Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores

Patricia Perry, Carmen Samper, Leonor Camargo,
Armando Echeverry y Óscar Molina

Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ • G)
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia

Durante el desarrollo de un curso de geometría plana para futuros profesores de matemáticas, profesora y estudiantes conforman una comunidad cuyo propósito es aprender a demostrar. La empresa del curso es construir un sistema axiomático para la geometría plana. Las tareas específicas están asociadas, en su mayoría, a situaciones problema cuya resolución involucra a los estudiantes en una actividad demostrativa en la que la geometría dinámica y la interacción social en el aula, gestionada por la profesora, juegan papeles esenciales. En este documento damos detalles de esta innovación.

Ante todo, queremos agradecer la amable invitación que la Comisión Organizadora del decimoséptimo *Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática* ha extendido a nuestro grupo de investigación para la realización de esta conferencia plenaria. Consideramos que encuentros académicos, como éste, en los que es posible compartir nuestras experiencias y reflexiones con colegas, constituyen una oportunidad valiosa para reexaminar y evaluar lo que hemos realizado, aprovechando la mirada desprevenida de personas que de alguna manera conocen de qué les hablamos y, por tanto, están en capacidad de hacer aportes pertinentes. Por tal razón, mil gracias a todos ustedes por esta oportunidad.

El propósito de esta ponencia[1] es dar a conocer algunos detalles sobre una innovación en la que hemos estado empeñados desde hace algunos años. Incluimos, en primer lugar, asuntos generales que permiten contextualizar la innovación; en segundo lugar, esbozamos el enfoque teórico sobre el que ésta se apoya; en tercer lugar, exponemos características de la innovación; para terminar, hacemos un breve balance de la experiencia y aludimos al posible impacto social.

A PROPÓSITO DE CONSIDERACIONES HECHAS HACE CASI VEINTE AÑOS

En un artículo de 1988, el investigador norteamericano Alan Schoenfeld, enuncia cuatro creencias características de la perspectiva que tienen los estudiantes sobre asuntos relacionados con el

[1] Agradecemos a Martín Acosta, a Colette Laborde y a Hernando Alfonso por sus comentarios a una versión preliminar del texto de esta ponencia.

aprendizaje de las matemáticas escolares, y sugiere que tales creencias son producto de las experiencias escolares que los estudiantes tienen con las matemáticas.

> Los procesos de las matemáticas formales (e.g., la "demostración") tienen poco o nada que ver con el descubrimiento o la invención. […] Los estudiantes que entienden la asignatura pueden resolver los problemas matemáticos que se les asignan en cinco minutos o menos. […] Sólo los genios son capaces de descubrir, crear, o realmente comprender las matemáticas. […] Se logra el éxito en la escuela si se realizan las tareas siguiendo al pie de la letra lo que dice el profesor. (p. 151)

Traemos a colación esta referencia para apoyar una primera, breve y general descripción de la innovación que vamos a presentar a continuación: la actividad matemática que se lleva a cabo en el curso desafía a las creencias mencionadas por Schoenfeld y algunas otras.

CONTEXTUALIZACIÓN Y ASPECTOS GENERALES DE LA INNOVACIÓN

La innovación que queremos presentar en esta ponencia ocurre en un curso de geometría plana en el marco del programa de formación inicial de profesores de matemáticas que ofrece la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). El curso es el segundo de la línea de geometría —conformada por tres cursos— y está ubicado en el segundo semestre del programa; los estudiantes que lo toman están entre los dieciocho y los veintidós años. En el primer curso de la línea de geometría se establece el primer contacto que, en la Universidad, tienen los estudiantes con la geometría; en tal curso se realizan procesos exploratorios para que, a partir de un acercamiento informal a conceptos, relaciones y propiedades geométricas, a través de temas variados dentro de un espectro amplio de los distintos dominios de la geometría, los alumnos reconstruyan o amplíen su panorama geométrico y desarrollen las competencias necesarias para poder asumir, en el siguiente semestre, un curso de geometría ajustado a un sistema axiomático. En términos generales, podemos decir que en este curso los estudiantes avanzan en su aprendizaje de la visualización geométrica de figuras, la argumentación matemática fundamentada y la generalización de propiedades geométricas de triángulos y cuadriláteros, a partir del estudio de ejemplos y contraejemplos.

La innovación comenzó a tomar cuerpo en el año 2004 y desde entonces hasta fines del primer semestre lectivo de 2007 hemos encontrado oportuno hacer ajustes al diseño y al desarrollo curricular del curso a medida que hemos aclarado presupuestos teóricos que la fundamentan y evaluado resultados de cada implementación; desde nuestra perspectiva, estos ajustes incrementan la probabilidad de éxito en el logro del propósito y de los objetivos del curso. Es importante saber que esta innovación ha estado acompañada de manera permanente por la realización de proyectos de investigación que aunque no han estado centrados en indagar sobre el proceso mismo de la innovación y sus resultados, se han ocupado de explorar, estudiar y comprender aspectos específicos del proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar en el curso. Tales investigaciones han sido desarrolladas por el grupo *Aprendizaje y Enseñanza de la* Geometría, Æ • G, conformado en la actualidad por los cinco coautores de este texto, uno de los cuales es la profesora que ha llevado a cabo la innovación. Es así como las decisiones de ajustes al diseño curricular han sido objeto de consideración y reflexión de todo el grupo y no sólo de la profesora del curso.

Razones para la innovación

Entre las razones que motivaron la innovación podemos mencionar cinco consideraciones sobre las que no vamos a entrar en detalle en esta presentación.

1. *Las necesidades de formación profesional de los estudiantes inscritos en el programa*. Nuestros estudiantes, como futuros profesores de matemáticas de la escuela secundaria, necesitan desarrollar, por una parte, su capacidad de actuación en contextos relacionados con las matemáticas y, por otra, su capacidad para generar ambientes de aprendizaje de las matemáticas escolares. El desarrollo de estas dos capacidades es gradual y depende en gran medida de la calidad de las experiencias de aprendizaje que propicien los diferentes cursos que ofrece el programa de formación. La consideración de estas dos necesidades condujo a revisar e introducir cambios en la meta y objetivos del curso de geometría plana, en el tipo de tareas propuestas a los estudiantes, en la gestión del contenido, y en el tipo de interacción social en el aula.

