



Universidad de los Andes
Facultad de Educación

Foro EMAD 2017


una empresa docente

Un estudio sobre objetos matemáticos no usuales en un espacio académico de la educación media

Laura Aguirre, Valentina Barrera, Ángel Pérez, Jose Gabriel Vega, Luis Ortiz

Instituto Pedagógico Nacional - Bogotá


06 de octubre de 2017



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
Fundadora de Pedagogía

República de Colombia

INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL



Momentos

1. Presentación
 - ¿Qué es el Énfasis de Matemáticas del IPN?
 - Objetivos del espacio.
2. Inicio en el Espacio Académico
 - Definiciones
 - Conjeturas
3. Estudios en la Teoría de Nudos
 - Los movimientos de Reidemeister
 - La notación de Gauss
 - La notación de Dowker – Thislethwaite (DT)
4. Conclusiones

PRESENTACIÓN

El Énfasis de Matemáticas del IPN

Es un Proyecto Pedagógico construido por del Área de Matemáticas del Instituto Pedagógico Nacional (Bogotá) creado para la atención a población estudiantil con interés en la profundización en Matemáticas. Está conformado por dos asignaturas en el plan de estudios de grado décimo y once:

- Tópicos de Pre-Cálculo (10) - Tópicos de Cálculo (11).
- Seminario Proyecto (10) y (11).
 - Matemática Pura.
 - Matemática Aplicada.

Objetivos del espacio

- Analizar y caracterizar algunos objetos matemáticos no usuales (en el contexto escolar) con el fin de establecer relaciones entre estos y algunos conceptos estudiados en educación básica o media.
- Plantear propuestas de investigación o innovación escolar aplicando procesos de conocimiento matemático, científico, social o artístico, en la solución de situaciones relacionadas con su entorno.

Objetivos específicos

- Observar, descubrir, e interpretar situaciones problema en contextos reales y matemáticos.
- Desarrollar pensamiento crítico frente al significado de las matemáticas, su finalidad y como se da su desarrollo.
- Realizar, identificar, demostrar y poner en práctica procesos y modelos matemáticos que den solución a situaciones problema en contextos reales y matemáticos.

El problema

- Las características del talento matemático: La Meta.
 - Pensamiento convergente: Visualización, Reversión, Generalización.
 - Pensamiento Divergente: Fluidez, Abstracción, Flexibilidad, Autonomía en el trabajo Matemático.
- La teoría de nudos: Una herramienta.

INICIOS DEL ESPACIO ACADÉMICO

Definiciones

- **Corte (o cruce)**

Dada una cuerda en el espacio, un corte (o cruce) es una superposición de una parte de la cuerda sobre otra.

- **Nudo**

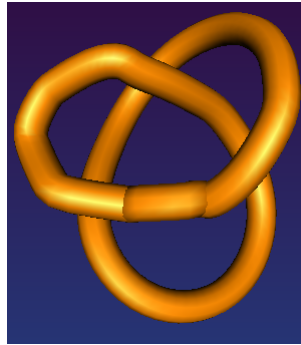
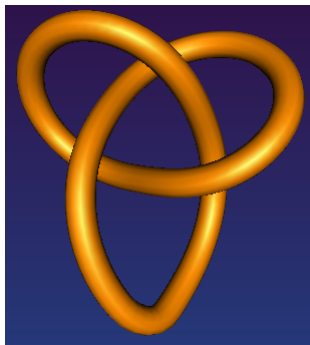
Es una proyección del espacio en el plano de una cuerda sin puntas con n cruces, donde $n \in \mathbb{N}$.

- **Nudo Trivial**

Aquel que tiene cero cruces.

Ejemplo: El nudo de tres cruces

- ¿Qué semejanzas y diferencias hay entre estos dos nudos?
¿Alguno de ellos puede convertirse en el nudo trivial?



