estudiantes del segundo grupo les asigna camisetas de color rojo, les dice que ellos representan los números negativos.

La profesora propone que deben armar un triángulo que comience con un solo estudiante arriba, luego siguen dos estudiantes, luego 3 y así sucesivamente hasta formar el triángulo. La condición es que deben quedar intercalados los dos grupos, es decir, si el primer estudiante es del grupo de los positivos y además tiene asignado el número 1, en la siguiente fila debe comenzar con un estudiante del equipo de los números negativos el cual tiene asignado el número 1 y a su lado uno del grupo de los positivos al cual se le ha asignado el mismo número. Los colores deben quedar intercalados: azul, rojo-azul, azul-rojo-azul.

Importante: la suma de cada fila, a partir de la segunda, debe ser igual a cero.

- Moraleja:
- **Negativos** - **Positivos**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & -1 & 1 & = 0 \\
 & & 1 & -2 & 1 & = 0 & \\
 & -1 & 3 & -3 & 1 & = 0 & \\
 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & = 0 &
 \end{array}$$

- Interpretación: para la solución de esta Historieta, se hace uso del triángulo aritmético de Pascal, de su forma y numeración, realizándole un pequeño ajuste, que es asignándole el signo (-) de número negativo para que en cada fila la suma sea igual a cero. Con esta Historieta se pretende emplear el triángulo como una forma de representar las operaciones con números negativos. De igual forma, se puede utilizar para la multiplicación.

PAUTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS HC EN EL AULA DE CLASE

Tanto el docente como el estudiante deben conocer y manejar bien las diferentes técnicas de conteo, pues son necesarias para poder incluir las HC, además se debe tener conocimiento previo de la Combinatoria y de sus propiedades. El estudiante debe manejar el principio de multiplicación y el principio de suma, ya que son fundamentales en el Análisis Combinatorio.

Conociendo todas las distintas técnicas de conteo, se alude a que no en todos los casos se puede utilizar el conteo manual, sacando todas “las posibles combinaciones de” o “formas de”, es un proceso que en algunos casos se torna muy tedioso. Surgen algunos casos en los que se necesitan métodos de cálculo explícitos para encontrar todas las configuraciones posibles, pero que con certeza son configuraciones exactas y es ahí donde se utilizan las diferentes técnicas de conteo, las cuales en su término global, son conocidas como Combinatoria.

Por otra parte, en el artículo de Kapur (1970) se encuentran algunas razones que hacen que el Análisis Combinatorio sea importante en la Educación Matemática, las cuales son aplicadas a las HC, de tal forma que se puede ver la importancia y estrategia que tienen para ser integradas en el aula de clase.

1. Las Historietas no dependen de un cálculo, por ende se pueden apropiarse para cualquier grado de escolaridad, y si se desea se pueden ilustrar y proponerle a los estudiantes que creen sus propias Historietas con sus debidas ilustraciones.
2. Pueden ser utilizadas para reforzar en los estudiantes las técnicas de conteo, el uso de conjuntos, las conjeturas, etc.
3. Se pueden adecuar para diferentes áreas del conocimiento, tales como Física, Química, Programación, Teoría de Números, Topología y la misma Matemática

Recreativa. Son susceptibles a cambios y adaptaciones, desde lo más simple hasta lo más complejo.

4. La mente e imaginación de los estudiantes pueden ser usadas para la creación de nuevas Historietas y para deducir su respectiva moraleja.
5. Estas Historietas pueden ayudar al desarrollo de la actitud de la mente combinatoria, pues examina todas las posibilidades, las enumera y descubre la mejor posibilidad, y por tanto, conduce a un pensamiento lúdico.

El haber contextualizado las Historietas ayuda a que los estudiantes se sientan identificados con cada una de las situaciones, tornando un poco más fácil la utilización de los argumentos, pues los identifican en el interior de cada una de estas.

CONCLUSIONES

A lo largo de la realización de este trabajo se ha podido evidenciar una problemática que yace en el seno de la Educación Matemática: la poca inclusión que ha tenido la Combinatoria y en especial los Argumentos Combinatorios en el aula de clase.

Para resolver esta problemática se llega a la columna vertebral del trabajo, la cual era encontrar a través de un estudio histórico-epistemológico el uso de los Argumentos Combinatorios para darle solución a problemas de conteo, y una forma de ello fue mediante las HC, las cuales son autoría de los profesores Daniel Arbeláez y Diego Díaz guiados por dos maestras insignes de la matemática recreativa, las cuales son Marta Sved y Doris Schattschneider.

Contextualizar las Historietas con situaciones reales que viven los estudiantes a diario en sus instituciones, ayuda a tener un interés mayor hacia la Combinatoria y los motiva a crear sus propias Historietas, pues saben que de ellas puede surgir Argumentos Combinatorios. Además, esto demuestra que la Combinatoria no solo puede ser vista desde lo algorítmico, sino que también puede ser vista con el uso alternativo de las HC, con las cuales los estudiantes pueden generar y desarrollar la competencia de resolución de problemas al manejar diferentes tipos de argumentos para resolver problemas de conteo.

A futuro se pretende profundizar en los Algoritmos Combinatorios en otros ámbitos, es importante resaltar que estas Historietas pueden romper el paradigma de la inclusión de la Combinatoria dentro del aula. Pero para poder romper este paradigma, la enseñanza de la Combinatoria no debe ser solamente de forma algorítmica, sino dejando que el estudiante conceptualice lo que está aprendiendo y utilice este objeto matemático dentro de su vida diaria identificando que el Análisis Combinatorio está presente en cada etapa de la vida diaria del estudiante y del mundo en general.

REFERENCIAS

Arbeláez, D. & Díaz, D. (2013). Notas de clase del curso Matemática Recreativa. Cali: Universidad del Valle.

- Kapur, J. (1970). Combinatorial Analysis and School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 3(1), 111–127. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/3481871>
- Rosen, K. (2004). Recuento. En *Matemática Discreta y sus Aplicaciones* (pp. 279-324). Madrid: Mc Graw Hill.
- Ross, S. (2010). *A Firts Course in Probability*. New Jersey: Pearson.
- Sriraman, B. & English, L. (2004). Combinatorial Mathematics: Research into Practice. *The Mathematics Teacher*, 98(3), 182–191. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/27971671>
- Sved, M. (1984). Counting and recounting. *The mathematical Intelligencer*, 5 (4), 21-26.