2. *El papel de la actividad demostrativa dentro del quehacer matemático*. La actividad demostrativa está en el corazón del quehacer matemático. Esto implica que no es posible la formación matemática de un estudiante, en cualquier grado, sin alguna suerte de actividad demostrativa. Reconocer el papel central de la actividad demostrativa iluminó en buena medida la dirección de los cambios que debíamos hacer para generar experiencias significativas de aprendizaje matemático.

3. *Los resultados deficientes de la formación matemática en los diferentes niveles de escolaridad*. Estos resultados ponen en evidencia la necesidad de emprender acciones educativas específicas para abordar esta problemática. En particular, es clara la necesidad de abordar la relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración pues, dados los fracasos al respecto, se ha caído en soluciones ingenuas como, por ejemplo, abandonar los intentos de enseñarla en el nivel escolar. En todo caso, es importante darse cuenta de que la problemática no es sólo un asunto local sino que se da en la comunidad de educación matemática internacional y concierne a ella.

4. *El reconocimiento de la complejidad inherente al aprendizaje de la demostración*. Este aprendizaje no se puede dejar exclusivamente en manos de los estudiantes; exige de parte del profesor un apoyo deliberado y sistemático al proceso de los aprendices. La complejidad incluye aspectos como la comprensión de la dependencia entre propiedades, del formato usual en el que se formulan los teoremas (implicación), del proceso deductivo necesario para construir demostraciones.

5. *El reconocimiento de que el uso de la geometría dinámica no pone en peligro la enseñanza de la demostración, sino que por el contrario, la favorece.* En el campo de la geometría se cuenta con la geometría dinámica como recurso para el aprendizaje de la demostración. Con tareas geométricas bien diseñadas, la geometría dinámica es un elemento más que favorece la generación de un ambiente de indagación en donde su uso para explorar y experimentar, la convierte en herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración.

Descripción del curso antes de la innovación

Desde nuestra perspectiva, el curso *Geometría Plana*, hasta antes de que nuestro grupo emprendiera su innovación, tenía como propósito principal ofrecer a los estudiantes un espacio para el aprendizaje de un cierto contenido geométrico. El profesor presentaba un sistema axiomático específico, con base en un texto guía del curso. Los estudiantes debían aprender, de manera individual, axiomas, definiciones y teoremas a la vez que se podían ejercitar en la elaboración de demostraciones imitando los esquemas de demostración ejemplificados por el profesor, con ejercicios tomados del libro, sin que esto fuera objeto de tratamiento didáctico en la clase.

Esta apreciación que teníamos del curso nos permitió suponer que los estudiantes que lo tomaban desarrollaban una visión estrecha de la demostración, caracterizada por desconocer acciones matemáticas involucradas en el proceso de demostrar, lo que posiblemente los llevaba a creer que la demostración no puede ser actividad central de la matemática escolar y que su enseñanza no promueve ningún aprendizaje. De continuar con este tipo de formación, la experiencia matemática de las siguientes generaciones de estudiantes de educación básica secundaria y media probablemente seguiría siendo pobre o nula en cuanto a experiencias asociadas a la demostración, con las consecuencias que de ello se derivan para su formación matemática y el desarrollo de su razonamiento. Así, en calidad de formadores de profesores de matemáticas, nos hicimos conscientes de la doble responsabilidad que tenemos con respecto al aprendizaje de la demostración: no solamente tenemos que apoyar a nuestros estudiantes para que aprendan a demostrar sino que las experiencias de aprendizaje que tengan al respecto les han de servir como referentes y ejemplos para el ejercicio de su profesión; a través de tales experiencias, se aportan elementos para la visión que puede llegar a construir el estudiante sobre lo que es demostrar, el papel que juega la demostración en la actividad matemática, etc. De manera muy escueta, podemos decir que la innovación se ocupó de cambiar un curso centrado en la enseñanza directa de contenidos geométricos por uno centrado en el aprendizaje de la práctica de demostrar en el campo de la geometría plana.

ENFOQUE TEÓRICO QUE ORIENTA LA INNOVACIÓN

En seguida, esbozamos las ideas teóricas que han sustentado y guiado el rumbo de la innovación.

Actividad demostrativa en el ámbito educativo

La *actividad demostrativa* engloba dos procesos, no necesariamente independientes o separados. Uno de ellos tiene por meta llegar a establecer conjeturas de las que se tiene un alto grado de seguridad que, por tanto, son candidatas a entrar en un proceso de justificación que las valide dentro del sistema axiomático; las acciones —de índole heurística— que conforman este proceso son la visualización, la exploración, la generalización y la verificación de las conjeturas en caso de que surjan elementos de incertidumbre. El otro proceso tiene por meta producir un discurso argumentativo de carácter deductivo que valide la conjetura dentro del sistema axiomático en el que se está trabajando; en este proceso es posible reconocer tres acciones distintas de justificación, a saber, la *explicación de validación*, la *prueba* y la *demostración formal*, acciones que se distinguen por su grado de cercanía al proceso deductivo formal. En todos los momentos de la actividad demostrativa está presente el razonamiento que impulsa y liga las acciones de ambos procesos (en Camargo, Samper y Perry (2006) se precisa y se ilustra lo que entendemos por las diferentes acciones de la actividad demostrativa).

Al adoptar una visión de actividad demostrativa como la mencionada, atendemos a dos funciones primordiales de la demostración matemática en el ámbito educativo (de Villiers, 1990; Hanna, 1996; Mariotti, 2006): por un lado, promover la comprensión del contenido matemático implicado tanto en los enunciados de los teoremas como en sus justificaciones y, por otro lado, apuntar a la validación de dichos enunciados, en el marco de un sistema teórico en construcción.

Aprender a demostrar

Bajo la influencia del enfoque sociocultural del aprendizaje, tan en boga en la actualidad, entendemos que *aprender* es poder participar cada vez de manera más *genuina* (i.e., con una motivación interna, conscientes de su papel en la consecución de la empresa que se propone el curso), *autónoma* (i.e., con razones propias para fundamentar lo que se dice y lo que se hace, independiente de los otros como autoridad), y *relevante* (i.e., con aportes que vienen al caso y que son valiosos aun si son incorrectos). En particular, *aprender a demostrar* se refiere a la participación en la actividad demostrativa mediante la cual se desarrolla el curso.