Conjeturas encontradas I

Las primeras conjeturas encontradas en el desarrollo de las nociones básicas de la teoría de nudos fueron las siguientes:

- **Conjetura 1: Desarmabilidad**

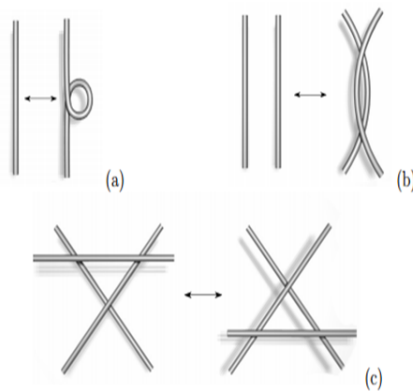
Si una parte de la cuerda pasa por encima de todos los cortes, entonces el nudo es desarmable.

- **Conjetura 2: Generación de cruces por amarramiento**

Por cada amarre que se realice a una cuerda se generan tres nuevos cortes, es decir, si n es el número de amarres entonces se obtienen $3n$ cruces (progresión aritmética).

ESTUDIOS EN LA TEORÍA DE NUDOS

Los movimientos de Reidemeister

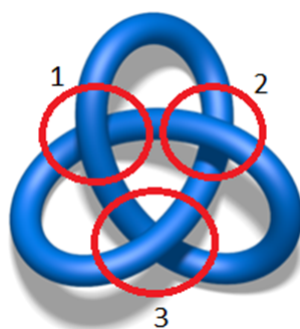


- Torsión (I)
- Superposición (II)
- Desplazamiento (III)

Los movimientos de Reidemeister

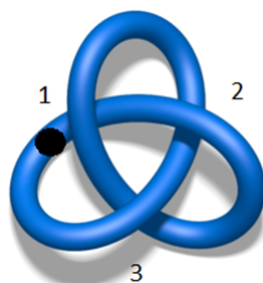


La notación de Gauss



Cortes

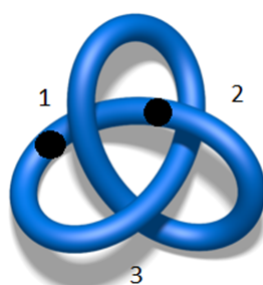
La notación de Gauss



Cortes

-1

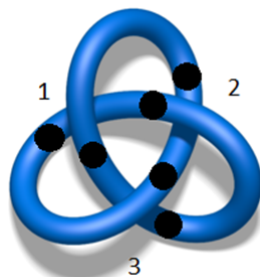
La notación de Gauss



Cortes

-1, +2

La notación de Gauss



Cortes

$(-1, +2, -3, +1, -2, +3)$

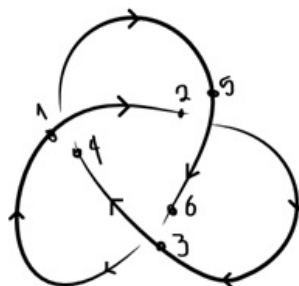
La notación de Dowker – Thislethwaite (DT)

- En esta notación se toma la representación plana de un nudo de n cruces, se elabora una serie de marcas sobre ésta que permitirán la construcción de una matriz asociada y un vector que resume la notación.

El nudo trébol

$(4, 6, 2)$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -5 & 6 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$



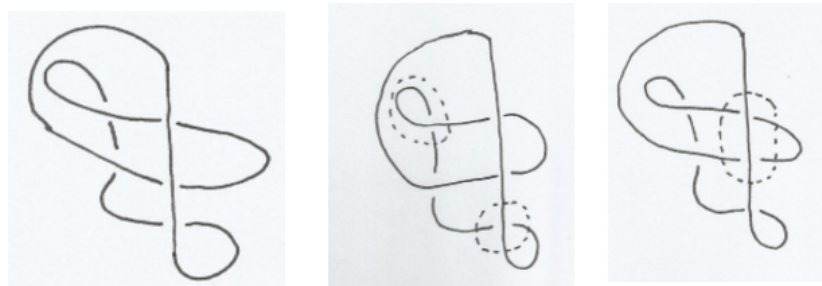
La reversión en la Notación DT

- **Definición: Reversión – Teoría de Nudos**

Es la restitución de un registro de representación gráfico de un nudo, a partir de la información contenida en una matriz ampliada ($2 \times 2n$) que contiene información numérica generada a partir de consideraciones específicas sobre sus cruces (Ortiz y Villarraga, 2016:56).

Identificación de los movimientos de Reidemeister

Identificar nudos desarmables o primos que tengan movimientos de Reidemeister tipo (I) y (II) en la representación vectorial o matricial.



Representación de los movimientos de Reidemeister I

- Conjetura 3: Torsión

¿Cómo se representa en una matriz? Ejemplo: El nudo de 5 cruces

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -4 & 7 & 10 & 1 & 6 & -5 & -2 & -9 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -4 & 7 & 10 & 1 & 6 & -5 & -2 & -9 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

Generalidad

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Caso de estudio: La identificación del movimiento (I) en un vector resumen DT

Al vector resumen $1 * n$:

$$VR = (a_i) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_i)$$

Se le asigna la posición respectiva a cada elemento, en la parte superior.

$$P = (b_i) = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_i)$$

De tal forma que se obtiene una matriz resumen,

$$P @ VR = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

- El caso de una Torsión simple:

En el valor de la posición b_{li} hay una torsión si el valor de la posición a_{li} es equivalente al valor de la posición $b_{li} \pm 1$.

- Ejemplo 1:

Presentamos un nudo con una sola torsión:

$$\blacksquare P = @VR = [\blacksquare 1 \& 3 \& 5 \& 8 \& 2 \& 10 \quad \blacksquare 7 \& 9 \& 11 \& 12 \& 4 \& 6]$$

$$3 = 2 + 1$$

- Ejemplo 2:

Presentamos un nudo con una sola torsión:

$$\blacksquare P = @VR = [\blacksquare 1 \& 3 \& 5 \& 8 \& 6 \& 2 \quad \blacksquare 7 \& 9 \& 11 \& 10 \& 4 \& 12]$$

$$11 = 12 - 1$$

Representación de los movimientos de Reidemeister II

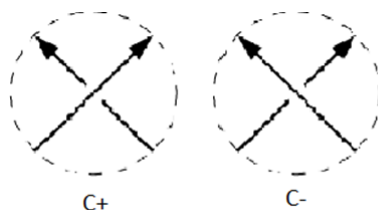
- Conjetura 4: Superposición

Si en la matriz $(2 \times 2n)$, en la segunda fila hay 3 signos consecutivos iguales podemos encontrar una superposición.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -4 & 7 & 10 & 1 & 6 & -5 & -2 & -9 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

El Polinomio de Conway

Orientaciones en los cruces de un nudo.



Operaciones básicas de Conway: Cambiar Orientación (Izq.)
Corte Paralelo (Der.)



Para escribir el polinomio

$$\langle \bigcirc \rangle = 1$$

$$\langle \bigcirc \cdots \bigcirc \rangle = 0$$

$\nabla(z) = 1(\langle \bigcirc \rangle) + z(1(\langle \bigcirc \bigcirc \rangle + z(\langle \bigcirc \rangle)))$
 $\nabla(z) = 1(1) + z((0) + z(1))$
 $\nabla(z) = 1 + z(0 + z)$
 $\nabla(z) = 1 + z^2$

Conclusiones

- Se lograron construir algunas definiciones y conjeturas a partir del estudio realizado con las nociones básicas de la teoría de nudos.
- Se lograron identificar dos de los movimientos de Reidemeister en la representación matricial de la notación de Dowker-Thistlethwaite, y se construyeron conjeturas para los mismos; esto implica su identificación y desarrollo dentro de la notación.
- Se plantearon estudios y generalizaciones de dos movimientos de Reidemeister en aporte al trabajo de desarme de un nudo desde la representación vectorial y matricial.

Conclusiones

- (Y lo más importante) El Énfasis de Matemáticas es un bonito espacio para construir conocimiento matemático sin importar qué tanto hayamos estudiado.

Atentamente: El "Club" S.A.

Referencias

- Ortiz, L., & Villarraga, A. (2016). Un estudio en la teoría de nudos: Propuesta de intervención para talentosos en matemáticas en el "Club de Matemáticas" del Instituto Pedagógico Nacional. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Trabajo de grado de especialización en educación matemática.

Gracias...