Un entorno favorable para aprender a demostrar

Podemos destacar tres elementos fundamentales en la generación de un entorno favorable para aprender a demostrar: las tareas matemáticas propuestas, la interacción social en la clase y el uso de la geometría dinámica.

Dado que la formulación de conjeturas es una práctica importante de la actividad demostrativa, las *tareas matemáticas* que se proponen a los estudiantes deben ofrecerles oportunidades para involucrarse en tal práctica. Así pues, en cuanto sea posible, tareas en las que se da un enunciado para que los estudiantes produzcan una justificación se deberían cambiar por tareas que propicien inicialmente experiencias de carácter empírico a través de las cuales se comprenda la situación y se llegue a conjeturar, y por supuesto, también exijan validar la conjetura. El convencimiento personal, condición necesaria para buscar una justificación, se logra en la medida en que el estudiante se involucre en actividades de indagación, a partir de la exploración de propiedades y relaciones geométricas. Adicionalmente, tales actividades podrían proveer recursos de justificación.

Pero formular una conjetura de la que se está convencido no es suficiente para emprender la construcción de la respectiva justificación, y menos aun cuidando que ésta se haga dentro de un determinado sistema teórico. Por ello, la *interacción social* en el aula entre profesor y estudiantes y entre estudiantes es un factor imprescindible del aprender a demostrar, pues es en la comunicación de ideas, en el análisis crítico de éstas, en la argumentación —entendida como manifestación del proceso de razonamiento— como surgen los elementos teóricos necesarios para construir una demostración, la comprensión del papel que juegan en el proceso y las conexiones entre ellos para ligarlos como desarrollo deductivo. El papel del profesor como guía de este proceso es fundamental pues es él —como experto de la comunidad de la clase— quien puede dirigir el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propias de la práctica de la demostración en matemáticas. Además cumple un papel esencial en el establecimiento y utilización de las normas que rigen el funcionamiento de la demostración y del sistema axiomático. A través de la interacción social, los estudiantes pueden cambiar la tradicional relación que tienen con el conocimiento, con su profesor y con sus compañeros. Con respecto al conocimiento, pueden llegar a comprender que más que conocer la estructura de un sistema axiomático, tienen que vivir la experiencia de construirla en colaboración con los demás miembros de la comunidad. Con respecto al profesor, pueden dejar de considerarlo como la autoridad en la clase y la única persona que tiene el saber, y en cambio pueden llegar a verlo como el miembro experto de la comunidad que guía el proceso. Con respecto a los otros estudiantes, pueden llegar a establecer un compromiso mutuo de trabajar en pro de la construcción de un sistema axiomático.

Como tercer elemento, reconocemos la importancia de la *geometría dinámica* como herramienta de mediación en el proceso de aprender a demostrar. Siguiendo a muchos investigadores en el campo, suponemos que si vinculamos las tareas de construcción geométrica con las prácticas de justificar y organizar sistemas axiomáticos, incrementamos la posibilidad de aprender a demostrar. Reconocemos sin lugar a dudas el efecto de la geometría dinámica en el proceso de aprendizaje pero aun tenemos que clarificar cómo los estudiantes vinculan el razonamiento informal ligado a lo ostensivo con las demostraciones confinadas a un sistema axiomático y cómo el trabajo de exploración en un ambiente de geometría dinámica los conduce a generar ideas útiles para la demostración misma.

CARACTERÍSTICAS DE LA INNOVACIÓN CURRICULAR

Propósito y objetivos del curso

El propósito del curso es generar para los estudiantes un espacio y una oportunidad de aprendizaje de la demostración en geometría euclidiana no sólo desde el punto de vista disciplinar de las matemáticas sino también desde el punto de vista pedagógico. Esperamos que esta experiencia de aprendizaje se constituya en un referente significativo tanto para su desempeño en los cursos siguientes de la licenciatura como para el ejercicio de su profesión.

Objetivo general

Se pretende que los estudiantes aprendan a demostrar y amplíen su visión de la demostración y del papel que ésta tiene como actividad fundamental del quehacer matemático y como recurso de comprensión y de argumentación, ligado a las prácticas culturales de diversas comunidades en donde se usan las matemáticas.

Objetivos específicos

Se pretende que los estudiantes

- Comiencen a formarse una idea de lo que es un sistema axiomático y de lo que significa trabajar dentro de tal sistema.

- Adviertan que además de la validación de un enunciado, la demostración tiene como funciones la explicación del mismo, el vínculo de éste con otros enunciados en una organización y la comunicación de ideas.
- Ganen confianza en su capacidad de explorar con miras a formular conjeturas.
- Ganen confianza en su capacidad de justificar fundamentados en una teoría.

Contenido

Con respecto al contenido geométrico del curso no hubo modificación alguna. Los temas incluidos oficialmente son los usuales: relaciones entre puntos, líneas rectas, planos, ángulos, propiedades de triángulos, cuadriláteros, circunferencias, y relaciones de congruencia y de semejanza. Pero debido al enfoque metodológico no se alcanza a cubrir lo correspondiente a los temas de circunferencia y de semejanza de triángulos; en este caso, el tiempo didáctico transcurre mucho más lentamente que si se les presentara a los estudiantes el sistema axiomático ya hecho y ellos sólo tuvieran que obtener algunas deducciones lógicas (de Villiers, 1986).

Enfoque metodológico

Con respecto a la gestión del contenido geométrico sí hay cambios drásticos que se fueron consolidando[2] a través de las diferentes versiones del curso hasta llegar a la última versión de la que damos cuenta en este documento y que es la que caracterizamos de manera muy sucinta a continuación. Ni la profesora ni el libro de texto son la fuente de donde se toma el contenido que se estudia. Tampoco hay una forma fija de secuenciar el tratamiento de los distintos elementos teóricos que se consideran. Una cantidad considerable de los enunciados que se demuestran son formulados, por la comunidad de la clase, en calidad de conjeturas provenientes de las producciones de los estudiantes al resolver tareas propuestas por la profesora. Todas las demostraciones que se hacen en el curso también son realizadas por los estudiantes con el apoyo, en mayor o menor grado, de la profesora. Las definiciones se introducen para satisfacer una necesidad manifiesta de precisar de qué objeto geométrico se ha comenzado a hablar[3]; para hacerlo, por un lado, se parte de la imagen conceptual que los estudiantes tienen del objeto, y por otro, se hace un análisis centrado en el papel de cada condición dentro de la definición. En ocasiones, algunos hechos geométricos son incorporados de manera legítima al sistema axiomático porque se advierte la necesidad de demostrarlos para poderlos usar en la demostración del teorema que se está realizando.

---

2 Se pueden encontrar detalles del desarrollo curricular del curso en su primera versión y, en particular, de la gestión del contenido, en Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006). En tal ocasión, para el tratamiento de todos los temas con excepción de cuadriláteros, sí se utilizó un libro de texto; el tratamiento de cuadriláteros en esa versión fue el modelo inspirador del tratamiento de todos los demás temas en la última versión del curso.

3 Debe advertirse que, en general, los estudiantes tienen alguna familiaridad con los términos que designan a los objetos geométricos que se estudian en el curso, razón por la cual los usan aun si tienen ideas vagas al respecto.

Las tareas que se proponen a los estudiantes

Las situaciones problema no se proponen esporádicamente ni tampoco con el propósito de complementar lo que ordinariamente se hace en el curso; son, en cambio, parte del medio didáctico que organiza la profesora para el aprendizaje de los estudiantes. Casi siempre se trata de situaciones que involucran a los estudiantes en una actividad demostrativa completa, es decir, ellos tienen que comenzar por generar conjeturas que, luego de ser verificadas y aceptadas por la comunidad como tales, son validadas dentro del sistema axiomático con el que cuentan. En otras ocasiones, se trata de situaciones en las que tienen que aplicar elementos del sistema axiomático consolidado hasta el momento para hacer una construcción y justificarla.

Las situaciones problema propuestas a los estudiantes se constituyen en elemento central de la innovación y son objeto de un cuidadoso diseño por parte del grupo de investigación. Deben ser *interesantes* para así poder estimular la actividad demostrativa de los estudiantes; deben ser *abiertas* para así poder generar diversos puntos de vista y favorecer la argumentación; pero también han de ser *pertinentes*, es decir, deben poner en juego los recursos disponibles en el sistema axiomático que se construye.

Por lo general, la resolución de la situación problema por parte de los estudiantes y la posterior socialización del trabajo realizado hasta llegar a la institucionalización del correspondiente contenido geométrico requieren más de una sesión de clase y en ocasiones hasta cuatro o cinco, dependiendo de la riqueza de la situación planteada y de la participación misma de los estudiantes. Las situaciones problema más ricas en las que es posible formular distintas conjeturas plausibles se plantean con el propósito de generar experiencias en las que los estudiantes puedan vivenciar la ampliación del sistema axiomático, en torno a un núcleo temático, al participar en la organización de los elementos teóricos que han producido.

A continuación, a manera de ejemplo, presentamos dos situaciones problema que posibilitan la construcción de un sistema axiomático en torno a propiedades del triángulo isósceles:

- ¿Cuál es la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad *dos alturas son congruentes*?
- Dibujar ΔMOP. K es un punto de $\overrightarrow{MP}$. ¿Cuándo es $m\angle OKP > m\angle OMK$?

Cabe aclarar que debido al modo como se gestiona el contenido en la clase, el desarrollo temático generado con estas situaciones problema no es el mismo en dos versiones del curso. La Figura 1 muestra el contenido geométrico que se trató en la última versión del curso a raíz de la resolución de las dos situaciones problema mencionadas.

Colette Laborde, nos hizo caer en cuenta de que subyacente a esta forma de gestionar el contenido geométrico está la hipótesis didáctica según la cual poder construir un sistema axiomático en la clase a partir de la resolución de situaciones problema, requiere que en ocasiones, la comunidad acepte, por una parte, dejar provisionalmente incompleta la demostración de una conjetura y, por otra parte, desviarse para considerar otra situación problema que conducirá a obtener los elementos necesarios que permitirán completar la demostración inicial. Según Laborde, tratamos de vincular la coherencia local a una más global. Consideramos que esta forma de gestionar el contenido es uno de los elementos de la innovación que desafían de manera más fuerte la tradición de la matemática escolar que propende por la presentación de los contenidos organizada en términos de relaciones establecidas desde el saber matemático y no desde el punto de vista de la construcción del conocimiento de los estudiantes.

Además de las situaciones problema propuestas durante las clases, semanalmente se asignan tareas para realizar por fuera de la clase, que deben ser resueltas en grupos establecidos voluntariamente desde el comienzo del semestre. Se escogen problemas que tienen un grado alto de dificultad, pero que se pueden resolver con los elementos teóricos y metodológicos (i.e. realizar construcciones auxiliares) ya estudiados. Deben desarrollarse las demostraciones con todo el formalismo que exige trabajar en un sistema axiomático. El propósito es suscitar la interacción entre los miembros del grupo, impulsarlos a compartir sus conocimientos, y a proveer argumentos fundamentados acerca de la solución. Sus producciones correspondientes a estas tareas también son fuente para la valoración del aprendizaje. La profesora identifica los errores en las producciones escritas de los estudiantes, y los utiliza como material para una discusión grupal en clase.

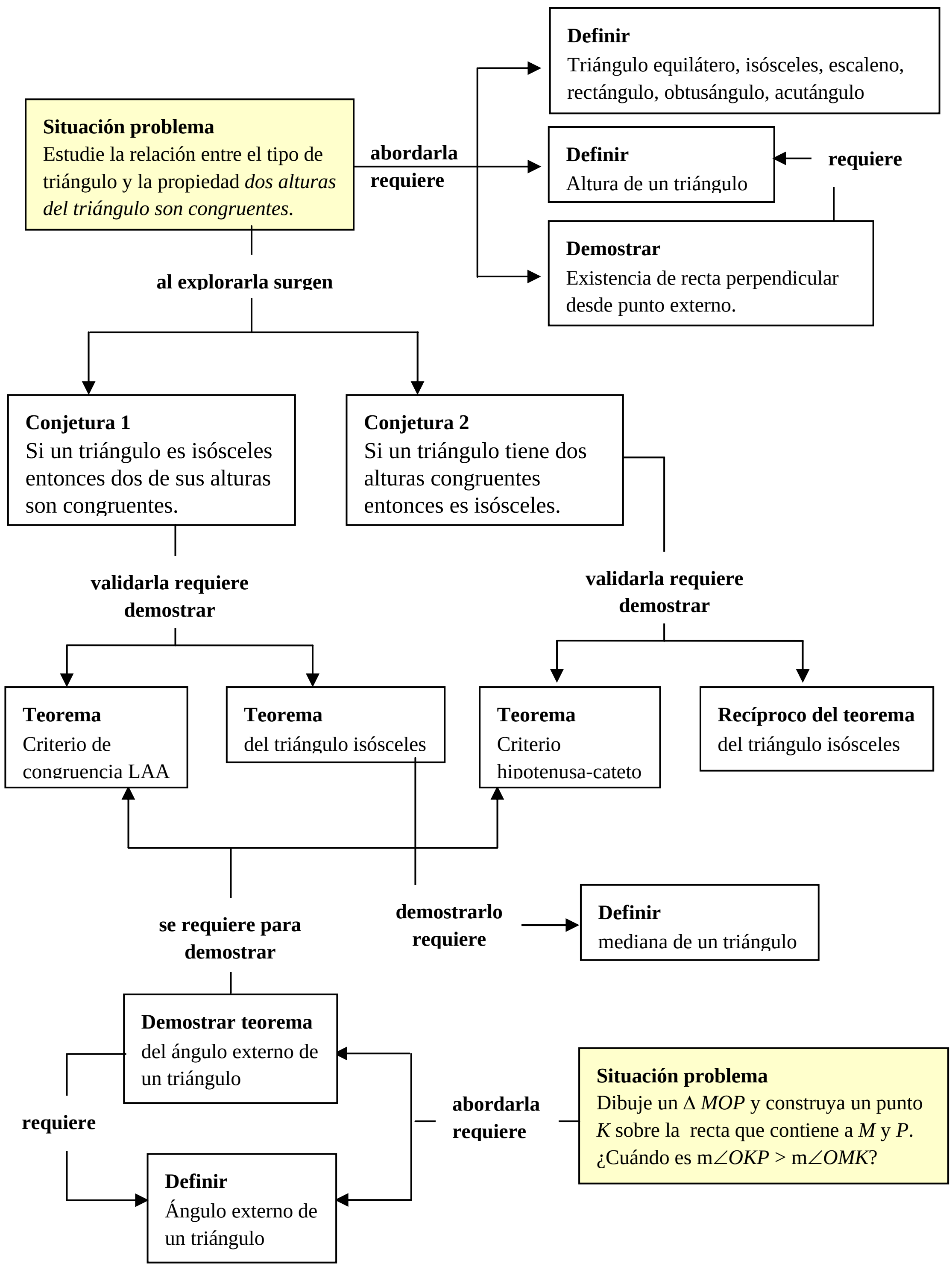

Figura 1. Contenido geométrico tratado al resolver dos situaciones problema

La interacción social en la clase

Al iniciar el curso, la profesora hace explícitas las normas sociales y sociomatemáticas relacionadas con la exigencia de justificar todas las ideas, escuchar y respetar los argumentos de los compañeros y producir justificaciones de acuerdo con parámetros establecidos. También se empeña en controlar de manera sistemática el cumplimiento de tales normas. Gradualmente, a medida que avanza el desarrollo del curso, la profesora transfiere la responsabilidad a los estudiantes quienes comienzan a sentirse cómodos haciendo demostraciones y controlan el cumplimiento de las normas planteadas. Podemos mencionar dos[4] tipos de interacción a través de los cuales los estudiantes participan en la actividad matemática que tiene lugar en la clase.

Trabajo de los estudiantes. De manera individual o por parejas y pudiendo disponer de la geometría dinámica, los estudiantes abordan, durante el tiempo asignado para ello, las tareas propuestas por la profesora. Durante tal trabajo, ella pasa por los puestos con el propósito de recoger información sobre lo que están haciendo los estudiantes y los resultados a los que están llegando, información que luego utiliza en la puesta en común para animar a los estudiantes que no se atreven por su cuenta a exponer públicamente sus conjeturas o propuestas. Muy ocasionalmente lleva a cabo alguna conversación con un estudiante específico y, por lo general, no es para dar explicaciones relacionadas con el contenido geométrico implicado en la solución de la tarea. El involucrarse en la solución de estas tareas, por lo general, pone a los estudiantes en capacidad de hablar sobre el tema aun si no llegan a enunciar una conjetura que se pueda aceptar o si no alcanzan a elaborar la demostración. En Perry, Samper y Camargo (2007) hay un recuento del trabajo colaborativo de tres estudiantes para resolver una situación problema; consideramos que tal caso ilustra un tipo de interacción en el que la producción del grupo no es la reunión de las contribuciones de sus integrantes, surgidas de monólogos en voz alta, sino más bien la construcción conjunta a través del diálogo de ellos; en ese sentido, el caso representa bien una característica de la interacción social que consideramos clave para el aprendizaje de la demostración.

Discusión matemática. Es a través de este tipo de interacción como se va construyendo colectivamente el contenido geométrico que se trata en la clase. Después del trabajo de los estudiantes, la profesora gestiona la socialización de las producciones de éstos con miras a guiar a la comunidad en la construcción de significados compartidos y en la organización colectiva de las ideas que encontraron para producir las demostraciones. Cuando los estudiantes han tenido que producir conjeturas, en el proceso de analizarlas la profesora juega un papel clave en la determinación de la secuencia en que éstas se revisan, teniendo en cuenta dos criterios: el examen

[4] Cabe mencionar que en las primeras versiones del curso, el tipo de interacción que se realizaba desde el comienzo del curso y durante una parte considerable de su desarrollo, era lo que denominamos *diálogo instruccional*. En éste se llevaba a cabo una conversación entre la profesora y uno o más estudiantes en frente del resto del grupo. La profesora, como la experta de la comunidad, guiaba el desarrollo del contenido teórico de la clase a través de este tipo de intercambio verbal que debían poder sostener los estudiantes con ella en la medida en que hubieran cumplido la norma —establecida desde el comienzo— de preparar previamente a cada clase el tema haciendo el correspondiente estudio en el libro. En este tipo de intercambio, los estudiantes explicitaban sus comprensiones de lo leído y la profesora cuestionaba, enfatizaba y aclaraba asuntos específicos, sin que en tales intercambios se lograra tocar todo lo relacionado con el tema.

de una conjetura no debe quitarle sentido al examen de otra, y tal examen debe respetar la organización teórica que permite construir sobre unos elementos para obtener otros.

Para dar una idea del tipo de interacción al que nos estamos refiriendo, veamos la trayectoria de una discusión matemática que tuvo lugar en la primera versión del curso cuando los estudiantes tenían entre manos la responsabilidad de encontrar una vía para la demostración del recíproco del *teorema del triángulo isósceles* que establece que "Si en el triángulo *ABC* se tiene que el ángulo *A* es congruente con el ángulo *B* entonces el segmento *AC* es congruente con el segmento *BC*"[5]. En el cuadro siguiente se exponen, en nuestras palabras, algunas de las propuestas que fueron consideradas y la razón por la que no fueron aceptadas (Samper, Camargo, Perry, 2006).

<table>
<tr><th>Propuesta de vía para la demostración</th><th>Razón por la que no fue aceptada</th></tr>
<tr><td>Fabio. Trazar la bisectriz del ángulo C y demostrar la congruencia de los triángulos formados LAL.</td><td>Carolina. No, porque lo que se quiere demostrar es que el segmento AC es congruente con el segmento BC; no se tiene esa congruencia.</td></tr>
<tr><td>Reinaldo. Unir el punto medio D del segmento AB con el vértice C del triángulo y demostrar la congruencia de los triángulos ADC y BDC.</td><td>Yolanda y Profesora. No, porque se tendría que usar como criterio LLA, pero éste no existe.</td></tr>
<tr><td>Reinaldo. Usar la perpendicular al segmento AB, por C, que pasa por el punto medio, D, del segmento AB.</td><td>Fabio. La altura relativa a un lado de un triángulo no tiene que pasar por el punto medio de éste.</td></tr>
<tr><td>Lulú. Trazar la bisectriz de uno de los ángulos congruentes.</td><td rowspan="3">No fue posible identificar dos triángulos que pudieran ser congruentes.</td></tr>
<tr><td>Daniel. Trazar la mediana a uno de los lados opuestos a uno de los ángulos congruentes.</td></tr>
<tr><td>Andrés. Trazar la mediatriz del lado opuesto a uno de los ángulos congruentes.</td></tr>
<tr><td>Lulú. Construir el triángulo cuyos vértices son los puntos medios de los lados del triángulo dado.</td><td>Profesora. No se tienen elementos para demostrar la congruencia de los triángulos que se forman.</td></tr>
<tr><td>James. Usar rectas paralelas.</td><td rowspan="2">Profesora. No se ha hablado de paralelas. Conceptos o teoremas que no conforman partes del sistema axiomático hasta el momento.</td></tr>
<tr><td>Grupo. Trazar la perpendicular al segmento AB, por C, y usar que la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es 180º.</td></tr>
<tr><td>James, Yolanda, Lulú. Construir segmento AX congruente con segmento AC y segmento BY congruente con segmento BC, en el semiplano determinado por la recta AB, que no contiene a C, y la perpendicular a AB por C, y las tres se encuentran en un punto.</td><td>Profesora. ¿Cómo asegurar que sí se encuentran en un punto?</td></tr>
</table>

[5] Cabe resaltar que la demostración clásica, atribuida a Pappus, de establecer la correspondencia del triángulo consigo mismo, pero intercambiando los vértices de los ángulos congruentes, generalmente no es convincente para los estudiantes.

Después de haber considerado públicamente las propuestas anteriores sin que ninguna fuera aceptada, los estudiantes siguen trabajando individualmente. En su ronda, la profesora advierte que Mariela tiene una propuesta diferente a las ya planteadas, y por ello, abre el espacio para que la estudiante la dé a conocer a todo el grupo. Mariela ha construido las bisectrices de los ángulos congruentes y pretende mostrar que los segmentos con extremos el punto de intersección de las bisectrices y los puntos *A* y *B*, respectivamente, tienen que ser congruentes (ver Figura 2), pero no puede producir esa justificación. A partir de la construcción de esas bisectrices, Carolina puede demostrar la congruencia de los segmentos *AX* y *BY* y de los segmentos *AY* y *BX* (*X* y *Y* son los puntos de intersección de las bisectrices construidas con los segmentos *BC* y *AC* respectivamente). Así, como lo expresa Lulú, se tiene la congruencia de un “pedacito” de los lados *AC* y *BC*. Al terminar la clase, el teorema queda sin demostrar.

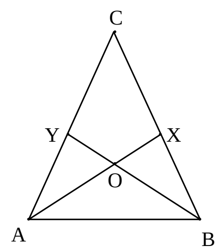

Figura 2

En la siguiente sesión, Mariela expone ante el grupo la demostración que hizo por fuera de clase, pero manifiesta duda acerca de la interestancia de los puntos *A*, *Y* y *C* así como de *B*, *X* y *C*, condición necesaria para completar la demostración. La profesora explica que éste es un hecho válido que los autores mencionan más adelante en el texto. A diferencia de la no aceptación del uso del paralelismo y el *teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo*, por no ser ellos elementos del sistema en el momento de abordar la demostración del teorema en discusión, éste sí se acepta, porque aunque no se ha demostrado, podría hacerse con los elementos que se tienen hasta el momento.

A los ojos de los demás estudiantes, la demostración de Mariela está perfecta, pero la profesora tiene una objeción: Mariela ha justificado la congruencia de los ángulos *YBA* y *XAB* por “la definición de bisectriz”[6] lo que es una razón errónea. A partir de tal objeción, los alumnos demuestran lo que, en el curso, denominan *teorema de la bisectriz*, otro teorema que introducen al sistema axiomático que no ha sido propuesto como tal por los autores del texto que se usaba como guía.

[6] La definición de bisectriz establece que: “Si *D* está en el interior del ángulo *BAC*, y ángulo *BAD* es congruente con ángulo *DAC*, entonces el rayo *AD* biseca al ángulo *BAC*, y el rayo *AD* se llama la bisectriz del ángulo *BAC*”. Por su parte, el denominado *teorema de la bisectriz* establece que “La medida de cualquiera de los ángulos determinados por la bisectriz es igual a la mitad de la medida del ángulo original”. Esta objeción puede dar idea del grado de rigor que se maneja en el curso.

El papel de la geometría dinámica

Hemos podido reconocer que el uso de la geometría dinámica puede mediar en varios asuntos que son de importancia fundamental en el aprendizaje de la demostración. Dado que los principios que se usaron en el diseño del programa Cabri se corresponden esencialmente con los postulados de la geometría euclidiana, es premisa subyacente a la innovación que por medio de la geometría dinámica es posible establecer conjeturas, sobre propiedades invariantes bajo el arrastre, con un alto grado de probabilidad de que ellas sean verdaderas en el sistema axiomático en construcción. A continuación hacemos una breve descripción al respecto. En Camargo, Samper y Perry (2006; 2007) y en Perry, Samper, Camargo (2007) se puede ampliar este tema.

1. *Entender que el cumplimiento de la tesis de un enunciado "si… entonces…" depende de todas las condiciones de la hipótesis*. La mayoría de los postulados, definiciones y teoremas en geometría se enuncian usando la estructura lógica de una implicación, sea esta explicita o implícita en la respectiva formulación. Además, dos de las estructuras básicas para establecer validez matemática son los denominados Modus Ponendo Ponens y Modus Tollendo Tollens, esquemas que hacen uso de la implicación. Una utilización apropiada de las definiciones, postulados y teoremas en el contexto de la actividad demostrativa requiere reconocer la estructura subyacente de la implicación en los enunciados y comprender ésta como un objeto matemático cuyas propiedades quedan bien definidas desde la lógica matemática. Para captar mejor las condiciones exigidas en una definición o un teorema, el uso de la geometría dinámica se constituye en un apoyo para estudiar las consecuencias de eliminar parte de las condiciones de la hipótesis del teorema, o alguna de las propiedades de la definición, y de esta manera comprender el papel que cumple cada una de ellas y así decidir si son necesarias. En el análisis de situaciones de este tipo, es innegable que la posibilidad de hacer de manera rápida y precisa diversas construcciones permite ilustrar cómo la ausencia de alguna condición distorsiona los resultados que se esperan.

2. *Apoyar la comprensión de relaciones geométricas que pueden quedar "ocultas" bajo enunciados que esconden la generalidad de la situación*. El tipo de situación problema y de tarea que se plantean a los estudiantes son dos componentes fundamentales de un entorno de aprendizaje que pretende favorecer la práctica de la demostración. Un contenido específico que hace parte del desarrollo temático del curso puede ser objeto de diferentes tratamientos que son más o menos útiles para la práctica de la demostración, según el enunciado que se formule (Camargo, Perry y Samper, 2005). En ocasiones, la forma como se enuncia una tarea puede llevar al estudiante a interpretar el problema como ejemplo de una situación particular, dependiente de las condiciones específicas que se presentan, y no como un hecho geométrico generalizable.

3. *Propiciar la creatividad, a través de construcciones auxiliares, para elaborar argumentos que llevan a la demostración de teoremas*. La facilidad de hacer construcciones auxiliares de diversa naturaleza y eliminarlas si no dan los frutos esperados es uno de los factores que hacen de los programas de geometría dinámica una herramienta poderosa en la búsqueda de una justificación. La visualización de una representación fiel a las condiciones establecidas en la situación permite evocar elementos del sistema axiomático que posiblemente resulten útiles en una demostración.

4. *Crear situaciones que dan lugar a suficientes resultados para poder construir una porción del sistema axiomático*. Este es un uso de la geometría dinámica muy importante para hacer posible la participación autónoma y relevante de los estudiantes en la actividad demostrativa que tiene lugar en la clase. A partir de una situación problema abierta, que favorece la exploración de propiedades geométricas, los estudiantes producen un conjunto diverso de conjeturas que, con la guía del profesor, se van organizando dentro del sistema axiomático. El papel del profesor es fundamental pues es quien puede anticipar la conveniencia de uno u otro orden en la organización de los enunciados, a efectos de ir incorporando los teoremas de tal suerte que se logre una organización deductiva local coherente.

5. *Determinar la validez de conjeturas formuladas por otros.* Cuando los estudiantes exploran situaciones problema abiertas y enuncian sus conjeturas, una estrategia que usa la profesora para determinar si la conjetura formulada se corresponde con las condiciones de dependencia creadas, al hacer la construcción, es solicitar a los estudiantes un recuento del procedimiento de construcción, pues en ocasiones los estudiantes no perciben las condiciones reales "que han dado" a su construcción y por tanto, la hipótesis de la conjetura formulada no es correcta. En estas ocasiones, se busca que los estudiantes realicen la construcción propuesta en una conjetura para analizar la validez de ésta.

6. *Entender el desarrollo lógico de una demostración*. En aquellas situaciones teóricas que buscan establecer la existencia de un objeto geométrico con propiedades especiales, el proceso necesario, desde la teoría, para desarrollar una demostración básicamente coincide con la organización requerida para realizar la construcción en el ambiente de la geometría dinámica.

7. *Descubrir relaciones geométricas entre las partes de figuras, que se podrían involucrar en la demostración.* Cuando se enuncia una situación geométrica sin la correspondiente representación gráfica, el hecho de poder realizarla con geometría dinámica, con las propiedades que exigen las condiciones establecidas en la hipótesis, da lugar a que la exploración de la figura refleje confiablemente las relaciones geométricas que existen entre las partes constituyentes de la figura. Tales relaciones pueden evocar elementos teóricos valiosos para la demostración.

Evaluación

En esta innovación es claro que la evaluación de los estudiantes cumple dos funciones diferentes: por un lado, da información sobre los resultados del aprendizaje, y, por otro lado, hace parte del aprendizaje mismo. Relativas a la primera función, se hacen en el curso cuatro tipos de tareas:

- Las comprobaciones quincenales —siete en total— en las que los estudiantes de manera individual y posiblemente usando la geometría dinámica deben responder a dos o tres preguntas. Se busca evaluar el grado de conocimiento de la teoría y el avance en la capacidad de demostrar. Aun cuando las discusiones en clase tienden a tener un toque de informalidad, en las comprobaciones, según lo solicitado, los estudiantes deben realizar un desarrollo cuidadoso y completo, justificando paso a paso las demostraciones con elementos teóricos, o presentar un plan que incluya los pasos importantes para desarrollar la demostración.

- Las tareas que se proponen semanalmente como tarea extraclase.

- Llevar un cuaderno en el cual registran las actividades realizadas con geometría dinámica, destacando qué aprendieron de geometría plana y qué de geometría dinámica en el proceso de resolver la situación propuesta; este cuaderno se recoge dos o tres veces en el semestre.
- El examen final.

Con respecto a la segunda función, todas las tareas que realizan los estudiantes reciben de manera oportuna una realimentación en la que se destacan, por un lado, los errores cometidos por los estudiantes y, por otro, soluciones interesantes. Con el análisis de las ideas erróneas de los estudiantes se busca determinar qué elementos de éstas son útiles para construir a partir de ellos algún hecho geométrico verdadero o rescatar aspectos, ya sea en las construcciones o en el análisis de las situaciones, que han pasado inadvertidos por otros miembros de la comunidad. Es por ello que toda idea que profiere el estudiante, sea equivocada o no, merece un reconocimiento.

BALANCE DE LA EXPERIENCIA DE INNOVACIÓN

Hemos usado tres mecanismos para recoger información sobre los resultados de la innovación:

- En las distintas versiones del curso hemos hecho análisis de las producciones escritas de los estudiantes al final del curso y hemos encontrado que en la mayoría de los casos hay un progreso notable en la elaboración de las demostraciones.
- Hemos recogido las apreciaciones de los estudiantes al terminar el curso, pudiendo apreciar una gran aceptación a la propuesta. La mayoría de los estudiantes reconocen que la exigencia de trabajo en el curso es fuerte pero sienten un cambio radical y positivo en su papel como aprendices de la práctica demostrativa.
- Aunque no ha sido un mecanismo empleado deliberadamente por nosotros, a través de los cursos de la línea de didáctica tenemos información de que los estudiantes reconocen su experiencia de aprendizaje en el curso de geometría plana como un aporte significativo a su formación académica.

Factores que facilitan su implementación

- Desarrollar la experiencia de innovación asociada a un estudio investigativo en el que participan varios colegas pues ayuda a crear y sostener un compromiso de mediano o largo plazo con la experiencia.
- Tener un balance positivo de la experiencia junto con la consciencia de que hay aspectos que se pueden mejorar nos ponen en una disposición apropiada para continuar el proceso de afinamiento de la propuesta.

Factores que dificultan su implementación

- Tener grupos demasiado numerosos de estudiantes, pues las posibilidades de participación regular de ellos en la clase se reducen.

- Las situaciones de orden público que con frecuencia interrumpen la normalidad académica pues hay necesidad de replantear el tiempo disponible para el desarrollo de las actividades planeadas e incluso las metodologías previstas.
- La presión externa o interna con respecto al cubrimiento de una cierta cantidad de tema, eventualmente puede conducir a hacer adaptaciones de la propuesta que la desvirtúan en su esencia.

IMPACTO SOCIAL DE LA INNOVACIÓN

Esta innovación se puede ver como una "prueba de existencia" de la posibilidad y viabilidad de diseñar estrategias para apoyar deliberada y sistemáticamente el aprendizaje de la demostración. En ese sentido, puede llegar a ser una referencia para colegas que quieran emprender un trabajo con propósitos similares al nuestro; tal sería un impacto social de la innovación. En particular, consideramos que invitaciones como las que hemos recibido tanto a nivel nacional como a nivel internacional para presentar detalles de la experiencia indican de hecho un interés por conocerla. En este orden de ideas también podemos mencionar, en primer lugar, la acogida de la propuesta curricular para seguirla en otras dos secciones paralelas del curso de geometría plana de la Universidad; en segundo lugar, el impulso a la revisión e innovación del primer curso de la línea de geometría; y en tercer lugar, el interés de estudiantes de la maestría por realizar trabajos de grado que extiendan parcialmente partes de la innovación en instituciones de educación media y secundaria.

PARA TERMINAR

Esperamos haber podido comunicar de manera significativa el espíritu que anima la innovación en la que hemos estado comprometidos. En particular, esperamos que se haya podido ver por qué consideramos que la experiencia de aprendizaje que se propicia para los estudiantes en este curso desafía las creencias de las que habla Schoenfeld en su artículo y otras más. A propósito, transcribimos comentarios de dos estudiantes de la primera versión del curso (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006, p. 171):

> "Si se pudiera decir en una sola palabra lo que fue este curso, diría que es demostración. Todo lo que hicimos durante todo el curso fue demostración. […] Cada uno tiene una propuesta para solucionar un problema y no todas las soluciones son la misma y la profesora le pone cuidado a uno y lo ayuda." (Reinaldo, en entrevista al final del curso)

> "[…] en muchas ocasiones, varios compañeros llegaron a ciertas conjeturas, después se volvieron teoremas; sin nosotros conocerlos, se llegaron a ellos o sea que nos hicieron como… investigar y analizar cosas más profundas." (Daniel, en entrevista al final del curso)

REFERENCIAS

Camargo, L., Perry, P. y Samper, C. (2005). La demostración en la clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática, 17* (3), 53-76.

Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Lecturas Matemáticas* (volumen especial), 371-383.

Camargo, L., Samper, C. y Perry, P. (2007). Cabri's role in the task of proving within the activity of building part of an axiomatic system. Ponencia presentada en CERME 5, en el grupo de trabajo sobre la demostración. www.lettredelapreuve.it/CERME5Papers/WG4-Camargo.pdf

de Villiers, M. (1986). The role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching. Research Unit for Mathematics Education (RUMEUS). South Africa: University of Stellenbosch. http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/axiom.pdf

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psycholgy of Mathematics Education* (vol. I, pp. 21-34). Valencia: Universidad de Valencia.

Mariotti, M.A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173 - 204). Rotterdam: Sense Publishers.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C. y Camargo, L. (2007). Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave. Ponencia presentada en Iberocabri. Próxima aparición en formato digital en: www.iberocabri.org.

Samper, C., Camargo, L. y Perry, P. (2006). Geometría Plana: un espacio de aprendizaje. Reporte de investigación no publicado. Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.

Schoenfeld, A. (1988). When good teaching leads to bad results: the disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational psychologist*, *23* (2), 145-166.